§ I. — *Sur les racines imaginaires des équations.*

Remarque I.

Sur la manière de reconnaître quand toutes les racines d'une équation sont réelles.

1. Dans le n° 8 de ce Mémoire, j'ai donné des formules générales pour déduire d'une équation quelconque une autre équation dont les racines soient les carrés des différences entre les racines de l'équation proposée. Or, si toutes les racines d'une équation sont réelles, il est évident que les carrés de leurs différences seront tous positifs; par conséquent, l'équation dont ces carrés seront les racines, et que nous appellerons dorénavant, pour abréger, *équation des différences*, cette équation,-dis-je, n'ayant que des racines réelles positives, aura nécessairement les signes de ses termes alternativement positifs et négatifs; de sorte que, si cette condition n'a pas lieu, ce sera une marque sûre que l'équation primitive a nécessairement des racines imaginaires.

2. De plus, comme on sait (*voyez* les *Mémoires* de cette Académie pour l'année 1746 et ceux de la Société de Turin pour l'année 1760) que les racines imaginaires vont toujours deux à deux, et qu'elles peuvent se mettre sous la forme

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha-\beta\sqrt{-1},$$

α et β étant des quantités réelles, il s'ensuit que la différence de deux racines imaginaires correspondantes sera nécessairement de la forme $2\beta\sqrt{-1}$, de sorte que le carré de cette différence sera $-4\beta^2$, c'est-à-dire une quantité réelle et négative. Donc, si l'équation proposée a des racines imaginaires, il faudra nécessairement que l'*équation des différences* ait au moins autant de racines réelles négatives qu'il y aura de couples de racines imaginaires dans la proposée.

C'est ce que j'avais déjà remarqué dans le § II du Mémoire cité; mais voici une conséquence qui m'avait échappé alors, et qui peut être d'une grande utilité dans la recherche des racines imaginaires.

3. Nous venons de voir que chaque couple de racines imaginaires de la proposée doit donner au moins une racine réelle négative dans l'équation des différences. Or, il est démontré (*voyez* les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris* pour l'année 1741) qu'une équation quelconque ne saurait avoir plus de racines positives qu'elle n'a de changements de signes, ni plus de racines négatives qu'elle n'a de successions du même signe. Donc, le nombre des racines imaginaires dans une équation quelconque ne pourra jamais être plus grand que le double de celui des successions de signe dans l'équation des différences.

4. De là et de ce que nous avons dit ci-dessus il s'ensuit que, si l'équation des différences a tous ses termes alternativement positifs et négatifs, l'équation primitive aura nécessairement toutes ses racines réelles, sinon elle aura nécessairement des racines imaginaires. Ainsi l'on pourra toujours juger par ce moyen s'il y a ou non des racines imaginaires dans une équation quelconque donnée.

Remarque II.

Où l'on donne des règles pour déterminer le nombre des racines imaginaires d'une équation.

5. Soient

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\ldots$$

les racines réelles d'une équation quelconque, et

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha-\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1},\quad \gamma-\delta\sqrt{-1},\ldots$$

les racines imaginaires; les carrés des différences de ces racines seront

$$\begin{array}{lll}(a-b)^2, & (a-c)^2, & (a-d)^2,\ldots,\\ (b-c)^2, & (b-d)^2,\ldots, & (c-d)^2,\ldots;\\ -4\beta^2, & -4\delta^2,\ldots, & \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
(\alpha - a + \beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha - a - \beta\sqrt{-1})^2, \\
(\alpha - b + \beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha - b - \beta\sqrt{-1})^2, \\
(\alpha - c + \beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha - c - \beta\sqrt{-1})^2, \\
(\alpha - d + \beta\sqrt{-1})^2, & (\alpha - d - \beta\sqrt{-1})^2, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
\\
(\gamma - a + \delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma - a - \delta\sqrt{-1})^2, \\
(\gamma - b + \delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma - b - \delta\sqrt{-1})^2, \\
(\gamma - c + \delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma - c - \delta\sqrt{-1})^2, \\
(\gamma - d + \delta\sqrt{-1})^2, & (\gamma - d - \delta\sqrt{-1})^2, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots, \\
\\
[\alpha - \gamma + (\beta - \delta)\sqrt{-1}]^2, & [\alpha - \gamma - (\beta - \delta)\sqrt{-1}]^2, \\
[\alpha - \gamma + (\beta + \delta)\sqrt{-1}]^2, & [\alpha - \gamma - (\beta + \delta)\sqrt{-1}]^2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}
$$

lesquels seront par conséquent les racines de l'équation des différences.

