

CORRESPONDANCE.

Le Comité d'organisation des **JOURNÉES SCIENTIFIQUES DU PAIN** annonce que ces Journées, organisées par le **CENTRE NATIONAL DE COORDINATION DES ÉTUDES ET RECHERCHES SUR LA NUTRITION ET L'ALIMENTATION**, auront lieu les 27, 28 et 29 avril 1948, à l'Institut National Agronomique.

Le Président de la **SOCIÉTÉ DE CHIMIE INDUSTRIELLE** informe l'Académie que le vingt-et-unième **CONGRÈS DE CHIMIE INDUSTRIELLE** se tiendra à Bruxelles, du 11 au 19 septembre 1948.

M. **GEORGES MANGENOT** prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section de Botanique, par le décès de M. *Pierre-Augustin Dangeard*.

M. **EDGAR DOUGLAS ADRIAN**, Correspondant de l'Académie, Secrétaire pour l'Étranger de la **ROYAL SOCIETY**, M. **GUIDO CASTELNUOVO**, Correspondant de l'Académie, Président de l'**ACCADÉMIA NAZIONALE DEI LINCEI**, au nom de ces Compagnies, adressent leurs sentiments de condoléances à l'occasion du décès de M. *Alfred Lacroix*.

M. le **SECRÉTAIRE PERPÉTUEL** signale, parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

JEAN MALMEJAC. *Médecine de l'aviation. Bases physiologiques et physio-pathologiques* (présenté par M. Léon Binet).

ALGÈBRE. — *Théorie non abélienne des corps de classes pour les extensions galoisiennes des corps de nombres algébriques : f-extensions; conducteur.*

Note (*) de M. **MARC KRASNER**, présentée par M. Élie Cartan.

Je conserve les notations de mes Notes précédentes (*). K étant une extension finie d'un corps p -adique k , définie par un $f(x) \in S_k$, et $\mathfrak{J}$ étant un vrai multiple de $\mathfrak{P}_{K/k}$, on a $n(K/k; \mathfrak{J}) = H(l, L, v_{K/k}(-\log |\mathfrak{J}| : c)) s : n$, où l, L sont les nombres d'éléments des corps de restes r, R des k, K , où c est le plus petit élément positif du module de valuation $\mathfrak{M}$ de K , où $n = (K : k)$, où s est le nombre des extensions conjuguées distinctes de K/k , et où $H(l, L, a)$ est une fonction des seules variables indiquées, à savoir $H(l, L, a) = u(l, L) L^{[a]}$, où $u(l, L)$ ne dépend que des l, L , et où $[a]$ est la partie entière de a . On peut donc décider finiment si $s = 1$, autrement dit si $f(x)$ est normal.

Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ et si $\omega(\alpha - \beta) > v^{(f)}$, où $f = f_{\alpha/k}$ (autrement dit, si β est plus près de α que de ses autres conjugués), on a $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$. Donc, si α et β sont donnés

(*) Séance du 12 avril 1948.

(*) *Comptes rendus*, 225, 1947, p. 785, 973 et 1113; 226, 1948, p. 535.

comme fonctions rationnelles à coefficients dans k d'un $\gamma \in \mathbb{A}$, on a $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$ si, et seulement si il existe un polynôme $\psi(x)$ dans k de degré inférieur à celui de $f_{\beta/k}(x)$ tel que $\omega(\psi(\beta) - \alpha) > \nu^{(f)}$. Mais puisque, alors $|\psi(\beta)| = |\alpha|$, les coefficients de $\psi(x)$ sont bornés. D'autre part, si les coefficients correspondants de $\psi(x)$ et de $\psi_1(x)$ sont assez proches, on a en même temps $\omega(\psi(\beta) - \alpha) > \nu^{(f)}$ et $\omega(\psi_1(\beta) - \alpha) > \nu^{(f)}$. Ainsi, on peut décider finiment si $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$.

