

est grandement facilitée par la considération de l'anneau des quotients $\mathbb{O}_p$ de l'idéal premier p ⁽⁵⁾. Rappelons que $\mathbb{O}_p$ est un anneau local dont on note l'idéal maximal $p\mathbb{O}_p$. Il y a correspondance biunivoque monotone entre les idéaux q primaires pour p et les idéaux primaires pour $p\mathbb{O}_p$, $q\mathbb{O}_p$ correspondant à q . À $(q\mathbb{O}_p)^n$ correspond la *puissance symbolique* $n^{\text{ième}} q^{(n)}$ de q , c'est-à-dire la composante primaire de q^n suivant p . On tire donc des théorèmes 3 et 4 :

THÉOREME 5. — Soit q un idéal primaire pour l'idéal premier p d'un anneau noëthérien quelconque $\mathbb{O}$. Alors la longueur $P_q(n)$ de la puissance symbolique $q^{(n)}$ est un polynôme en n pour n assez grand.

THÉOREME 6. — Soit s l'intersection de tous les idéaux primaires pour p . Si p/s n'est pas un idéal premier de zéro dans $\mathbb{O}/s$ et si q est primaire pour p , on a $(q^{(n+1)} : q) = q^{(n)}$ pour n assez grand.

Dans une prochaine Note nous appliquerons ces résultats aux notions de dimension et de multiplicité dans les anneaux locaux. Les démonstrations de ces deux Notes feront l'objet d'une publication ultérieure.

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : anneau principal; lois d'unicité, d'ordination, d'existence (forme provisoire), d'isomorphisme et de décomposition; loi de monodromie.* Note de M. MARC KRASNER, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes ⁽¹⁾. Soient $\bar{K}/k$ une sous-extension de K/k , $\bar{\Gamma}$ une représentation de $\mathcal{G}_{\bar{K}/k}$, $r_{\bar{\Gamma}}$ sa représentation associée de $U_{\bar{K}/k}$, Γ la représentation de $\mathcal{G}_{K/k}$ induite par $\bar{\Gamma}$. $\mathfrak{P} \rightarrow N_{\bar{K}/k}(\mathfrak{P})$, où $N_{\bar{K}/k}(\dots)$ est la norme de $\bar{K}$ à k , est un homomorphisme régulier d'ordre $(\bar{K}:k)$ de $U_{\bar{K}/k}$ dans un semi-groupe abélien libre $U \supset U_{K/k}$ d'idéaux de k dont la base ne diffère de celle de $U_{K/k}$ que par un ensemble fini d'idéaux, et la démonstration du théorème d'Artin ⁽²⁾ que $L(s, K/\bar{K}, \bar{\Gamma}) \sim L(s, K/k, \Gamma)$ montre que $r_{\bar{\Gamma}}$ équivaut à l'induite de $r_{\bar{\Gamma}}$ par cet homomorphisme.

Considérons l'ensemble R_k des classes d'équivalence des représentations r_{Γ} associées aux représentations Γ des groupes de Galois $\mathcal{G}_{K/k}$ de toutes les extensions galoisiennes K de k . C'est un anneau. En effet, si $r, r' \in R_k$, il existe des extensions galoisiennes K/k et K'/k et des représentations Γ, Γ' des $\mathcal{G}_{K/k}, \mathcal{G}_{K'/k}$ telles que $r \sim r_{\Gamma}$ (donc $-r \sim r_{-\Gamma}$), $r' \sim r_{\Gamma'}$. Dès lors, si Γ^*, Γ'^* sont des représentations de $\mathcal{G}_{KK'/k}$ identifiées avec Γ, Γ' , on a $r_{\Gamma} \sim r_{\Gamma^*}$, $r_{\Gamma'} \sim r_{\Gamma'^*}$, d'où

⁽⁵⁾ CHEVALLEY, *On the notion of the ring of quotients of a prime ideal* (Bull. Amer. Math. Soc., 50, 1944, p. 93).

⁽¹⁾ Comptes rendus, 225, 1947, pp. 785 et 973.

⁽²⁾ Voir H. HASSE, *Reziprozitätsgesetz*, Leipzig-Berlin, 1930.

⁽³⁾ Annals of Math., 48, 1947, p. 502.

$r + r' \sim r_{\Gamma' + \Gamma''}$ et $r \times r' \sim r_{\Gamma' \times \Gamma''}$ sont $\in R_k$. En vertu d'un récent théorème de R. Brauer ⁽³⁾, R_k est engendré par les induites par les homomorphismes normaux $\overline{\mathfrak{p}} \rightarrow N_{\overline{K}/k}(\overline{\mathfrak{p}})$ des associées $r_{\overline{\Gamma}}$ des représentations $\overline{\Gamma}$ des groupes de Galois $\mathcal{G}_{\overline{K}/k}$ pour les seules extensions K/k et $\overline{K}/k$ telles que K/k soit galoisienne et $K/\overline{K}$ soit cyclique. R_k sera appelé l'*anneau principal de k*.