Soit m le degré de l'équation proposée, qui est égal au nombre des racines

$$a,\ b,\ c,\dots,\quad \alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha - \beta\sqrt{-1},\quad \gamma + \delta\sqrt{-1},\quad \gamma - \delta\sqrt{-1},\dots;$$

celui de l'équation des différences sera (n° 8 du Mémoire cité)

$$\frac{m(m-1)}{2} = n;$$

or, soit p le nombre des racines réelles a, b, c,... et $2q$ celui des racines imaginaires

$$\alpha + \beta\sqrt{-1},\quad \alpha - \beta\sqrt{-1},\quad \gamma + \delta\sqrt{-1},\quad \gamma - \delta\sqrt{-1},\dots,$$

en sorte que $m = p + 2q$, il est facile de voir par la table précédente que, parmi les n racines de l'équation des différences, il y en aura nécessairement $\frac{p(p-1)}{2}$ de réelles et positives, q de réelles et négatives, et $2q(p+q-1)$ d'imaginaires.

6. Qu'on fasse maintenant le produit de toutes ces racines, et il est

visible que le produit des $\frac{p(p-1)}{2}$ racines positives sera toujours positif, que celui des q racines négatives sera positif ou négatif, suivant que le nombre q sera pair ou impair, qu'enfin le produit des $2q(p+q-1)$ racines imaginaires sera toujours positif; en effet, ces dernières racines étant deux à deux de la forme

$$(A+B\sqrt{-1})^2, \quad (A-B\sqrt{-1})^2,$$

leurs produits deux à deux seront de la forme

$$(A^2+B^2)^2,$$

et par conséquent positifs; donc, le produit de toutes ces racines ensemble sera toujours aussi positif.

Donc le produit total sera nécessairement positif ou négatif, suivant que q sera pair ou impair.

Mais le dernier terme d'une équation est, comme on sait, égal au produit de toutes ses racines avec le signe $+$ ou $-$, suivant que le nombre de ces racines est pair ou impair.

Donc le dernier terme de l'équation des différences dont le degré est n sera nécessairement positif si n et q sont tous deux pairs ou tous deux impairs, et négatif si l'un de ces nombres est pair et l'autre impair.

7. Or, si n et q sont tous deux pairs ou impairs, $n-q$ sera nécessairement pair, et si n et q sont l'un pair et l'autre impair, $n-q$ sera nécessairement impair; mais, à cause de

$$n=\frac{m(m-1)}{2} \quad \text{et de} \quad m=p+2q,$$

on a

$$n-q=\frac{p(p-1)}{2}+2q(p+q-1),$$

de sorte que $n-q$ sera toujours pair ou impair, suivant que $\frac{p(p-1)}{2}$ le sera.

Donc le dernier terme de l'équation des différences sera nécessairement positif ou négatif, suivant que le nombre $\frac{p(p-1)}{2}$ sera pair ou impair, c'est-à-dire suivant que le nombre des combinaisons des racines réelles de la proposée prises deux à deux sera pair ou impair.

8. 1° Supposons que ce dernier terme soit positif, il faudra en ce cas que $\frac{p(p-1)}{2}$ soit pair; donc, ou

$$\frac{p}{2}=2\lambda \quad \text{et} \quad p=4\lambda,$$

ou

$$\frac{p-1}{2}=2\lambda \quad \text{et} \quad p=4\lambda+1;$$

d'où il s'ensuit que, dans ce cas, le nombre des racines réelles de la proposée sera nécessairement multiple de 4 si ce nombre est pair, c'est-à-dire si le degré de l'équation est pair, ou multiple de 4 plus 1 si le degré de l'équation est impair. Ainsi, il sera impossible que l'équation ait 2, ou 3, ou 6, ou 7,... racines réelles.

