3° VICTOR OPPENHEIM. *Structural Evolution of the south American Andes.*

4° ÉTIENNE HUBAULT. *Un lac acide de montagnes anciennes. Le lac de Lispach dans les Vosges. Étude hydrobiologique. — Les grands lacs subalpins de Savoie sont-ils alcalitrophes ? — Études thermiques, chimiques et biologiques des eaux des lacs de l'est de la France* (présentés par M. Louis Fage).

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : anneau des représentations d'un groupe; représentations associées du groupe de Galois et du semi-groupe des idéaux.* Note (1) de M. **MARC KRASNER**, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de ma Note précédente (2). Dans la présente Note, j'emploie aussi le produit ordinaire de matrices A, B qui sera noté AB.

Le couple $b(\mathfrak{A}) = (n(A), n(B))$ sera dit le *bidegré* de la bimatrice $\mathfrak{A} = (A, B)$. $\mathfrak{A} = (A, B)$ et $\mathfrak{A}' = (A', B')$ étant des bimatrices d'un même bidegré, la bimatrice $\mathfrak{A}\mathfrak{A}' = (AA', BB')$ sera dite leur *produit matriciel*, $\mathcal{G}$ étant un groupe, une fonction $\Gamma(\sigma)$, définie sur $\mathcal{G}$ et dont les valeurs soient des bimatrices d'un même bidegré, s'appelle une *représentation* (bimatricielle) de $\mathcal{G}$ si, pour tous σ, $\sigma' \in \mathcal{G}$, on a $\Gamma(\sigma\sigma') = \Gamma(\sigma)\Gamma(\sigma')$. Deux représentations $\Gamma(\sigma) = (A(\sigma), B(\sigma))$ et $\Gamma'(\sigma) = (A'(\sigma), B'(\sigma))$ de $\mathcal{G}$ sont dites *équivalentes* s'il existe une matrice régulière C telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$, on ait $A'(\sigma) + B(\sigma) = C[A(\sigma) + B'(\sigma)]C^{-1}$. Γ, Γ' étant deux représentations de $\mathcal{G}$, on notera $-\Gamma$, $\Gamma + \Gamma'$, $\Gamma \times \Gamma'$ la représentation Δ telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$, on ait $\Delta(\sigma) = -\Gamma(\sigma)$, $\Delta(\sigma) = \Gamma(\sigma) + \Gamma'(\sigma)$ ou $\Delta(\sigma) = \Gamma(\sigma) \times \Gamma'(\sigma)$. Γ est dite *positive* s'il existe une $\Gamma' \sim \Gamma$ telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$, $\Gamma'(\sigma)$ soit une matrice $(\neq O)$. Si $\Gamma \sim \Gamma' + \Gamma''$, où Γ', Γ'' sont positives, Γ est dite *positivement décomposable* en Γ', Γ'', et l'on écrit $\Gamma \sim \Gamma'(+)\Gamma''$. Γ est dite *irréductible* si elle est positive, mais non positivement décomposable. On ne considérera les représentations de $\mathcal{G}$ qu'à l'équivalence près. Alors, elles forment un anneau commutatif $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, dont le zéro est la représentation O telle que, pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$, on a $O(\sigma) = O$. On sait (3) que si $\mathcal{G}$ est d'ordre fini, ses représentations irréductibles forment un ensemble fini $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n\}$ et $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, en tant qu'un groupe additif, a cet ensemble comme une base minimale. Un sous-anneau $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ est dit *positivement complet* s'il est engendré par ses éléments positifs et si $\Gamma \in \overline{\mathcal{O}}$ et $\Gamma \sim \Gamma'(+)\Gamma''$ impliquent $\Gamma' \in \overline{\mathcal{O}}$. De tels sous-anneaux $\overline{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{O}(\mathcal{G})$ coïncident avec ceux qui en sont des sous-modules dont la base soit une partie des Γ_i.

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les classes d'éléments conjugués de $\mathcal{G}$ [leur nombre n est égal (3) à celui des Γ_i], h_j le nombre d'éléments de X_j (donc Σh_j est égale

(1) Séance du 17 novembre 1947.

(2) *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 785.

(3) Voir A. SPEISER, *Théorie d. grupp. endl. Ordn.*, Berlin, 1923, Chap. X et XI.

