ALGÈBRE. — *Théorie non-abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : bimatrices; représentations bimatricielles des semi-groupes abéliens libres.* Note ⁽¹⁾ de M. MARC KRASNER, présentée par M. Élie Cartan.

A, B étant deux matrices (carrées) régulières dans le corps de nombres complexes, on n'emploiera que leurs produit et somme *kroneckériennes* qui seront notés $A \times B$ et $A + B$ [donc $A + B$ est la matrice $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}$]. I_n désignera la matrice unité de degré n , et l'on pose $I = I_1$. On introduira le symbole O qui sera considéré comme l'unique matrice de degré 0, et l'on pose

$$O \times A = A \times O = O, \quad O + A = A + O = A.$$

Le degré, le déterminant et la trace d'une matrice A seront notés $n(A)$, $|A|$ et $\chi(A)$.

On appellera *bimatrice* tout couple ordonné $\mathfrak{A} = (A, B)$ de matrices régulières. Deux bimatrices (A, B) , (C, D) seront considérées comme équivalentes si les matrices $A + D$ et $B + C$ le sont. (A, O) sera identifié avec A . (O, A) sera dit l'*antimatrice* A et sera noté $-A$. (B, A) sera dit l'*opposé* de la bimatrice $\mathfrak{A} = (A, B)$ et sera noté $-\mathfrak{A}$. $n(\mathfrak{A}) = n(A) - n(B)$ sera appelé le *degré* de la bimatrice $\mathfrak{A}$, la fraction rationnelle $|I_{n(A)}x - A| : |I_{n(B)}x - B|$ sera dite la *fonction caractéristique* de $\mathfrak{A}$, et ses zéros et pôles seront dits *zéros* et *pôles* de $\mathfrak{A}$, et $\chi(\mathfrak{A}) = \chi(A) - \chi(B)$ sera dit le *caractère* de $\mathfrak{A}$.

$\mathfrak{A} = (A, B)$ et $\mathfrak{A}' = (A', B')$ étant deux bimatrices, on appellera *somme* des $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ la bimatrice $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' = (A + A', B + B')$ et *produit* des $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ la bimatrice $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' = (A \times A' + B \times B', A \times B' + B \times A')$. Ces opérations sont associatives et l'on a $-\mathfrak{A} = (-I) \times \mathfrak{A} = \mathfrak{A} \times (-I)$, $\mathfrak{A} + (-\mathfrak{A}) = O$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{A}' \times \mathfrak{A}$. De plus, on a

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}') \sim \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}' + \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}' + \mathfrak{B} \times \mathfrak{A}' + \mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'.$$

Ainsi, les classes d'équivalence de bimatrices forment un anneau commutatif par rapport à ces opérations, dont le zéro et l'unité sont les classes des O et I .

$\mathfrak{A} = (A, B)$ étant une bimatrice complètement réductible, autrement dit telle qu'il existe une bimatrice $(A', B') \sim \mathfrak{A}$ telle que A' et B' soient des matrices complètement réductibles, on définira comme suit, pour tout entier non négatif m , la *puissance $m^{\text{ième}}$ propre* $(\mathfrak{A})^m$ de $\mathfrak{A}$; si $\mathfrak{A}$ est une matrice (A, O) de degré 1, $(\mathfrak{A})^m = \mathfrak{A}^m = (A^m, O)$; si $\mathfrak{A}$ est une antimatrice (O, A) de degré -1 , $(\mathfrak{A})^m = I, \mathfrak{A}$ ou O suivant que $m = 0, 1$ ou > 1 ; et si $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$, $(\mathfrak{A})^m = \Sigma (\mathfrak{B})^i \times (\mathfrak{C})^{m-i}$, où i parcourt tous les entiers de 0 à m , et où Σ est le

(1) Séance du 27 octobre 1947.

signe de la somme kroneckérienne. Si $\mathbf{A} \sim \mathbf{A}'$, on a $(\mathbf{A})^m \sim (\mathbf{A}')^m$. D'ailleurs, $(\mathbf{A})^m$ peut se définir aussi pour les matrices non complètement réductibles.