2° Supposons que le dernier terme de l'équation des différences soit négatif, il faudra alors que $\frac{p(p-1)}{2}$ soit impair; donc, ou

$$\frac{p}{2}=2\lambda+1 \quad \text{et} \quad p=4\lambda+2,$$

ou

$$\frac{p-1}{2}=2\lambda+1 \quad \text{et} \quad p=4\lambda+3;$$

d'où il s'ensuit que, dans ce cas, le nombre des racines réelles de la proposée sera nécessairement multiple de 4 plus 2 si le degré de l'équation est pair, ou multiple de 4 plus 3 si ce degré est impair. De sorte qu'il sera impossible que l'équation ait en ce cas 1, ou 4, ou 5, ou 8, ou 9,... racines réelles.

9. Ainsi, par l'inspection seule des signes de l'équation des différences, on sera en état de juger : 1° si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles ou non; 2° si le nombre des racines réelles est un

de ceux-ci 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13,..., ou bien s'il est un de ceux-ci 2, 3, 6, 7, 10, 11,..., ce qui suffira pour déterminer le nombre des racines réelles et des racines imaginaires dans les équations qui ne passent pas le cinquième degré, et dans toutes les équations où l'on saura d'avance que les racines imaginaires ne sauraient être plus de quatre.

Peut-être qu'en poussant plus loin cette théorie on pourrait trouver des règles sûres pour déterminer le nombre des racines réelles dans les équations de degré quelconque, les méthodes qu'on a proposées jusqu'à présent pour cet objet étant ou insuffisantes, comme celles de Newton, Maclaurin, etc., ou impraticables, comme celles de Stirling et de l'abbé de Gua, qui supposent la résolution des équations des degrés inférieurs.

Remarque III.

Où l'on applique la théorie précédente aux équations du second, troisième et quatrième degré.

10. Soit l'équation proposée du second degré comme

$$x^2 - Ax + B = 0,$$

l'équation des différences sera du degré $\frac{2.1}{2} = 1$, et l'on trouvera par la méthode du n° 8 du Mémoire cité que cette équation sera

$$v - a = 0,$$

où l'on aura

$$4a = A^2 - 4B.$$

Ainsi les racines seront toutes deux réelles ou toutes deux imaginaires suivant que l'on aura $A^2 - 4B > 0$ ou < 0; et elles seront égales lorsque $A^2 = 4B$.

11. Soit proposée l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

l'équation des différences sera ici du degré $\frac{3.2}{2} = 3$, et l'on trouvera par la même méthode

$$v^3 - av^2 + bv - c = 0,$$

où

$$4a = 2(A^2 - 3B),$$
$$16b = (A^2 - 3B)^2,$$
$$4^3 c = \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2}{3}.$$

Donc, pour que les racines soient toutes réelles, il faudra que l'on ait

1° $$A^2 - 3B > 0,$$

2° $$4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0.$$

Si l'une de ces deux conditions manque, l'équation aura deux racines imaginaires.

12. Soit maintenant proposée l'équation générale du quatrième degré

$$x^4 \star + Bx^2 - Cx + D = 0$$

dont le second terme est évanoui pour plus de simplicité; le degré de l'équation des différences sera $\frac{4.3}{2} = 6$; de sorte que cette équation sera

$$v^6 - av^5 + bv^4 - cv^3 + dv^2 - ev + f = 0,$$

où l'on trouvera par la même méthode

$$4a = -8B,$$
$$16b = 22B^2 + 8D,$$
$$4^3 c = -18B^3 + 16BD + 26C^2,$$
$$4^4 d = 17B^4 + 24B^2D - 7.16D^2 + 3.16BC^2,$$
$$4^5 e = -4B^5 - 2.27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3.4^3BD^2 - 2.4^2B^3D,$$
$$4^6 f = 4^4D^3 - 2^3 4^2 B^2 D^2 + 4^2 3^2 C^2 BD + 4^2 B^4 D - 4C^2B^3 - 3^3 C^4.$$

Donc si la quantité

$$4^4D^3 - 2^3 4^2 B^2D^2 + 4^2 3^2 C^2 BD + 4^2 B^4 D - 4C^2B^3 - 3^3C^4$$

est négative, la proposée aura nécessairement deux racines réelles et deux imaginaires; mais, si cette quantité est positive, alors la proposée aura toutes ses racines réelles ou toutes imaginaires.