à l'ordre de $\mathcal{G}$), ξ_j la somme des $\sigma \in X_j$ dans l'anneau du groupe de $\mathcal{G}$ (sur l'anneau des entiers rationnels), $\chi_{i,j}$ et $\varphi_{i,j}$ le caractère et la fonction caractéristique de $\Gamma_i(\sigma)$, où $\sigma \in X_j$ (ils ne dépendent pas de choix d'un tel σ). Soient $\Gamma_i \times \Gamma_u = \Sigma g_{ius} \Gamma_s$ et $\xi_j \xi_v = \Sigma c_{jvt} \xi_t$. On sait ([3]) que la donnée des $\chi_{i,j}$ (et, *a fortiori*, celle des $\varphi_{i,j}$) détermine les tableaux des g_{ius} et des c_{jvt}, ainsi que les h_j (donc l'ordre de $\mathcal{G}$) et les l_i, où l_i est le degré des $\Gamma_i(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{G}$. Il me semble très plausible que la donnée des $\varphi_{i,j}$ détermine $\mathcal{G}$ à l'isomorphie près.

g étant un sous-groupe invariant de $\mathcal{G}$, une représentation $\overline{\Gamma}$ de $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/g$ sera identifiée avec la représentation Γ de $\mathcal{G}$ telle que $\Gamma(\sigma) = \overline{\Gamma}(\sigma g)$. Alors, $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{G}})$ s'identifie avec un sous-anneau positivement complet de $\mathcal{O}(\mathcal{G})$.

THÉORÈME. — *Si $\mathcal{O}$ est un sous-anneau positivement complet de $\mathcal{O}(\mathcal{G})$, il existe un sous-groupe invariant g de $\mathcal{G}$ tel que $\overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\overline{\mathcal{G}})$, où $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/g$.*

Démonstration. — Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_\nu (\nu \leqq n)$ les Γ_i constituant la base de $\overline{\mathcal{O}}$, R la représentation régulière de $\mathcal{G}$. On sait ([3]) que $R = l_1\Gamma_1 + l_2\Gamma_2 + \ldots + l_n\Gamma_n$. Soient $\Gamma = l_1\Gamma_1 + l_2\Gamma_2 + \ldots + l_\nu\Gamma_\nu$, $m = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + \ldots + l_\nu^2$ le degré de Γ (donc, on a $m^2 = ml_1 l_1 + ml_2 l_2 + \ldots + ml_\nu l_\nu$). Comme $\Gamma^2 \in \overline{\mathcal{O}}$, Γ^2 est de la forme $m_1\Gamma_1 + m_2\Gamma_2 + \ldots + m_\nu\Gamma_\nu$, où les m_i sont des entiers non négatifs, et le degré m' de Γ^2 est à la fois m^2 et $m_1 l_1 + m_2 l_1 + \ldots + m_\nu l_\nu$. Or, puisque $R = \Gamma(+)\Gamma'$, où Γ' est une représentation de $\mathcal{G}$, on a, si $\Gamma \times R$ est égal à $m_1^\star\Gamma_1 + m_2^\star\Gamma_2 + \ldots + m_n^\star\Gamma_n$, $m_i \leqq m_i^\star (i \leqq \nu)$. Or, $\Gamma \times R = mR$ donc est égal à $ml_1\Gamma_1 + ml_2\Gamma_2 + \ldots + ml_n\Gamma_n$, d'où $m_i \leqq ml_i$. Puisque $0 = m_1 l_1 + \ldots + m_\nu l_\nu - m^2$ est égal à $(m_1 - ml_1) l_1 + \ldots + (m_\nu - ml_\nu) l_\nu$, $m_i \leqq ml_i$ entraîne $m_i = ml_i$, d'où $\Gamma^2 = m\Gamma$ et pour tout $\sigma \in \mathcal{G}$, $\chi(\Gamma^2(\sigma)) = \chi(\Gamma(\sigma))^2 = m\chi(\Gamma(\sigma))$.

Donc, ou bien $\chi(\Gamma(\sigma)) = 0$, ou bien $\chi(\Gamma(\sigma)) = m$. $\Gamma(\sigma)$ est une matrice de degré m, et $\chi(\Gamma(\sigma))$ est la somme de ses m zéros, qui sont tous des racines de l'unité. Donc, si $\chi(\Gamma(\sigma)) = m$, ces zéros sont tous égaux à 1, et $\Gamma(\sigma) = I_m$. Ainsi, l'ensemble des tels $\sigma \in \mathcal{G}$ en est un sous-groupe invariant g et, visiblement, les caractères de Γ coïncident avec ceux de la représentation régulière $\overline{R}$ de $\overline{\mathcal{G}} = \mathcal{G}/g$. Par suite ([2]), $\Gamma = \overline{R}$ et $\overline{\mathcal{O}}$ coïncide avec $\mathcal{O}(\overline{\mathcal{G}})$.

Soient k un corps de nombres algébriques de degré fini, K une extension galoisienne de degré fini de k, $U_{K/k}$ le semi-groupe (qui est abélien libre) des idéaux entiers de k premiers au discriminant $D_{K/k}$ de K/k, $\mathcal{G}_{K/k}$ le groupe de Galois de K/k, $\left< K/k; \mathfrak{p} \right>$ le symbole d'Artin ([4]) de K/k pour l'idéal premier $\mathfrak{p} \in U_{K/k}$ (on sait que c'est une classe d'éléments conjugués de $\mathcal{G}_{K/k}$). Γ étant une représentation de $\mathcal{G}_{K/k}$, la classe d'équivalence de la bimatrice $\Gamma(\sigma)$, $\sigma \in \mathcal{G}_{K/k}$, ne dépend que de la classe X_σ d'éléments conjugués de σ, et sera noté $\Gamma(X_\sigma)$. Soit r_Γ la représentation bimatricielle de $U_{K/k}$ telle que, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} \in U_{K/k}$, on ait $r_\Gamma(\mathfrak{p}) = \Gamma(\left< K/k; \mathfrak{p} \right>)$. Γ et r_Γ seront dites