L'ensemble $\mathfrak{E}_{K/k}$ des représentations (à l'équivalence près) r_{Γ} de $U_{K/k}$ associées aux représentations Γ de $\mathcal{G}_{K/k}$ est un sous-anneau positivement complet de R_k (car si K'/k est une surextension galoisienne de K/k , $\mathcal{O}(\mathcal{G}_{K'/k})$ est positivement complet, en vertu de $\mathcal{G}_{K/k} = \mathcal{G}_{K'/k}/\mathcal{G}_{K'/K}$, dans $\mathcal{O}(\mathcal{G}_{K'/k})$, donc $\mathfrak{E}_{K/k}$ l'est dans $\mathfrak{E}_{K'/k}$; et si $r = r'(+)r''$, où $r \in \mathfrak{E}_{K/k}$ et où r', r'' sont $\in R_k$, il existe une surextension galoisienne K'/k de K/k telle qu'on ait $r, r', r'' \in \mathfrak{E}_{K'/k}$, d'où $r' \in \mathfrak{E}_{K/k}$), qui sera dit l'*anneau de Takagi de K/k*. On a $\mathfrak{E}_{K/k} = \mathfrak{E}_{K'/k}$ si, et seulement si $K = K'$ et l'on a $\mathfrak{E}_{K/k} \subset \mathfrak{E}_{K'/k}$ si, et seulement si $K \subset K'$, ce qui constitue les lois d'unicité et d'ordination. Mais, si $\mathfrak{E}$ est un sous-anneau positivement complet de R_k engendré par un ensemble fini de ses éléments, il existe une extension galoisienne finie K'/k telle que $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{K'/k}$: en effet, il existe une extension galoisienne finie K'/k telle que $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}_{K'/k}$. $r_{\Gamma} \rightarrow \Gamma$ est un isomorphisme de $\mathfrak{E}$ sur un sous-anneau positivement complet $\overline{\mathfrak{O}}$ de $\mathcal{O}(\mathcal{G}_{K'/k})$. Il existe donc un sous-groupe invariant g de $\mathcal{G}_{K'/k}$ tel que $\overline{\mathfrak{O}} = \mathcal{O}(\mathcal{G}_{K'/k}/g) = \mathcal{O}(\mathcal{G}_{K/k})$, où K appartient à g dans K' , d'où $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_{K/k}$. K/k est dite l'*extension associée à E*. Ceci est la forme provisoire de la loi d'existence (sa forme définitive sera donnée ultérieurement, en caractérisant R_k sans sortir de k).

Étant donné un sous-anneau fini positivement complet $\mathfrak{E}$ de R_k , une représentation Γ du groupe de Galois $\mathcal{G}_{K/k}$ de son extension associée K/k est irréductible si, et seulement si r_{Γ} l'est dans R_k . Les idéaux $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}' \in U_{K/k}$ seront dits *équivalents suivant E* [notation : $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}'(\mathfrak{E})$] si, pour tout $r \in \mathfrak{E}$, on a $r(\mathfrak{p}) = r(\mathfrak{p}')$. $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}'$ étant premiers, K/k a un même symbole d'Artin pour $\mathfrak{p}$ et pour $\mathfrak{p}'$ si, et seulement si $\mathfrak{p} \equiv \mathfrak{p}'(\mathfrak{E})$, car $r_{\Gamma}(\mathfrak{p}) = \Gamma(\langle K/k; \mathfrak{p} \rangle)$, et l'on a pour deux classes d'éléments conjugués X et X' de $\mathcal{G}_{K/k}$ et pour tout Γ de $\mathcal{O}(\mathcal{G}_{K/k})$, $\Gamma(X) = \Gamma(X')$ si, et seulement si $X = X'$. Ainsi, $r_1, r_2, \dots, r_s$ étant tous les éléments irréductibles de $\mathfrak{E}$ et $P_1, P_2, \dots, P_s$ étant toutes les classes d'équivalence de $U_{K/k}$ suivant $\mathfrak{E}$, si φ_{ij} est la fonction caractéristique de $r_i(\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p} \in P_j$, φ_{ij} est aussi la fonction caractéristique de $\Gamma_i(X_j)$, où $r_i = r_{\Gamma_i}$, et où $X_j = \langle K/k; \mathfrak{p} \rangle$. Ainsi, la donnée de $\mathfrak{E}$ définit les fonctions caractéristiques des $\Gamma_i(X_j)$ pour toute représentation irréductible Γ_i et pour toute classe d'éléments conjugués X_j de $\mathcal{G}_{K/k}$, donc aussi les tableaux des g_{iis} (ce qui résulte aussi de l'isomorphisme $r_{\Gamma} \rightarrow \Gamma$) et des c_{jvi} pour ce groupe, les nombres d'éléments h_j des X_j [donc aussi leur somme, égale à $(K : k)$] et les degrés l_i des Γ_i . Ceci constitue la loi d'isomorphisme. Si $\mathfrak{p} \in P_j$ et si f_j est le p. p. c. m. des ordres des $\Gamma_i(X_j) = r_i(\mathfrak{p})$, c'est-à-dire le plus petit entier f tel que, pour tout $i = 1, 2, \dots, s$ et pour tout zéro ε de φ_{ij} on ait $\varepsilon^f = 1$, $\mathfrak{p}$ se décompose dans K .

en $(K : k) : f_j$ idéaux premiers de degré f_j , ce qui constitue la loi de *décomposition*.

