

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions finies et séparables des corps valués complets : principes fondamentaux ; espaces de polynômes et transformation T ; lois d'unicité, d'ordination et d'existence.*

Note (1) de M. MARC KRASNER.

Soient k un corps valué complet, $\mathfrak{K}$ sa fermeture algébrique valuée, $|\dots|$ et $\omega(\dots)$ la valuation et l'ordre dans $\mathfrak{K}$; $\alpha \in \mathfrak{K}$, $K = k(\alpha)$, $\mathcal{J}$ domaine d'intégrité de K , $n = (K:k)$; $G_{K/k}$ l'hypergroupe de Galois (2) de K/k , $f_{\alpha/k}(x)$ le polynôme minimal de α dans k ; $v_q^{(\alpha)} [v_{m(\alpha)}^{(\alpha)} = +\infty]$, $Z_q^{(\alpha)}$, $K_q^{(\alpha)}$ le $q^{\text{ième}}$ nombre, le $q^{\text{ième}}$ hypergroupe et le $q^{\text{ième}}$ corps caractéristiques (3) de K/k en α ; Π_α le polygone de ramification (4) de K/k en α ; c_q , n_q le $q^{\text{ième}}$ nombre de ramification (5) et le nombre d'éléments du $q^{\text{ième}}$ hypergroupe de ramification (6) de K/k ; $\varphi_{K/k}(v)$ la borne sup. sur l'axe semi-réel (6) de $\varphi(\Pi_\alpha; v)$, où $\varphi(\Pi; v)$ est la fonction introduite dans ma Note précédente (7) et où α parcourt $\mathcal{J}$ [donc, si $\langle v \rangle \neq -$ et si $v_i \leq v \leq v_{i+1}$, on a $\varphi_{K/k}(v) = (n_0 - n_1)v_0 + (n_1 - n_2)v_1 + \dots + (n_i - n_{i+1})v_i + n_{i+1}v$]; C_α le plus grand cercle de centre α dans $\mathfrak{K}$ ne contenant aucun autre conjugué de α [en vertu de ma Note précédente (4), C_α est le cercle de similitude en α de la transformation holomorphe (4) $T_\alpha : x \rightarrow f_{\alpha/k}(x)$], $C_{\alpha,q}$ le cercle $|x - \alpha| < r_q^{(\alpha)} = \text{Exp}(-v_q^{(\alpha)})$; $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des polynômes normés irréductibles de x dans k , E_k l'ensemble des $f(x) \in \mathcal{E}_k$ à coefficients entiers; T l'application $\alpha \rightarrow f_{\alpha/k}(x)$ de $\mathfrak{K}$ sur $\mathcal{E}_k$, $\mathcal{E}_{k,v}$ l'ensemble des $f(x) \in \mathcal{E}_k$ de degré v ; $R(f, g)$ le résultant des $f(x), g(x) \in \mathcal{E}_k$.

PRINCIPE I. — Si $\alpha \in \mathfrak{K}$ est séparable par rapport à k , $\beta \in C_\alpha$ implique $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$.

Démonstration. — $k(\beta)$ étant complet, en vertu d'un principe de M. Ostrowski (8), les conjugués de $\beta - \alpha$ par rapport à $k(\beta)$ ont tous une même valuation; ils sont de la forme $\beta - \alpha'$, où α' est un conjugué de α par rapport à k . Si $\alpha' \neq \alpha$, on a, puisque $\alpha' \notin C_\alpha$, $|\alpha' - \alpha| > |\beta - \alpha|$ et, aussi, $|\alpha' - \alpha| \leq \text{Max}(|\beta - \alpha'|, |\beta - \alpha|) = |\beta - \alpha|$; donc $\beta - \alpha$ et, de même, $\alpha = \beta - (\beta - \alpha)$ n'a d'autre conjugué par rapport à $k(\beta)$ que lui-même, d'où, vu la séparabilité de α , $\alpha \in k(\beta)$ et $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$.

PRINCIPE II. — Si, en plus, $(k(\beta):k) \leq (k(\alpha):k)$, on a $k(\beta) = k(\alpha)$.

PRINCIPE III. — Si $\beta \in C_{\alpha, q-1}$, on a $k(\beta) \supseteq K_q^{(\alpha)}$ [$q = m(\alpha)$ donne le Principe I].

(1) Séance du 11 mars 1946.

(2) KRASNER, *Thèse, Mém. de l'Acad. de Belgique*, 11, 1937, pp. 1-110 et *Comptes rendus*, 219, 1944, pp. 345-347.

(3) KRASNER, *Comptes rendus*, 220, 1945, p. 37.

(4) KRASNER, *Comptes rendus*, 222, 1946, pp. 363-365 et 581-583.

(5) *Comptes rendus*, 220, 1945, p. 765.

(6) KRASNER, *Comptes rendus*, 219, 1944, pp. 433-435.