---

([4]) Voir H. HASSE, *Reziprozitätsgesetz*, Leipzig-Berlin, 1930, §§ 23, 24, 26.

associées. $\Gamma \to r_\Gamma$ est un homomorphisme de $\mathcal{O}(\mathcal{G}_{K/k})$ dans l'anneau des représentations bimatricielles de $U_{K/k}$. *C'est un isomorphisme*, même si les représentations de $U_{K/k}$ sont considérées à l'équivalence près, car, en vertu de la loi de densités de Tschebotarev ([4]), quelle que soit la classe X d'éléments conjugués de $\mathcal{G}_{K/k}$ il existe une infinité d'idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de k tels que $< K/k\,; \mathfrak{p} > = X$, et, si $\Gamma(X) \neq O$, on a $r_\Gamma(\mathfrak{p}) \neq O$. Γ et r_Γ sont positives en même temps. Si $L(s, \Gamma, K/k)$ est la fonction L d'Artin ([4]) de K/k pour Γ, on constate que $L(s, \Gamma) \sim \Sigma \chi(r_\Gamma(\mathfrak{p}))\, N(\mathfrak{p})^{-s}$, où $N(\mathfrak{p})$ est la norme absolue de $\mathfrak{p}$, et où la somme est étendue aux $\mathfrak{p} \in U_{K/k}$. Si K'/k est une surextension galoisienne de K/k, donc $\mathcal{G}_{K/k} = \mathcal{G}^{K'/k}/\mathcal{G}_{K'/K}$, Γ s'identifie avec une représentation Γ' de $\mathcal{G}_{K'/k}$, et, comme ([3]) $< K'/k\,; \mathfrak{p} > \to < K/k\,; \mathfrak{p} >$, on a $r_{\Gamma'} \sim r_\Gamma$.

ALGÈBRE. — *Sur les automorphismes du groupe unitaire.*
Note ([1]) de M. **Jean Dieudonné**, présentée par M. Élie Cartan.

Cette Note fait suite à une Note antérieure ([2]), où nous avons indiqué quels sont tous les automorphismes des groupes linéaire symplectique et orthogonal relatifs à un corps quelconque, commutatif ou non (de caractéristique $\neq 2$ pour le groupe orthogonal).

Soient K une extension quadratique d'un corps commutatif K_0 de caractéristique $\neq 2$, $\lambda \to \bar{\lambda}$ l'unique automorphisme de K distinct de l'identité et laissant invariants les éléments de K_0. Soient E un espace vectoriel de dimension n sur K, $f(x, y)$ une forme bilinéaire hermitienne symétrique de rang n sur E, relative à l'automorphisme $\lambda \to \bar{\lambda}$ [c'est-à-dire telle que $f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y)$ et $f(y, x) = \overline{f(x, y)}$]; le groupe unitaire $\mathbf{U}_n(K, f)$ est le sous-groupe de $\mathbf{GL}_n(K)$ formé des automorphismes u tels que $f(u(x), u(y)) = f(x, y)$ identiquement. Nous supposerons encore que f est d'indice $\nu \geq 1$, c'est-à-dire qu'il existe des vecteurs $x \neq 0$ tels que $f(x, x) = 0$.

Théorème. — *Tout automorphisme de groupe unitaire* $\mathbf{U}_n(K, f)$ $(n \geq 4, \nu \geq 1$, K de caractéristique $\neq 2)$ *est de la forme* $u \to \varphi(\Delta(u))gug^{-1}$, *où* $\Delta(u)$ *est le déterminant* ([3]) *de* u, φ *une représentation du groupe* N *des éléments de* K *de norme* $\lambda\bar{\lambda} = 1$ *dans lui-même*, g *un semi-automorphisme de* E *relatif à un automorphisme* σ *de* K *permutable avec* $\lambda \to \bar{\lambda}$, *et tel que l'on ait identiquement* $f(g(x), g(y)) = \alpha(f(x, y))^\sigma$, *où* α *est un élément* $\neq 0$ *de* K_0.

Ici encore, pour $n \geq 5$, tout automorphisme du groupe $\mathbf{U}_n^+(K, f)$ des trans-

([1]) Séance du 17 novembre 1947.

([2]) *Comptes rendus*, **225**, 1947, p. 914. Nous conservons la terminologie employée dans cette Note.

([3]) Pour la définition et les propriétés de ce déterminant, voir mon article : *Les déterminants sur un corps non communicatif* (*Bull. Soc. Math. Fr.*, **71**, 1943, pp. 27-45.)