Cycles de Claude

Don Knuth, Département d'informatique de Stanford

(28 février 2026 ; révisé le 2 mars 2026)

Choc ! Choc ! J'ai appris hier qu'un problème ouvert sur lequel je travaillais depuis plusieurs semaines venait d'être résolu par le modèle de raisonnement hybride Anthropic Opus 4.6 de Claude, publié trois semaines plus tôt ! Il semble que je vais devoir revoir mon opinion sur l'"IA générative" un de ces jours. Quel plaisir d'apprendre non seulement que ma conjecture a une solution élégante, mais aussi de célébrer cette avancée spectaculaire dans la déduction automatique et la résolution créative de problèmes. Je vais essayer de raconter brièvement l'histoire dans cette note.

Voici le problème, qui est apparu alors que j'écrivais sur les cycles hamiltoniens orientés pour un futur volume de *L'Art de la programmation informatique* :

> Considérons le digraphe à m^3 sommets ijk pour $0 \le i, j, k < m$, et trois arcs partant de chaque sommet, à savoir vers i^+jk, ij^+k et ijk^+, où $i^+ = (i + 1) \bmod m$. Essayez de trouver une décomposition générale des arcs en trois m^3-cycles orientés, pour tout $m > 2$.

J'avais résolu le problème pour $m = 3$ et demandé une généralisation dans le cadre de la réponse à un exercice de [3]. Mon ami Filip Stappers a relevé le défi et a découvert empiriquement des solutions pour $4 \le m \le 16$: il est donc devenu très probable que les décompositions souhaitées existent, sauf lorsque $m \le 2$.

En effet, c'est Filip qui a eu l'audace de poser cette question à Claude, en utilisant exactement les termes ci-dessus. Il a également donné des conseils/un accompagnement (un prompt), demandant à Claude de résumer ses progrès en cours :

> *** Après CHAQUE exécution d'exploreXX.py, mets IMMÉDIATEMENT à jour ce fichier [`plan.md`] avant toute autre action.** Aucune exception. Ne commence pas l'exploration suivante tant que la précédente n'est pas documentée ici.*

Et le plan d'attaque de Claude était tout à fait admirable. Il a d'abord reformulé le problème : "Besoin de sigma : $Z_m^3 \to S_3$, assignant une permutation de $\{0, 1, 2\}$ à chaque sommet ; le cycle c au sommet v va dans la direction sigma$(v)[c]$. Chaque digraphe fonctionnel résultant doit être un cycle hamiltonien unique." Ensuite, il a cherché une réponse simple : "Si sigma est cyclique, c'est-à-dire $f_c(v) = (c + g(v)) \bmod 3$ pour un certain $g : Z_m^3 \to Z_3$, alors nous n'avons besoin que d'une seule fonction g. Ai testé la fonction linéaire $g(a \cdot i + b \cdot j + c \cdot k) \bmod 3$ et des variantes quadratiques. *Aucune fonction g linéaire ou quadratique simple ne fonctionne.*"

La deuxième exploration de Claude était ce qu'il appelait une tentative de recherche DFS [1] (recherche en profondeur d'abord) : "Tentative de recherche DFS par force brute sur les affectations sigma pour $m = 3$ (espace de recherche de 6^{27}). Trop lent sans un bon élagage."

1. pour Depth First Search.

Troisièmement, il a essayé ce qu'il appelait une analyse serpentine 2D : "Résultat-clé 2D : Le motif $[0^{m-1}1]^m$ donne un cycle hamiltonien dans $\mathrm{Cay}(Z_m^2\{e_0, e_1\})$ pour $m = 3$. Son complément fonctionne également, donnant une décomposition 2D valide." C'est vraiment impressionnant ! Claude a d'abord reconnu le digraphe comme un digraphe de Cayley avec deux générateurs, traditionnellement appelés e_0 et e_1 ; un mathématicien comprendra que les arcs agissent comme un groupe sur m^2 sommets, où e_0 incrémente la première composante tandis que e_1 incrémente la seconde. Ensuite, il a formulé le cycle symboliquement pour m quelconque, bien que pour une raison quelconque, il ait encore dit qu'il ne regardait que $m = 3$. Et il a décidé d'appeler cela un "motif serpentin" !