Or, toutes les racines seront réelles si les valeurs de tous les coefficients a, b, c, d, e, f sont positives; donc elles seront toutes imaginaires si, le dernier coefficient f étant positif, quelqu'un des autres se trouve négatif.

Supposons donc le coefficient f positif, en sorte que l'on ait

$$4^4 D^3 - 2^3 4^2 B^2 D^2 + 4^2 3^2 C^2 BD + 4^2 B^4 D - 4 C^2 B^3 - 3^3 C^4 > 0,$$

et l'on trouvera que tous les autres coefficients seront aussi positifs si l'on a en même temps

$$B < 0 \quad \text{et} \quad B^2 - 4D > 0,$$

et qu'au contraire quelqu'un d'eux deviendra nécessairement négatif si

$$B > 0 \quad \text{ou} \quad B^2 - 4D < 0.$$

Ainsi, dans le premier cas, les quatre racines de l'équation seront toutes réelles, et dans le second cas elles seront toutes imaginaires.

On pourrait de même trouver les conditions qui rendent les racines des équations du cinquième degré toutes réelles, ou en partie réelles et en partie imaginaires; mais comme dans ce cas l'équation des différences monterait au degré $\frac{5.4}{2} = 10$, le calcul deviendrait extrêmement prolixe et embarrassant.

Remarque IV.

Sur la manière d'avoir les racines imaginaires des équations.

13. Nous avons vu dans la Remarque II que chaque couple de racines imaginaires correspondantes $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ donne nécessairement dans l'équation des différences une racine réelle négative $-4\beta^2$; d'où il s'ensuit qu'en cherchant les racines réelles négatives de cette équation, on trouvera nécessairement les valeurs de $-4\beta^2$, d'où l'on aura celles de β, à l'aide desquelles on pourra ensuite trouver les valeurs correspondantes de α, comme nous l'avons enseigné dans le n° 17 du Mémoire cité; de sorte qu'on aura par ce moyen l'expression de chaque racine imaginaire de l'équation proposée, ce qui est souvent nécessaire, surtout dans le calcul intégral. Voici seulement une observation qui peut servir à répandre un plus grand jour sur cette théorie, et à dissiper en même temps les doutes qu'on pourrait se former sur son exactitude et sa généralité.

14. Lorsque les parties réelles α, γ,... des racines imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha-\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1},\quad \gamma-\delta\sqrt{-1},\ldots,$$

sont inégales tant entre elles qu'avec les racines réelles a, b, c,..., il est évident par la table de la Remarque précédente que l'équation des différences n'aura absolument d'autres racines réelles négatives que celles-ci $-4\beta^2$, $-4\delta^2$,..., de sorte que le nombre de ces racines sera le même que celui des couples de racines imaginaires dans l'équation proposée.

Mais, s'il arrive que parmi les quantités α, γ,... il s'en trouve d'égales entre elles ou d'égales aux quantités a, b, c,..., alors l'équation des différences aura nécessairement plus de racines négatives que la proposée n'aura de couples de racines imaginaires.

En effet, soit $a=\alpha$, et les deux racines imaginaires

$$(\alpha-a+\beta\sqrt{-1})^2,\quad (\alpha-a-\beta\sqrt{-1})^2$$

deviendront $-\beta^2$ et $-\beta^2$, et par conséquent réelles négatives.

De sorte que, si l'équation proposée ne contient, par exemple, que les deux racines imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\quad \text{et}\quad \alpha-\beta\sqrt{-1},$$

l'équation des différences contiendra, dans le cas de $\alpha=a$, outre la racine réelle négative $-4\beta^2$, encore ces deux-ci $-\beta^2$, $-\beta^2$ égales entre elles.

D'où l'on voit que lorsque l'équation des différences a trois racines réelles négatives, dont deux sont égales entre elles, alors la proposée peut avoir ou trois couples de racines imaginaires ou un seulement.