Soient k un corps, $k[x]$ l'anneau des polynômes en x dans k , S_k l'ensemble des polynômes normés irréductibles de $k[x]$. On sait que si $f(x) \in S_k$, l'extension K/k définie par $f(x)$ est isomorphe au corps quotient $K^{(f)}$ de $k[x]$ par son idéal premier $f(x) \cdot k[x]$. $K^{(f)}$ est dite la *f-extension* de k . On notera $(a(x); f(x))$ la classe de $a(x) \in k[x]$ suivant $f(x)$, et $K^{(f)}$ est l'ensemble de telles classes distinctes. Un $\alpha = (a(x); f(x)) \in K^{(f)}$ est dit une *f-représentation* de son polynôme minimal $f_{\alpha/k}(x)$ dans k . Si $\theta = (t(x), g(x))$ est une *g-représentation* de $f(x)$, $\alpha = (a(x); f(x)) \rightarrow \alpha^* = (a(t(x)); g(x))$ est un isomorphisme de $K^{(f)}/k$ dans $K^{(g)}/k$, dit l'*équivalence* suivant θ [notation : $\alpha \sim \alpha^*(\theta)$].

k étant un corps de nombres algébriques, soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier de k , $|\cdot|$ une des valuations équivalentes de k qui correspondent à $\mathfrak{p}$, $\bar{k}$ le complété de k par rapport à $|\cdot|$. On sait que les diviseurs premiers $\mathfrak{P}$ de $\mathfrak{p}$ dans $K^{(f)}$ [et les valuations et ordres correspondants $|\cdot|_{\mathfrak{P}}$, prolongeant $|\cdot|$, et $\omega_{\mathfrak{P}}(\cdot)$] correspondent aux facteurs premiers de $f(x)$ dans $\bar{k}$. Il existe une puissance $\mathfrak{p}^u$ de $\mathfrak{p}$ telle que ces facteurs soient incongrus (mod $\mathfrak{p}^u$), et, quel que soit $\mathfrak{p}^u$, la décomposition de $f(x)$ (mod $\mathfrak{p}^u$) peut se faire finiment. $\bar{f}(x)$ étant un de ces facteurs, on notera $\mathfrak{P}(\bar{f})$ l'idéal premier correspondant [c'est-à-dire tel que $|\bar{f}(\xi)|_{\mathfrak{P}} = 0$, où $\xi = (x, f(x))$] de $K^{(f)}$. $\bar{\alpha} = (a(x); \bar{f}(x)) \in \bar{K}$, où $\bar{K}$ est le complété de K par rapport à $|\cdot|_{\mathfrak{P}(\bar{f})}$, sera dit la $\mathfrak{P}(\bar{f})$ -composante de $\alpha = (a(x); f(x)) \in K^{(f)}$. Si $\mathfrak{P} | \mathfrak{p}$, si $\bar{\alpha}$ est la $\mathfrak{P}$ -composante de $\alpha \in K^{(f)}$, et si $z(x) = f_{\bar{\alpha}/\bar{k}}(x)$, $\varphi_z(\nu)$, $\nu^{(z)}$ et φ_z , relatives à $z \in S_{\bar{k}}$, seront notés $\varphi_{\mathfrak{P}, \alpha}(\nu)$, $\nu_{\mathfrak{P}, \alpha}$, $\varphi_{\mathfrak{P}, \alpha}$. Si ν est le degré de $a(x)$, $|\alpha|_{\mathfrak{P}(\bar{f})}$ est égal à $|a(\xi)|_{\mathfrak{P}(\bar{f})} = d_{\nu}(a(x), \bar{f}(x))$, donc se calcule finiment, car il suffit de connaître $\bar{f}(x)$ seulement mod $\mathfrak{p}^u$, pour u assez grand, près. On aura à considérer les idéaux $\mathfrak{O}$ de $K^{(f)}$ dont certains facteurs sont à l'infini, mais, afin d'éviter des complications techniques, je ne décrirai les notions qui les concernent que pour les $\mathfrak{O}$ finis, tout en les employant pour les $\mathfrak{O}$ quelconques. Si $\mathfrak{O} = \prod \mathfrak{P}^{u(\mathfrak{P})}$ est un idéal de $K^{(f)}$, on peut décider finiment si $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathfrak{O}}$ ($\alpha, \beta \in K^{(f)}$). Si $\theta \in K^{(g)}$ est une *g-représentation* de $f(x)$, on dit que $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}(\bar{g})$; où $\bar{g}(x)$ est un facteur premier de $g(x)$ dans $\bar{k}$, θ -divise $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(\bar{f})$ [$\mathfrak{P}^* | \mathfrak{P}(\theta)$] si $\bar{f}(x) = f_{\bar{\theta}/\bar{k}}(x)$, où $\bar{\theta}$ est la $\mathfrak{P}^*$ -composante de θ . Soit $e(\mathfrak{P}^*)$ l'indice du module de valuation $\mathfrak{M}(\mathfrak{P})$ de K valué par $|\cdot|_{\mathfrak{P}}$ dans celui $\mathfrak{M}(\mathfrak{P}^*)$ de $K^{(g)}$ valué par $|\cdot|_{\mathfrak{P}^*}$. $\mathfrak{O} = \prod \mathfrak{P}^{u(\mathfrak{P})}$ sera dit θ -équivalent à l'idéal