L'exploration numéro 4 a construit le "motif serpentin 3D" $[0^{m-1}1]^{m-1}[0^{m-1}2]^m$. (Il s'agit d'une erreur typographique pour $[[0^{m-1}1]^{m-1}0^{m-1}2]^m$. C'est une séquence classique appelée "code Gray modulaire m-aire" à la page 299 de [2].) Après avoir supprimé ce cycle du graphe, Claude a examiné le digraphe 2-régulier restant et a constaté qu'il avait une "structure rigide rendant la décomposition difficile".

Néanmoins, l'exploration numéro 5 a analysé ce digraphe résiduel, trouvant quelques cycles. Malheureusement, ils n'ont pas fonctionné.

Retour à la case départ. Plusieurs autres approches ont été essayées, par exemple en examinant les choix à faire aux sommets situés sur l'hyperplan où $i + j + k$ est congru à 1. Rien de prometteur n'est apparu jusqu'à l'exploration numéro 15, qui a introduit ce que Claude a appelé une *décomposition en fibres* : "L'application quotient $?(i, j, k) = i + j + k \bmod m$ transforme tous les arcs de la fibre F_s en arcs de la fibre F_{s+1}. Le digraphe est stratifié. En coordonnées de fibre (i, j) avec $k = (s - i - j) \bmod m$."

En utilisant ces coordonnées de fibre, le problème pouvait maintenant être reformulé comme le choix, pour chaque (i, j, s), d'une permutation des trois opérateurs qui décalent (i, j) de $(1, 0), (0, 1)$ ou $(0, 0)$. "Ai essayé sigma dépendant uniquement de l'indice de fibre s (rotation de s) : cela donne le motif $(i + j + k) \bmod 3$ qui ne fonctionne pas. Une recherche locale aléatoire a trouvé des solutions pour $m = 3$, mais aucun motif général n'a émergé."

Exploration 18 : "ai implémenté le cadre complet des fibres sous forme de code exécutable. Un retour arrière exhaustif pour $m = 3$ a trouvé une décomposition valide en 0,1 s (10 932 nœuds)." Dans cette solution, le sigma de permutation était le même pour tous les (i, j) dans les fibres 0. Une fibre "uniforme" similaire a été trouvée pour $m = 4$ par recuit simulé, dans le cadre de l'exploration 20.

Dans l'exploration 21, Claude s'est rendu compte que la fonction serpentine 2D "$Q(i, j) = (i+1, j)$ si $i + j \neq m - 1 \bmod m$, sinon $(i, j + 1)$" avait de belles propriétés. Elle semblait prometteuse lorsqu'un choix uniforme est fait à la fibre 0 et qu'on utilise une version de la serpentine à toutes les autres fibres, si et seulement si m est impair.

Cela a déclenché une série d'expériences de recuit simulé "à grande échelle" ; mais tout cela n'a servi à rien. La conclusion après l'exploration 25 était : "Le recuit simulé peut trouver des solutions, mais ne peut pas fournir une construction générale. Il faut des mathématiques pures."

Claude a donc adopté une nouvelle approche. À un moment donné, il s'est dit : "Peut-être que le bon cadrage est le suivant : ne pas penser en fibres, mais réfléchir directement à ce qui constitue un cycle hamiltonien."

Il y a eu un incident évité de justesse lors de l'exploration numéro 27. "Prenez la serpentine 3D pour le cycle 0, appliquez une rotation de coordonnées cyclique pour obtenir les cycles 1 et 2 : $d_1(i,j,k) = (d_0(j,k,i)+1) \bmod 3$; $d_2(i,j,k) = (d_0(k,i,j)+2) \bmod 3$; les trois sont individuellement hamiltoniens pour chaque $m = 3..9$ testé ! Seuls $3(m-1)$ sommets sur m^3 présentent des conflits, tous situés sur l'hyperplan $i+j+k = m-1 \bmod m$."

Malheureusement, ces conflits n'ont pas pu être résolus. L'exploration 29 a prouvé que de nombreux scénarios plausibles étaient en fait impossibles. "Cela anéantit complètement l'approche "hyperplan unique + rotation". Nous devons permettre à la fonction de direction d'utiliser différentes valeurs le long d'une orbite de rotation."