Soient K' une extension de k , $n' = (K' : k)$, $\mathfrak{p}$ un idéal premier (fini ou infini) de k , $\mathfrak{P}'$ un diviseur premier de $\mathfrak{p}$ dans K' , $N(\dots)$ la norme absolue, D_k , $D_{K'} = D_k' N(D_{K'/k})$ les discriminants absolus des k , K' ; $K_{\mathfrak{p}'}'/k_{\mathfrak{p}'}$ étant l'extension locale pour $\mathfrak{P}'$ de K'/k , si K'/k est galoisienne, l'extension valuée $K_{\mathfrak{p}'}'/k_{\mathfrak{p}'}$ l'est aussi, ne dépend que de $\mathfrak{p}$ et sera alors notée $(K'/k)_{\mathfrak{p}}$. Deux sous-extensions L/l et L'/l d'une extension L^* d'un corps l de nombres algébriques ou $\mathfrak{p}$ -adiques seront dites *latérales* si LL'/L et LL'/L' sont non ramifiées.

Loi de monodromie : K, K' étant deux extensions de k , dont K/k galoisienne, si, pour tout diviseur premier $\mathfrak{P}'$ de $D_{K/k}$ dans K' , $K_{\mathfrak{p}'}'/k_{\mathfrak{p}'}$ est latérale de $(K/k)_{\mathfrak{p}}$ et si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P}'$ de K' tel que $N(\mathfrak{P}') \leq |D_{K'}|^{n'^2}$, où $n' = (K' : k)$, $K_{\mathfrak{p}'}'/k_{\mathfrak{p}'}$ est une surextension de $(K/k)_{\mathfrak{p}}$, on a $K' \supseteq K$.

Démonstration. — Supposons qu'on n'a pas $K' \supseteq K$. Alors, $K^* = KK' \neq K'$ et K^*/K' est galoisienne, car K/k l'est. Donc, il existe un corps $K'' \neq K^*$ entre K' et K^* tel que K^*/K'' soit abélienne et, pour tout diviseur premier $\mathfrak{P}^*$ de $D_{K/k}$ dans K^* , on a $K_{\mathfrak{p}^*}' = K_{\mathfrak{p}'}' K_{\mathfrak{p}^*}$, donc $K_{\mathfrak{p}^*}'/K_{\mathfrak{p}'}'$ (où $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \mathfrak{P}''$ sont des idéaux premiers des K, K', K'' que $\mathfrak{P}^*$ divise) est non ramifiée et K^*/K' l'est aussi. Donc K^*/K'' et K''/K' le sont aussi et $|D_{K''}|$ est égal à $|D_{K'}|^{(K^*:K')} \leq |D_{K'}|^n$. Le groupe de Takagi $H_{K^*/K''}$ de K^*/K'' en est un de classes d'idéaux, et il existe une telle classe $C \notin H_{K^*/K''}$ et un idéal $Q'' \in C$ tel que $N(Q'') \leq |\sqrt{D_{K''}}|$; parmi les facteurs premiers de Q'' , il en existe un $\mathfrak{P}'' \notin H_{K^*/K''}$, et on a $N(\mathfrak{P}'') \leq N(Q'') \leq |D_{K'}|^{n'^2}$. Donc, si $\mathfrak{P}^*$ est un diviseur premier de $\mathfrak{P}''$ dans K^* et divise les idéaux premiers $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}'$ des K, K' on a $K_{\mathfrak{p}^*}' = K_{\mathfrak{p}'}' K_{\mathfrak{p}^*} = K_{\mathfrak{p}'}' \subseteq K_{\mathfrak{p}''}$ et $\mathfrak{P}''$ se décompose complètement dans K^* . Contre l'hypothèse, on a $\mathfrak{P}'' \in H_{K^*/K''}$. Donc $K' \supseteq K$.

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les parties réelle et imaginaire des formes minima d'une surface.* Note de M. LOUIS MANENG, présentée par M. Élie Cartan.

Les formes différentielles imaginaires, que M. V. Lalan appelle les *formes minima* ⁽¹⁾, peuvent être introduites dans l'étude des surfaces réelles sans invoquer la théorie des lignes de longueur nulle.

Soit Φ la seconde forme quadratique fondamentale d'une surface dont ds^2 désigne l'élément linéaire; le faisceau $\Phi + \lambda ds^2$ contient deux formes de rang un, et deux seulement, à savoir

$$\Phi - ads^2 \quad \text{et} \quad \Phi - cds^2,$$

a et c désignant les deux courbures principales. En effet, si l'on utilise le

(1) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 632.