M. le **MINISTRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE** invite l'Académie à lui présenter une liste de candidats à la Chaire de Zoologie (*Vers et Crustacés*) vacante au Muséum d'Histoire Naturelle.

(Renvoyé à la Section d'Anatomie et Zoologie.)

Les **SECRETAIRES DU V^e CONGRÈS INTERNATIONAL DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE** invitent l'Académie à se faire représenter à ce Congrès qui se tiendra à Cambridge, Massachusetts, du 12 au 16 septembre 1938.

ALGÈBRE. — *Définition de certains anneaux non commutatifs. Classification des extensions primitives des corps à valuation discrète.* Note de M. **MARC KRASNER**, présentée par M. Jacques Hadamard.

I. Soit Q un corps de caractéristique $p \neq 0$. Soit M un ensemble fini d'éléments d'une extension algébrique Q_1 de Q . M est bien déterminé par la donnée du polynôme $f_M(x) = \prod_{y \in M} (x - y)$. M s'appellera *module*

d'espèce (Q, a) s'il jouit des propriétés suivantes : 1° il est un module ; 2° le sur-corps $Q(M)$ de Q engendré par adjonction des éléments de M est séparable sur Q ; 3° avec un élément γ , M contient tous ses conjugués par rapport à Q ; 4° a étant un entier positif et Ω_a désignant le champ de Galois de p^a éléments (supposé contenu dans Q_1), $\Omega_a M = M$.

Si M est un module d'espèce (Q, a) , $f_M(x)$ est de la forme $\alpha_0 x + \alpha_1 x^{p^a} + \alpha_2 x^{p^{2a}} + \dots + \alpha_n x^{p^{na}}$ ($\alpha_0 \neq 0$, $\alpha_n = 1$), les α_i étant dans Q . Et à tout polynôme de cette forme correspond un module d'espèce (Q, a) .

Introduisons, pour représenter ces polynômes, un anneau $W(a, Q)$ (non commutatif, en général), contenant Q , engendré par les éléments de Q et par un élément z_a , assujéti aux relations $z_a \alpha = \alpha^{p^a} z_a$ (pour tout $\alpha \in Q$), et à aucune autre. Un $\lambda \in W(a, Q)$ non nul peut, et d'une seule manière, se mettre sous la forme $\alpha_0 + \alpha_1 z_a + \alpha_2 z_a^2 + \dots + \alpha_n z_a^n$ ($\alpha_i \in Q$, $\alpha_n \neq 0$) : n est appelé son *degré*, et λ est dit *normal* si $\alpha_n = 1$ et $\alpha_0 \neq 0$. Le degré du produit de deux éléments de $W(a, Q)$ est la somme de leurs degrés. Un $\lambda \in W(a, Q)$ s'appelle *premier* s'il ne peut pas être décomposé en produit de deux éléments de $W(a, Q)$ de degrés moindres que le sien.

Les $\lambda W(a, Q)$ peuvent être considérés comme des opérateurs de $\cap$ l'anneau (commutatif) des polynômes en x à coefficients dans Q , en posant $\lambda f(x) = \alpha_0 f(x) + \alpha_1 [f(x)]^{p^a} + \dots + \alpha_n [f(x)]^{p^{na}}$, si $\lambda = \alpha_0 + \alpha_1 z_a + \dots + \alpha_n z_a^n$.

THÉORÈME 1. — Pour qu'un polynôme $f(x)$ soit le polynôme attaché à un module M d'espèce (Q, a) , il faut et il suffit que $f(x)$ soit de la forme $\lambda_M x$, λ_M étant un élément normal de $W(a, Q)$. λ_M s'appellera le quasi polynôme de M . M' étant un autre module d'espèce (Q, a) , pour que $M' \subseteq M$ il faut et il suffit que $\lambda_{M'} = \mu \cdot \lambda_M$, avec $\mu \in W(a, Q)$. Pour que M soit simple [c'est-à-dire ne contienne aucun sous-module propre d'espèce (Q, a)], il faut et il suffit que λ_M soit premier.

II. Soient k un corps muni d'une valuation discrète et complet par rapport à cette valuation, et K une extension algébrique finie de k . Soit $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}^e$ les idéaux premiers de K, k , et soient O, o les corps de restes de K, k suivant leurs idéaux premiers (dont la caractéristique, pouvant aussi être $= o$, sera désignée par p). O/o est une extension algébrique finie, mais non nécessairement séparable. On peut, cependant, transporter ici la théorie de la ramification des idéaux premiers des corps de nombres algébriques ⁽¹⁾, en s'appuyant sur un théorème de M. Teichmüller ⁽²⁾ qu'il existe une et une seule extension non ramifiée $K_{-1}/k \subseteq K/k$ ayant pour corps de restes O/o . Désignons par $G_{Q'/Q''}$ l'ensemble des isomorphismes d'une extension Q'/Q'' , et posons $G = G_{K/k}$ et $T = G_{K/K_{-1}}$. Désignons par $\bar{\omega}(\alpha)$ et par $\omega(\alpha) = e \cdot \bar{\omega}(\alpha)$ les ordres pour $\mathfrak{p}$ et pour $\mathfrak{P}$ de α . Si $\sigma \in T$, posons $v(\sigma) = \min[\omega(\sigma\alpha - \alpha)] - 1 [\alpha \in K, \omega(\alpha) \geq 0]$. On a $v(\sigma) \geq 0$. Soient $v_0 < v_1 < \dots < v_m = +\infty$ toutes les valeurs positives prises par $v(\sigma)$. Posons de plus $v_{-1} = 0$. $v_q (-1 \leq q \leq m)$ s'appelle le q -ième nombre de ramification de K/k ; il est en général fractionnaire et son dénominateur δ_q est premier à p . L'ensemble $\check{V}^q$ des σ de T tels que $v(\sigma) \geq v_q$ s'appelle ensemble de ramification d'ordre q de K/k , et le nombre de ces éléments sera noté n_q .