(7) *Comptes rendus*, 222, 1946, p. 37-40.

(8) OSTROWSKI, *Math. Zeitschrift*, 39, 1934-1935, pp. 269-320; voir pp. 298-302.

Démonstration. — Soient $K' = k(\alpha, \beta)$, $\sigma' \in G_{K'/k(\beta)}$, σ l'isomorphisme induit par σ' dans K . $\sigma\alpha - \beta = \sigma'\alpha - \beta$ est un conjugué de $\alpha - \beta$ par rapport à $k(\beta)$, donc, en vertu du principe d'Ostrowski, $\omega(\sigma\alpha - \beta) = \omega(\alpha - \beta)$ et $\omega(\sigma\alpha - \alpha)$ est $\geq \min[\omega(\sigma\alpha - \beta), \omega(\alpha - \beta)] = \omega(\alpha - \beta) > v_{q-1}^{(\alpha)}$, d'où $\sigma \in Z_q^{(\alpha)}$. Donc σ , et aussi σ' , conserve tout élément de $K_q^{(\alpha)}$ et, vu la séparabilité de $K_q^{(\alpha)}/k$, $k(\beta) \supseteq K_q^{(\alpha)}$.

Soient a un nombre réel positif; $f(x), g(x) \in \mathcal{E}_k$; n, u leurs degrés. Posons $d_a(f, g) = |R(f, g)^{a:nu}|$. En vertu de principe d'Ostrowski, $d_a(f, g)$ est égale à $|f(\beta)^{a:n}| = |g(\alpha)^{a:u}|$, où α, β sont des zéros quelconques des f, g . Si l'on considère $d_a(f, g)$ comme une distance dans $\mathcal{E}_k$, on constate qu'elle définit une ultramétrie ⁽⁶⁾ de cet ensemble, dite son *a-ultramétrie*, et $\mathcal{E}_k$ organisé par cette ultramétrie sera noté $\mathcal{E}_k^{(a)}$. $\mathcal{E}_{k,v}$ désignera désormais l'ensemble de même nom, organisé par sa v -ultramétrie. Toutes les a -ultramétries sont équivalentes ⁽⁶⁾ et définissent sur tout $\mathcal{E}_{k,v}$ une topologie équivalente à celle définie par la métrique classique de polynômes, où la distance est le maximum de celle des coefficients correspondants; en plus, le principe II montre que $\mathcal{E}_{k,v}$ est un ensemble ouvert de l'espace des polynômes de degré v avec la métrique classique. $\mathcal{E}_{k,v}$ est localement compact en même temps que k . On a, pour $\alpha, \beta \in \mathbb{A}$, $d_n(T\alpha, T\beta) = d_n(f_{\alpha/k}, f_{\beta/k}) = |f_{\alpha/k}(\beta)| = |T_\alpha\alpha - T_\alpha\beta|$; d'où, en vertu de mes Notes ⁽⁴⁾, ⁽⁷⁾, $d_n(T\alpha, T\beta) = \exp[-\varphi(\Pi_\alpha; \max \omega(\beta - \alpha'))]$, où α' parcourt les conjugués de α . En particulier, si α est séparable, T en tant qu'application de $\mathbb{A}$ dans $\mathcal{E}_k^{(n)}$, est une similitude locale en α , dont le cercle de similitude est C_α et le rapport de similitude est $|f'_{\alpha/k}(\alpha)| = |\mathfrak{D}_{K/k}^{(\alpha)}|$. Soient

$$f(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n; x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

et

$$f_{\alpha/k}(x) = f(a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0; x) \quad (a_i^0 \in k).$$

Soit $x(a_1, a_2, \dots, a_n)$ la série de Taylor en $a_1 - a_1^0, a_2 - a_2^0, \dots, a_n - a_n^0$, qui soit la solution de $f = 0$ se réduisant à α pour $a_i = a_i^0$. On montre que le domaine de convergence de cette série sur $\mathcal{E}_{k,n}$ est $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{E}_{k,n}$, où $\mathcal{U}_\alpha = TC_\alpha$, et que ses valeurs sont $\in C_\alpha$. En vertu de l'univalence de T sur C_α et du principe II, $x(a_1, \dots, a_n)$ représente le voisinage $C_\alpha \cap K$ de α dans K quand les $a_i \in k$ parcourent toutes les valeurs telles que $f(a_1, \dots, a_n; x)$ soit irréductible.

$$f(a_1, \dots, a_n; x) \rightarrow x(a_1, \dots, a_n)$$

définit une inverse de T en $(\alpha, f_{\alpha/k})$ dont $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{E}_{k,n}$ est le domaine de définition, d'univalence et de similitude.