Si la proposée contient quatre racines imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1},\quad \alpha-\beta\sqrt{-1},\quad \gamma+\delta\sqrt{-1},\quad \gamma-\delta\sqrt{-1},$$

alors l'équation des différences contiendra d'abord les deux racines réelles négatives $-4\beta^2$, $-4\delta^2$; ensuite, si $\alpha=a$, elle aura encore ces deux-ci $-\beta^2$, $-\beta^2$; si $\gamma=b$, elle aura de même ces deux autres-ci $-\delta^2$, $-\delta^2$; enfin, si l'on avait $\alpha=\gamma$, alors les quatre racines imaginaires

$$[\alpha-\gamma+(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [\alpha-\gamma-(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2,$$
$$[\alpha-\gamma+(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [\alpha-\gamma-(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2$$

deviendraient

$$-(\beta-\delta)^2,\quad -(\beta-\delta)^2,\quad -(\beta+\delta)^2,\quad -(\beta+\delta)^2,$$

c'est-à-dire réelles négatives et égales deux à deux.

15. De là il est facile de conclure :

1° Que lorsque toutes les racines réelles négatives de l'équation des différences sont inégales entre elles, alors la proposée aura nécessairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y aura de ces racines.

Et dans ce cas, nommant $-\omega$ une quelconque de ces racines, on aura d'abord $\beta=\frac{\sqrt{\omega}}{2}$; cette valeur étant ensuite substituée dans les deux équations (H) du n° **17** du Mémoire cité, on cherchera leur plus grand commun diviseur en poussant la division jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α ne se trouve plus qu'à la première dimension; et faisant ce reste égal à zéro, on aura la valeur de α correspondante à celle de β; par ce moyen chaque racine négative $-\omega$ donnera deux racines imaginaires

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}\quad\text{et}\quad \alpha-\beta\sqrt{-1}.$$

2° Que si, parmi les racines réelles négatives de l'équation des différences, il y en a d'égales entre elles, alors chaque racine inégale, s'il y en a, donnera toujours, comme dans le cas précédent, un couple de racines imaginaires; mais chaque couple de racines égales pourra donner aussi deux couples de racines imaginaires, ou n'en donner aucun; ainsi deux racines égales donneront ou quatre racines imaginaires ou aucune; trois racines égales donneront ou six ou deux racines; quatre racines égales donneront ou huit ou quatre racines imaginaires, et ainsi de suite.

16. Or, soient par exemple $-\varpi$ et $-\varpi$ deux racines égales négatives de l'équation des différences, on fera $\beta = \frac{\sqrt{\varpi}}{2}$ comme ci-dessus, et substituant cette valeur de β dans les équations (H) du numéro cité, on cherchera leur commun diviseur en ne poussant la division que jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α ne se trouve qu'à la seconde dimension, à cause que la valeur de β est double, comme nous l'avons déjà remarqué dans l'endroit cité.

Ainsi, faisant ce reste égal à zéro, on aura pour la détermination de α une équation du second degré, laquelle aura par conséquent ou deux racines réelles ou deux imaginaires.

Dans le premier cas, nommant ces deux racines α' et α'', on aura les quatre racines imaginaires

$$\alpha' + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha' - \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha'' + \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha'' - \beta\sqrt{-1};$$

dans le second cas, les valeurs de α étant imaginaires contre l'hypothèse, ce sera une marque que les deux racines égales $-\varpi$, $-\varpi$ ne donneront point de racines imaginaires dans la proposée.

17. S'il y avait dans l'équation des différences trois racines égales et négatives $-\varpi$, $-\varpi$, $-\varpi$, alors faisant $\beta = \frac{\sqrt{\varpi}}{2}$, on poussera seulement la division des équations jusqu'à ce que l'on parvienne à un reste où α se trouve à la troisième dimension; de sorte que, ce reste étant fait $= 0$, on aura une équation du troisième degré en α, d'où l'on tirera, ou trois valeurs réelles de α, ou une réelle et deux imaginaires : dans le premier cas on aura six racines imaginaires; dans le second on n'en aura que deux, les valeurs imaginaires de α devant toujours être rejetées comme contraires à l'hypothèse, et ainsi de suite.