$\mathbf{A}$ étant une bimatrice complètement réductible et f étant un entier positif, on notera $\mathbf{A}^{1:f}$ la bimatrice définie comme suit : si $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C}$ on pose $\mathbf{A}^{1:f} = \mathbf{B}^{1:f} + \mathbf{C}^{1:f}$; on pose $(-\mathbf{A})^{1:f} = -\mathbf{A}^{1:f}$; et si $\mathbf{A}$ est une matrice (a) de degré 1, on prend comme $\mathbf{A}^{1:f}$ la matrice diagonale de degré f dont l'ensemble des éléments coïncide avec celui des racines $f^{\text{ièmes}}$ de a .

Un semi-groupe abélien S avec unité est dit *libre* s'il existe un sous-ensemble S_0 de S , dit sa *base* tel que tout $\alpha \in S$ puisse être représenté, et d'une seule manière, comme produit de puissances non négatives d'éléments de S . La base d'un tel semi-groupe est unique, car ses éléments peuvent se caractériser comme les *premiers* de S , autrement dit ses éléments n'ayant d'autres diviseurs dans S qu'eux-mêmes ou l'unité 1. Un élément de S est dit *primaire* s'il est une puissance d'un élément premier. $\alpha, \beta \in S$ sont dits *premiers entre eux* s'ils n'ont dans S aucun diviseur commun sauf 1. Tout $\alpha \in S$ se décompose, et d'une seule manière en un produit d'éléments premiers entre eux deux à deux.

$\mathfrak{A}$ étant l'ensemble des classes d'équivalence de bimatrices complètement réductibles (qui est un anneau commutatif par rapport à l'addition et la multiplication définies plus haut, où est définie, pour tout exposant entier non négatif, la puissance propre de tout élément), toute application r d'un semi-groupe abélien libre S dans $\mathfrak{A}$ telle que : *a.* si α est un élément premier de S , $r(\alpha^m) = (r(\alpha))^m$; *b.* si $\alpha, \beta \in S$ sont premiers entre eux, $r(\alpha\beta) = r(\alpha) \times r(\beta)$, sera appelée une *représentation bimatricielle* de S . r sera dite *positive* si toutes les $r(\alpha)$ sont des matrices. Une représentation bimatricielle est, en vertu des *a, b*, complètement définie par sa restriction r_0 à la base S_0 de S . La représentation r sera dite la *somme* ou le *produit* de deux représentations t, u où l'*opposée* d'une représentation t (notation : $r = t + u$, $r = t \times u$, $r = -t$), si, pour tout $\alpha \in S_0$, on a $r(\alpha) = t(\alpha) + u(\alpha)$, $r(\alpha) = t(\alpha) \times u(\alpha)$ ou $r(\alpha) = -t(\alpha)$. Si $r = t + u$ et si t et u sont des représentations positives, r sera dit *positivement décomposable en t et u* , et l'on écrira $r = t(+)u$. Un sous-anneau L d'un anneau M de représentations bimatricielles sera dit *positivement complet* s'il est engendré par ses éléments positifs et si $r \in L$ et $r = t(+)u$, où $t, u \in M$, impliquent $t \in L$. Un $r \in M$ sera dit *irréductible* s'il est positif, mais non positivement décomposable.