Mais, aha. L'exploration 30 est revenue à la solution trouvée par SA dans l'exploration 20 et a remarqué que le choix à chaque fibre ne dépend que d'une seule coordonnée : pour $s = 0$, le choix dépend uniquement de j ; pour $s = 1$ et $s = 2$, le choix dépend uniquement de i. Cela a conduit à une construction concrète (exploration 31), sous la forme d'un programme Python, qui a produit des résultats valides pour $m = 3, 5, 7, 9$ et 11 - hourra ! "Les trois cycles sont hamiltoniens, tous les arcs sont utilisés, décomposition parfaite !"

Voici une simplification de ce programme Python, converti en C :

```
int c,i,j,k,m,s,t;
char *d;
for (c=0;c<3; c++) {
  for (t=i=j=k=0;; t++) {
    printf ("%x%x%x",i,j,k);
    if (t==m*m*m) break;
    s=(i+j+k) % m;
    if (s == 0) d = (j == m-1? "012": "210");
    else if (s == m-1) d = (i > 0? "120": "210");
    else d = (i == m-1? "201": "102");
    switch (d[c]) {
      case '0': i = (i+1) % m; break;
      case '1': j = (j+1) % m; break;
      case '2': k = (k+1) % m; break;
    }
  }
  printf("\n");
}
```

Filip Stappers a testé le programme Python de Claude pour tous les m impairs compris entre 3 et 101, trouvant des décompositions parfaites à chaque fois. Il a donc conclu, tout à fait raison-

nablement, que le problème était effectivement résolu pour les valeurs impaires de m. Et il m'a rapidement envoyé la nouvelle choquante.

Bien sûr, une preuve rigoureuse était encore nécessaire. Et la construction d'une telle preuve s'avère assez intéressante. Prenons, par exemple, le premier cycle qui est imprimé ; nous devons prouver qu'il a une longueur m^3.

La règle de ce cycle est non triviale, mais assez simple : soit $s = (i + j + k) \bmod m$.

$$\text{Lorsque } s = 0, \quad \text{incrémenter } i \text{ si } j = m - 1, \text{ sinon incrémenter } k.$$

$$\text{Lorsque } 0 < s < m = 1, \quad \text{incrémenter } k \text{ si } i = m - 1, \text{ sinon incrémenter } j.$$

$$\text{Lorsque } s = m = 1, \quad \text{incrémenter } j \text{ si } i > 0 \text{ sinon incrémenter .}$$

("Incrémenter" signifie "augmenter de 1, mod m".) Par conséquent, dans le cas particulier $m = 3$ ce cycle est le suivant :

$$\begin{aligned}&022 \to 002 \to 000 \to 001 \to 011 \to 012 \to 010 \to 020 \to 021 \to\\ &121 \to 101 \to 111 \to 112 \to 122 \to 102 \to 100 \to 110 \to 120 \to\\ &220 \to 221 \to 201 \to 202 \to 200 \to 210 \to 211 \to 212 \to 222 \to 022.\end{aligned}$$

Et dans le cas particulier $m = 5$, le cycle est les suivant :

$$\begin{aligned}&042 \to 002 \to 012 \to 022 \to 023 \to 024 \to 034 \to 044 \to 004 \to 000 \to 001 \to 011 \to 021 \to\\ &031 \to 032 \to 033 \to 043 \to 003 \to 013 \to 014 \to 010 \to 020 \to 030 \to 040 \to 041 \to\\ &141 \to 101 \to 111 \to 121 \to 131 \to 132 \to 142 \to 102 \to 112 \to 122 \to 123 \to 133 \to 143 \to\\ &103 \to 113 \to 114 \to 124 \to 134 \to 144 \to 104 \to 100 \to 110 \to 120 \to 130 \to 140 \to\\ &240 \to 200 \to 210 \to 220 \to 230 \to 231 \to 241 \to 201 \to 211 \to 221 \to 222 \to 232 \to 242 \to\\ &202 \to 212 \to 213 \to 223 \to 233 \to 243 \to 203 \to 204 \to 214 \to 224 \to 234 \to 244 \to\\ &344 \to 304 \to 314 \to 324 \to 334 \to 330 \to 340 \to 300 \to 310 \to 320 \to 321 \to 331 \to 341 \to\\ &301 \to 311 \to 312 \to 322 \to 332 \to 342 \to 302 \to 303 \to 313 \to 323 \to 333 \to 343 \to\\ &443 \to 444 \to 440 \to 441 \to 401 \to 402 \to 403 \to 404 \to 400 \to 410 \to 411 \to 412 \to 413 \to\\ &414 \to 424 \to 420 \to 421 \to 422 \to 423 \to 433 \to 434 \to 430 \to 431 \to 432 \to 442 \to 042.\end{aligned}$$

Les triplets pour une même valeur de s sont espacés exactement de m étapes. Pour prouver que les m^3 triplets apparaissent, nous devons prouver que les m^2 triplets pour toute valeur donnée de s sont tous présents.