Soient $\mathcal{E}_{K/k}^0$ l'ensemble des $f_{\beta/k}(x) [\beta \in \mathbb{A}]$ tels que $k(\beta) \supseteq K$, $\mathcal{E}_{K/k}^{(v)} = \mathcal{E}_{K/k}^0 \cap \mathcal{E}_{k,v}$ [$v \equiv 0 \pmod{n}$], $\mathcal{E}_{K/k} = \mathcal{E}_{K/k}^{(n)}$, $\mathcal{E}_{K/k}^0 = \mathcal{E}_{K/k}^0 \cap E_k$, $E_{K/k}^{(v)} = \mathcal{E}_{K/k}^{(v)} \cap E_k$, $E_{K/k} = \mathcal{E}_{K/k} \cap E_k$.

N'importe lequel de ces ensembles de polynômes de k caractérise K/k à l'isomorphie près (*loi d'unicité*), et si la valuation de k est discrète, il en est de même pour les ensembles $\overline{E}_{K/k}^{(v)}$ ou $\overline{E}_{K/k}$ des $f \in E_{k/k}^{(v)}$ ou $E_{k/k}$ dont le discriminant soit égal à celui de l'extension qu'ils définissent. On a $\mathcal{E}_{K/k}^0 \subseteq \mathcal{E}_{K/k}^0$ si, et seulement

si K/k est une surextension, à l'isomorphie près, de $\bar{K}/k$, et il en est de même pour $E_{K/k}^0$ et, si ν est un multiple commun des $(K:k)$ et $(\bar{K}:k)$, pour les $\mathcal{E}_{K/k}^{(\nu)}$, $E_{K/k}^{(\nu)}$, $\bar{E}_{K/k}^{(\nu)}$ (loi d'ordination). Soit $f(x) \star g(x) [f, g \in \mathcal{E}_k]$ l'ensemble des facteurs irréductibles dans k de $f[g(x)]$. Un $A \subseteq \mathcal{E}_k$ sera dit un *idéal* si $A \star \mathcal{E}_k = A$, et sera dit un *idéal principal* s'il existe un $\alpha \in A$ tel que $A = \alpha \star \mathcal{E}_k$. Si $A \subseteq \mathcal{E}_k$, la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une extension simple K/k telle que $A = \mathcal{E}_{K/k}^0$ est que A soit un idéal principal, et pour que K/k soit séparable, il faut et il suffit que A contienne des polynômes séparables (loi d'existence); on en tire les caractérisations évidentes pour les autres ensembles considérés.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Remarques sur les ensembles de lois.*

Note (1) de M. MICHEL LOÈVE, présentée par M. Émile Borel.

Nous indiquons ici, dans les deux premiers paragraphes, quelques remarques que nous avons exposées au Séminaire de Probabilités de M. Maurice Fréchet en 1942.

I. *Variables aléatoires au sens large.* — Soit X une variable aléatoire (v. a.) réelle, $F(x)$ sa fonction de répartition ($F(-\infty) = 0$) et $\varphi(t)$ sa fonction caractéristique (f. c.); de même à la v. a. X_n correspondront $F_n(x)$ et $\varphi_n(t)$.

On suppose, d'habitude, que X est presque certainement observable, c'est-à-dire que $q(\infty) = 1 - p(\infty) = \text{Pr}(|X| < \infty) = 1$. Or, au point de vue méthodologique, il nous semble préférable d'admettre que X peut devenir inobservable. Les v. a. ainsi généralisées seront dites v. a. *au sens large*, et l'on aura $q(\infty) \leq 1$; si $q(\infty) = 0$, la loi sera dégénérée à l'infini.

1° Les formules relatives à la composition des lois continuent de s'appliquer et cette opération ne fait pas décroître la probabilité des valeurs infinies. Pour que la composition de l'ensemble infini de lois $L \equiv \{\mathcal{L}(X_n)\}_1^\infty$, dont aucune n'est dégénérée à l'infini, ne donne une telle loi, il faut et il suffit que l'on ait $\sum p_n(\infty) < \infty$.

2° Si $F_n(x) \rightarrow F(x)$ [aux points de continuité de $F(x)$], alors $\mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ *au sens large*; si, de plus, $p_n(\infty) \rightarrow p(\infty)$, la convergence sera *stricte ou complète*.

Un ensemble L est, évidemment, toujours compact au sens large. Pour que, lorsque $n \rightarrow \infty$, $\mathcal{L}(X_n) \rightarrow \mathcal{L}(X)$ au sens large, il faut et il suffit que pour tout t donné et les valeurs $x = \xi$ de continuité de $F(x)$, supérieures à une constante finie, aussi grande que l'on veut, on ait

$$\int_{-\infty}^{\xi} e^{itx} dF_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{\xi} e^{itx} dF(x).$$

II. *Convergence complète.* — Dans le cas classique il importe de savoir reconnaître l'existence de lois limites habituelles.

(1) Séance du 11 mars 1946.