Un homomorphisme $\alpha \rightarrow \alpha'$ d'un semi-groupe abélien libre S dans un semi-groupe abélien libre S' sera dit *régulier d'ordre n* si : *a.* pour tout $\alpha \in S$ premier, α' est primaire dans S' ; *b.* pour tout $\theta' \in S'$ premier, il existe des $\alpha \in S$ premiers tels que α' soit une puissance de θ' , et, si β est le produit de tous les $\alpha \in S$ de cette forme, $\beta' = \theta'^n$. Soient θ' un élément premier quelconque de S' et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v$ tous les éléments premiers de S tels que $\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_v$ soient des puissances $\theta'^{f_1}, \theta'^{f_2}, \dots, \theta'^{f_v}$ de θ' ($f_1 + f_2 + \dots + f_v = n$). Alors, r étant une représentation bimatricielle de S , on appelle l'*induite de r* par l'homomorphisme

régulier considéré la représentation bimatricielle r' de S' telle que, pour tout premier θ' de S' , on ait $r'(\theta') = r(\alpha_1)^{1:f_1} + r(\alpha_2)^{1:f_2} + \dots + r(\alpha_n)^{1:f_n}$. On a $(r+t)' = r' + t'$, $(-r)' = -r'$ et r' est positive si r l'est.

Les représentations bimatricielles r et $\bar{r}$ de deux semi-groupes abéliens libres S et $\bar{S}$ seront dites *équivalentes* ($r \sim \bar{r}$) s'il existe un sous-ensemble S^* de l'intersection $S_0 \cap \bar{S}_0$ des bases S_0 et $\bar{S}_0$ des S et $\bar{S}$ tel que : *a.* S_0 et $\bar{S}_0$ ne diffèrent de S^* (et, *a fortiori* de $S_0 \cap \bar{S}_0$) que par des ensembles *finis* d'éléments; *b.* pour tout $\alpha^* \in S^*$, $r(\alpha^*) = \bar{r}(\alpha^*)$. Si $r \sim \bar{r}$ et si $u \sim \bar{u}$, on a $-r \sim -\bar{r}$, $r + u \sim \bar{r} + \bar{u}$, $r \times u \sim \bar{r} \times \bar{u}$. On ne considérera les représentations bimatricielles qu'à l'équivalence près.

THÉORIE DES GROUPES. — *Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe.* Note de M^{me} MARIE-LOUISE DUBREIL-JACOTIN, présentée par M. Élie Cartan.

On sait que tout semi-groupe ⁽¹⁾ abélien S peut être immergé dans un groupe et qu'il n'en est plus de même dans le cas non commutatif ⁽²⁾. A. Malcev a donné ⁽³⁾ la condition nécessaire suivante pour que le problème soit possible : les relations

$$(1) \quad bs = b's', \quad (2) \quad bt = b't', \quad (3) \quad at = a't',$$

entre éléments de S , entraînent

$$(4) \quad at = a't',$$

et a étudié au moyen d'une infinité de conditions de compatibilité simultanées, dont aucun sous-ensemble fini n'est suffisant, la condition nécessaire et suffisante du problème. Enfin, on connaît une condition *suffisante* simple : la régularité à droite, ou à gauche, au sens de O. Ore ⁽⁴⁾ : tout couple a, b , d'éléments de S , admet au moins un multiple commun à droite, par exemple ⁽⁵⁾.

Nous nous proposons ici de construire un semi-groupe S qui est en quelque sorte aussi irrégulier que possible, et de montrer qu'il peut cependant être immergé dans un groupe.

Nous supposons que S n'a pas d'élément-unité et satisfait aux deux conditions suivantes :

⁽¹⁾ C'est-à-dire tout ensemble S dans lequel est définie une opération associative satisfaisant à la règle de simplification à gauche et à droite.

⁽²⁾ Voir par exemple P. DUBREIL, *Algèbre*, Paris, 1946, p. 136.

⁽³⁾ *On the immersion of an algebraic Ring into a Field* (*Math. Ann.*, **113**, 1937, p. 686), *Ueber die Einbettung von assoziativen Systemen in Gruppen* (*Rec. Math. Moscou*, **3**, 1939, p. 331, et **4**, 1940, p. 251).

⁽⁴⁾ *Linear equations in non commutative Fields* (*Ann. of Math.*, **32**, 1931, p. 463).

⁽⁵⁾ On a, bien entendu, aussi toutes les propositions symétriques.