Remarquez que la première coordonnée, i, ne change que lorsque $s = 0$ et $j = m - 1$. Ainsi, les m^2 triplets avec une valeur donnée de la première coordonnée i se produisent tous consécutivement. (Nos exemples de cycles l'indiquent en commençant au sommet où i vient de passer à 0, au lieu de commencer au sommet 000.)

Remarquez que les éléments du cycle avec $i = 0$ doivent en général commencer par le sommet $0(m-1)2$, car le sommet précédent devait avoir $i = j = m - 1$ et $s = 0$. Et $0(m-1)2$, qui a $s = 1$, est suivi en général par $002, 012, \ldots, 0(m-3)2, 0(m-3)3$, nous ramenant à $s = 0$.

En général, $0(m-k)k$ est immédiatement suivi de $0(m-k)(k+1)$ lorsque $1 < k < m$; puis j augmente jusqu'à ce que nous atteignions $0(m-k-2)(k+1)$, dont le successeur est $0(m-k-2)(k+2)$. Ainsi, k est incrémenté de 2, modulo m, chaque fois que nous rencontrons un sommet avec $s = 0$. Puisque m est impair, nous finirons par arriver à $0(m-1)1$, auquel cas nous aurons vu tous les m^2 sommets de la forme $0jk$. Et le successeur de $0(m-1)1$ est $1(m-1)1$.

Jusqu'ici tout va bien ! En général, les éléments du cycle dont la première composante i satisfait $0 < i < m-1$ commenceront par $i(m-1)(2-i)$, où $2-i$ est bien sûr évalué modulo m. Si tout se passe bien, ces éléments devraient inclure tous les m^2 sommets qui commencent par i, se terminant par $i(m-i)(1-i)$, dont le successeur est $(i+1)(m-1)(1-i)$. Et tout se passe bien : nous avançons la deuxième composante de manière répétée, sauf lorsque $s = 0$; par conséquent, les sommets que nous voyons lorsque $s = 0$ sont $i(m-2)(2-i), i(m-3)(3-i), \ldots, i0(m-i), i(m-1)(1-i)$.

Finalement, nous atteignons $(m-1)(m-1)3$, le premier sommet pour lequel $i = m-1$. Les règles locales changent à nouveau : désormais, nous avancerons la troisième composante de manière répétée, sauf lorsque $s = m-1$. Les sommets que nous voyons lorsque $s = 0$ sont $(m-1)01, (m-1)10, ...(m-1)(m-1)2$. CQFD.

Nous avons maintenant prouvé que le premier cycle (le cycle "for $c = 0$" dans le programme C) est hamiltonien. Des preuves similaires peuvent être effectuées pour les deux autres cycles. (Voir l'annexe.)

Pour le plaisir, considérons une classe plus large de cycles pour lesquels de telles preuves existent. En effet, il s'avère qu'il existe des centaines de façons de résoudre le problème de décomposition énoncé pour m impair ; Claude Opus 4.6 en a découvert une seule, en déduisant où chercher.

On dira qu'un cycle hamiltonien C de forme 3 est généralisable si la construction suivante donne un cycle hamiltonien pour tout m impair ≥ 3 : "Étant donné un sommet arbitraire IJK pour $0 \leq I, J, K < m$, soient $i = I', j = J', s = S'$ et $k = (s-i-j) \bmod 3$, où $S(I+J+K) \bmod m, 0' = 0, (m-1)' = 2$ et $x' = 1$ pour $0 < x < m-1$. On obtient le successeur de IJK en décalant la coordonnée que le cycle C décale lors de la formation du successeur de ijk." Par exemple, si $m = 5$ et $IJK = 301$, on a $i = 1, j = 0, S = 4, s = 2, k = 1$. Le successeur de 301 sera donc soit 401, soit 311, soit 302, selon que C contienne ou non l'arc $101 \to 201, 101 \to 111$ ou $101 \to 102$.