$\mathcal{O}^* = \prod \prod \mathfrak{p}^{*e(\mathfrak{p}^*)u(\mathfrak{p})} [\mathcal{O} \sim \mathcal{O}^*(\theta)]$, où le double produit est étendu aux $\mathfrak{p} | \mathcal{O}$ et aux $\mathfrak{p}^* | \mathfrak{p}(\theta)$. Un idéal $\mathcal{O}_1$ de $K^{(f)}$ est dit un *multiple strict* de $\mathcal{O}$ si, pour tout diviseur premier $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}$, $\omega_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O}_1) > \omega_{\mathfrak{p}}(\mathcal{O})$ [notation : $\mathcal{O} \| \mathcal{O}_1$].

$\mathcal{O}$ et Δ étant deux idéaux de $K^{(f)}$, on écrira, pour $\alpha, \beta \in K^{(f)}$, $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathcal{O}\{\Delta\}}$, si $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathcal{O}}$ et s'il existe un $\lambda \in k$ tel que $\lambda \equiv 1 \pmod{\mathcal{O}}$ de manière que $\lambda\beta : \alpha \equiv 1 \pmod{\Delta}$. Les classes $\pmod{\mathcal{O}\{\Delta\}}$ des nombres de $K^{(f)}$ premiers à $\mathcal{O}$ forment un groupe multiplicatif d'ordre fini, homomorphe à celui des classes $\pmod{\mathcal{O}}$.

Soient $u(\mathfrak{p})_{\alpha} = \varphi_{\mathfrak{p},\alpha}(u(\mathfrak{p}) \omega_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})) : \omega_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})$, $(\mathfrak{p}^{u(\mathfrak{p})})_{\alpha}^{\alpha} = \mathfrak{p}^{u(\mathfrak{p})_{\alpha}}$. Posons $(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha} = (\prod \mathfrak{p}^{u(\mathfrak{p})})_{\alpha}^{\alpha} = \prod (\mathfrak{p}^{u(\mathfrak{p})})_{\alpha}^{\alpha}$. Si $\mathcal{O}_2$ est premier au discriminant $D_{\alpha/k}$ de α par rapport à k , on a $(\mathcal{O}_1 \mathcal{O}_2)_{\alpha}^{\alpha} = (\mathcal{O}_1)_{\alpha}^{\alpha} \mathcal{O}_2$. α est dit *semi-congru* à $\beta \pmod{(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}}$ ou $\pmod{(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}\{\Delta\}}$ [notation : $\alpha \xrightarrow{s} \beta \pmod{(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}}$ ou $\pmod{(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}\{\Delta\}}$] quand $\alpha \equiv \beta \pmod{\mathcal{O}}$ ou $\pmod{\mathcal{O}\{\Delta\}}$. Si $n_{\mathfrak{p}}(\alpha)$ est le degré de la $\mathfrak{p}$ -composante $\alpha_{\mathfrak{p}}$ de α par rapport à $\bar{k}(\mathfrak{p} | \mathfrak{p})$, on a, en vertu de la théorie locale résumée, $\varphi_{\mathfrak{p},\alpha}(\omega_{\mathfrak{p}}(\alpha - \beta)) : n_{\mathfrak{p}}(\alpha) = \varphi_{\mathfrak{p},\beta}(\omega_{\mathfrak{p}}(\alpha - \beta)) : n_{\mathfrak{p}}(\beta) \leq -\text{Log } \alpha_1(f_{\alpha_{\mathfrak{p}}/\bar{k}}, f_{\beta_{\mathfrak{p}}/\bar{k}})$. Cette relation n'est pas, en général, symétrique, mais est réflexive et transitive. Elle devient symétrique si, pour tout $\mathfrak{p} | (\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}$, on a $n_{\mathfrak{p}}(\alpha) = n_{\mathfrak{p}}(\beta)$, auquel cas on écrira $\alpha \equiv \beta \pmod{(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}}$ ou $\pmod{(\mathcal{O})_{\alpha}^{\alpha}\{\Delta\}}$. Si $\Delta_{K^{(f)}}$ est le produit des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $K^{(f)}$ tels que $N(\mathfrak{p}) \leq \sqrt{D_{K^{(f)}}}$, on écrira, dans les semi-congruences, $(s.\text{-mod } \mathcal{O}; f)$ au lieu de $(s.\text{-mod } \mathcal{O}\{\Delta_{K^{(f)}}\})$.