Soit un $\pi \in K$ tel que $\omega(\pi) = 1$. Si $\sigma \in T$, on a $\omega(\sigma\pi - \pi) = 1 + v(\sigma)$. Soit M_q l'ensemble de toutes les classes des restes contenant un $[(\sigma\pi - \pi) : \pi^{1+v_q}]^{n_q+1} (\sigma \in \check{V}^q)$. φ_q étant l'exposant auquel appartient $\mathfrak{p}$ (mod δ_q), M_q est un module d'espèce (O, ψ_q) .

Soit $\sigma \in G$. Posons $\xi(\sigma) = \min \bar{\omega}(\sigma\alpha - \alpha) [\alpha \in K_{-1}; \bar{\omega}(\alpha) \geq 0]$. On a $\xi(\sigma) \geq 0$. Soient $\xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_r = +\infty$ toutes les valeurs positives prises par $\xi(\sigma)$ (si O/o est séparable, on a $r = 0$). On posera de plus $\xi_{-1} = 0$; $\xi_q (-1 \leq q \leq r)$ s'appelle le q -ième nombre d'inséparabilité de K/k .

⁽¹⁾ Cf. ma précédente Note, *Comptes rendus*, 200, 1935, p. 1813.

⁽²⁾ *Journal f. d. reine und angew. Math.*, 176, 1936, p. 141.

L'ensemble $Z^{(q)}$ des $\sigma \in G$ tels que $\xi(\sigma) \geq \xi_q$ s'appelle *ensemble d'inséparabilité d'ordre q de K/k* , et son nombre d'éléments se désigne par ζ_q . Le dénominateur Δ_q de $\zeta_{q+1} \zeta_q : e$ est premier à p .

Soit un $\rho \in K_{-1}$ tel que $\bar{\omega}(\rho) = o$ et que la classe de restes contenant ρ engendre O/o . Si $\sigma \in G$, on a $\bar{\omega}(\sigma\rho - \rho) = \xi(\sigma)$. $\bar{\pi} \in k$ étant tel que $\bar{\omega}(\bar{\pi}) = 1$, soit $M^{(q)}$ l'ensemble de toutes les classes de restes contenant un $[(\sigma\rho - \rho) : \bar{\pi}^{\xi_q}]^{(\zeta_{q+1}:e)} (\sigma \in Z^{(q)})$. φ_q étant l'exposant auquel appartient $p \pmod{\Delta_q}$, $M^{(q)}$ est un module d'espèce (O, φ_q) .

THÉORÈME 2. — Pour tout q ($-1 \leq q \leq r$) il existe un corps $K^{(q)}$, dit le q -ième corps d'inséparabilité de K/k , tel que $G_{K/K^{(q)}} = Z^{(q)}$. On a $(K^{(0)}:k) = (O^*:o)$, où O^*/o est le plus grand sous-corps séparable de O/o ; si $0 \leq q < r$, $(K^{(q+1)}:K^{(q)})$ est égal au nombre d'éléments de $M^{(q)}$ (donc à une puissance de p^{φ_q}); $K^{(r)} = K_{-1}$. Pour tout q ($-1 \leq q \leq m$) il existe un corps K_q , dit le q -ième corps de ramification de K/k , tel que $G_{K/K_q} = V^{(q)}$. On a $(K_{-1}:k) = (O:o)$; $(K_0:K_{-1})$ est premier à p : si $0 \leq q < m$, $(K_{q+1}:K_q)$ est égal au nombre d'éléments de M_q (donc à une puissance de p^{ψ_q}).

THÉORÈME 3. — L'extension K/k est primitive dans les cas suivants, et dans ceux-là seulement: 1° elle n'est pas ramifiée et O/o est une extension primitive; 2° on a $K^{(0)} = k$, $K^{(1)} = K$ et $M^{(0)}$ est simple; 3° $(K:k)$ est premier; 4° on a $K_0 = k$, $K_1 = K$ et M_0 est simple. Dans les cas 2° et 4° $(K:k)$ est une puissance de p . Si O/o est séparable le cas 2° ne peut pas se présenter, et si $p = o$ il en est de même pour le cas 4°.

III. Suites génératrices. — Appelons suite génératrice de K/k une chaîne de corps $k = Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset Q_s = K_1$, telle que Q_{i+1}/Q_i ($0 \leq i < s$) soit une extension primitive. La suite des degrés $(Q_{i+1}:Q_i)$ s'appellera la suite d'indices de la suite génératrice.

THÉORÈME 4. — Si $K_{-1} = k$, toutes les suites génératrices qui passent par K_0 ont la même suite d'indices, à l'ordre près.

STATISTIQUE. — Généralisation de l'inégalité de Boole.

Note (1) de M. E. J. GUMBEL, présentée par M. Émile Borel.

La fonction caractéristique $\Psi(t)$ de la distribution $w_n(x)$ des nombres x ($x = 0, 1, 2, \dots, n$) d'événements compatibles parmi n ($n \geq 2$), établie

(1) Séance du 11 octobre 1937.