Le cycle de Claude dans l'exemple ci-dessus pour $m = 3$ est généralisable ; en effet, nous avons vu sa généralisation pour $m = 5$. Mais il est facile de trouver des cycles qui ne sont pas généralisables. Par exemple, si C est le cycle

$$000 \to 001 \to 002 \to 012 \to 010 \to 011 \to 021 \to 022 \to 020 \to 120 \to 100 \to 101 \to 111 \to 121 \to$$
$$122 \to 102 \to 112 \to 110 \to 210 \to 211 \to 212 \to 222 \to 220 \to 221 \to 201 \to 202 \to 200 \to 000$$

(qui se trouve être le plus petit lexicographiquement de tous les cycles hamiltoniens pour le cas

$m = 3$), nous obtenons la "généralisation" suivante pour $m = 5$:

$$000 \to 001 \to 002 \to 003 \to 004 \to 014 \to 010 \to 011 \to 012 \to 013 \to 023 \to 024 \to 020 \to$$
$$021 \to 022 \to 032 \to 033 \to 034 \to 030 \to 031 \to 041 \to 042 \to 043 \to 044 \to 040 \to 140 \to$$
$$100 \to 101 \to 102 \to 103 \to 113 \to 123 \to 124 \to 120 \to 121 \to 221 \to 231 \to 232 \to 233 \to$$
$$234 \to 334 \to 344 \to 340 \to 341 \to 342 \to 302 \to 312 \to 313 \to 314 \to 310 \to 410 \to 411 \to$$
$$412 \to 413 \to 414 \to 424 \to 420 \to 421 \to 422 \to 423 \to 433 \to 434 \to 430 \to 431 \to 432 \to$$
$$442 \to 443 \to 444 \to 440 \to 441 \to 401 \to 402 \to 403 \to 404 \to 400.$$

Oups, ce cycle a une longueur de 75, et non de 125.

Il s'avère qu'il existe exactement 11 502 cycles hamiltoniens pour $m = 3$, dont exactement 1 012 se généralisent en cycles hamiltoniens de forme 5. De plus, exactement 996 d'entre eux se généralisent en cycles hamiltoniens pour $m = 5$ et $m = 7$. Et ces 996 sont en fait généralisables à tous les m impairs > 1.

Voici le point essentiel : disons qu'une décomposition est "de type Claude" si elle peut être générée par un programme C comme celui ci-dessus, dans lequel les permutations d de $\{0, 1, 2\}$ dépendent uniquement du fait que i, j et s soient égaux à 0 ou à $m - 1$. Aucun cas particulier autre que 0 et $m - 1$ n'est autorisé à affecter le choix de d.

Théorème. *Une décomposition de type Claude est valide pour tout m impair > 1 si et seulement si chacune des trois séquences qu'elle définit pour $m = 3$ est généralisable.*

Démonstration. Si ces trois suites ne sont pas hamiltoniennes, ou si elles ne se généralisent pas aux cycles hamiltoniens pour tout m impair > 1, elles ne définissent certainement pas une décomposition valide. Inversement, si ce sont des cycles hamiltoniens qui se généralisent aux cycles hamiltoniens pour tout m impair > 1, elles sont certainement valides : chaque sommet ijk apparaît dans chacun des trois cycles, et ses trois arcs sortants sont partitionnés correctement car d est une permutation. □

En établissant un problème de couverture exact, en utilisant les 11502 cycles hamiltoniens pour $m = 3$, nous pouvons déduire qu'il existe exactement 4554 solutions au problème de décomposition $3 \times 3 \times 3$. De la même manière, si nous étudions toutes les façons de couvrir chaque aire en utilisant seulement trois des 996 cycles généralisables, nous constatons que 760 de ces 4554 solutions impliquent uniquement des cycles généralisables – environ un sur six. Par conséquent, le théorème nous indique qu'il existe exactement 760 décompositions de type Claude valides pour tout m impair > 1.

Peut-être que la décomposition trouvée par Claude n'était pas la "plus élégante" de ces 760. Pouvons-nous faire mieux ? J'en ai examiné plusieurs et j'ai constaté qu'elles ont des comportements quelque peu différents. Pourtant, je n'en ai trouvé aucune qui soit réellement plus élégante.

La dépendance à i, j et s signifie que ces décompositions n'ont pas de symétrie cyclique. J'ai remarqué, à ma grande surprise, que 136 des 760 cycles $3 \times 3 \times 3$ généralisables restent généralisables lorsqu'on transforme ijk en jki. Cependant, aucun n'est commun aux trois transformations

(ijk, jki, kij).