Soit $\mathcal{F}_{\alpha/k}$ le produit des $\mathcal{F}_{\alpha_{\mathfrak{p}}/\bar{k}} = (\mathfrak{p}^{u_{\mathfrak{p},\alpha} \omega_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})})_{\alpha}^{\alpha} = \mathfrak{p}^{u_{\mathfrak{p},\alpha} \omega_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{p})}$, étendu aux facteurs premiers de $D_{k(\alpha)/k}$, et des idéaux à l'infini de k ramifiés dans $k(\alpha)/k$. Si f est un polynôme normal (ce qui, en vertu de la conséquence 2 de la loi de monodromie et de la théorie locale, peut être décidé finiment) et si $\mathcal{F}_{\alpha/k} \| \mathcal{F}$, $\alpha \xrightarrow{s} \beta \pmod{(\mathcal{F})_{\alpha/k}}$ entraîne, en vertu de la conséquence 5 de la loi de monodromie et de la théorie locale, $k(\beta) \supseteq k(\alpha)$. Si, en plus, $(k(\beta) : k)$ est $\leq (k(\alpha) : k)$, on a $k(\beta) = k(\alpha)$, d'où $n_{\mathfrak{p}}(\alpha) = n_{\mathfrak{p}}(\beta)$ et $\alpha \equiv \beta \pmod{(\mathcal{F})_{\alpha/k}}$.

Un $\alpha \in K^{(f)}$ est dit *f-discriminantiel* $\pmod{\mathcal{O}}$ si, pour tout idéal premier $\mathfrak{p} | \mathcal{O} \Delta_{K^{(f)}}$ de $K^{(f)}$, $f_{\alpha_{\mathfrak{p}}/\bar{k}}(x)$ est un polynôme discriminantiel de $\bar{k}$. Si α est *f-discriminantiel* $\pmod{\mathcal{F}_{\alpha/k}}$, $\mathcal{F}_{\alpha/k}$ est un idéal $\mathcal{F}_{K'/k}$, ne dépendant, aux θ -équivalences près, que de $K' = k(\alpha)$, dit *conducteur de K'/k* et égal au p. g. c. d. des $\mathcal{F}_{\beta/k}$, où β parcourt les entiers de K' .

ALGÈBRE. — Formes quadratiques dans un corps arbitraire.

Note (*) de M. FRANÇOIS CHÂTELET, présentée par M. Gaston Julia.

1. En considérant les formes quadratiques à coefficients dans un corps K , et dont les valeurs des variables sont dans K , on peut se poser les deux pro-

(*) Séance du 12 avril 1948.