Filip m'a dit que les explorations rapportées ci-dessus, bien que finalement réussies, ne se sont pas déroulées sans accroc. Il a dû redémarrer à plusieurs reprises lorsque Claude s'est arrêté sur des erreurs aléatoires ; certains résultats de recherche précédents ont alors été perdus. Après chaque exécution de deux ou trois programmes de test, il a dû rappeler à Claude à plusieurs reprises qu'il était censé documenter soigneusement sa progression.

Un succès éclatant pour m impair, à l'exploration numéro 31, est survenu environ une heure après le début de la session.

Ce problème de décomposition reste ouvert pour les valeurs paires de m. Le cas $m = 2$ a été prouvé impossible il y a longtemps [1]. Dans le cadre de l'exploration numéro 24, Claude a déclaré avoir trouvé des solutions pour $m = 4, m = 6$ et $m = 8$; pourtant, il ne voyait aucun moyen de généraliser ces résultats.

Filip m'a également dit qu'il avait demandé à Claude de continuer sur le cas pair après que le cas impair ait été résolu. "Mais au bout d'un moment, il a semblé se bloquer. Finalement, il n'était même plus capable d'écrire et d'exécuter correctement les programmes d'exploration, très étrange. J'ai donc arrêté la recherche."

Dans l'ensemble, cependant, il s'agissait certainement d'une réussite impressionnante. Je pense que l'esprit de Claude Shannon est probablement fier de savoir que son nom est maintenant associé à de telles avancées. Chapeau à Claude !

Annexe. Le deuxième cycle de Claude ($c = 1$) est régi par les règles suivantes : "Si $s = 0$, incrémenter j. Si $0 < s < m + 1$, incrémenter i. Si $s = m - 1$ et $i > 0$, incrémenter k. Si $s = m - 1$ et $i = 0$, incrémenter j."

Nous pouvons montrer que les sommets avec $s = 0$ sont vus dans l'ordre suivant : $k = 0, 1, \ldots, m-1$: $0k(-k), (-2)(1+k)(1-k), (-4)(2+k)(2-k), \ldots, 2(-1+k)(-1-k)$. Et cela établira l'ordre dans lequel les sommets avec $s = 1, 2, \ldots, m - 1$ sont vus.

Le troisième cycle de Claude ($c = 2$) est régi par des règles un peu plus complexes : "Si $s = 0$ et $j < m - 1$, incrémenter i. Si $s = 0$ et $j = m - 1$, incrémenter k. Si $0 < s < m - 1$ et $i < m - 1$, incrémenter k. Si $0 < s < m - 1$ et $i = m - 1$, incrémenter j. Si $s = m - 1$, incrémenter i.

Les sommets avec $s = 0$ et $j < m - 1$ sont vus dans l'ordre suivant : $0j(-j), 2j(-2 - j), 4j(-4 - j) \ldots (-2)j(2-j)$. Et les successeurs du dernier sommet sont $(-1)j(2-j), (-1)(j+1)(2-j), (-1)(j+2)(2 - j), \ldots, (-1)(j - 2)(2 - j), 0(j - 2)(2 - j)$.

Mais les sommets avec $s = 0$ et $j = m-1$ sont vus ainsi : $0(-1)1, 1(-1)0, 2(-1)(-1), \ldots, (-1)(-1)2$. Et les successeurs du dernier sommet sont $(-1)(-1)3, (-1)03, (-1)13, \ldots, (-1)(-3)3, 0(-3)3$.

Ainsi, dans tous les cas, la séquence de m sommets pour $s = 0$ et un j donné est suivie de la

séquence pour $s = 0$ et $j - 2$ modulo m.

Références.

[1] Jacques Aubert and Bernadette Schneider, "Graphes orientés indécomposables en circuits hamiltoniens." Journal of Combinatorial Theory B32 (1982), 347-349.

[2] Donald E. Knuth, The Art of Computer Programming, Volume 4A : Combinatorial Algorithms, Part 1 (Upper Saddle River, N. J. : Addison-Wesley, 2011), xvi+883 pp.

[3] Donald E. Knuth, brouillons préliminaires intitulés "Hamiltonian paths and cycles", actuellement disponibles à l'adresse https://cs.stanford.edu/knuth/fasc8a.ps.gz et régulièrement mis à jour au fur et à mesure de l'accumulation de nouveaux éléments.