Comment mal écrire les mathématiques ?
Jean-Pierre Serre

(Jean-Pierre Serre s'adresse aux personnes en charge de l'organisation, à propos de l'effaçage du tableau noir. Il faut que je compte quelque chose. Oui, je ne veux pas utiliser ça).

Alors, peut-être devrais-je expliquer avant de commencer qu'on m'a demandé de parler de la rédaction mathématique, probablement avec l'idée que je devrais expliquer comment bien écrire des mathématiques.

J'ai donc dit à Taylor que c'était un peu difficile et présomptueux aussi. Mais d'un autre côté, je me considère comme un expert sur la façon de mal écrire des mathématiques. Donc, ce que je veux décrire aujourd'hui, c'est comment on écrit mal des mathématiques. (*Rires*). Alors, peut-être qu'en adoptant votre propre point de vue, vous y parviendrez à faire mieux. Imaginons donc quelqu'un qui veut absolument se débarrasser du théorème qu'il a démontré. Il veut le publier. Homme ou femme, peu importe. Il veut le publier le plus vite possible. Peu lui importe qu'il ne soit pas lu ou compris, et il préférerait peut-être même ne pas être compris. Alors, que fait-il ? Eh bien, il doit d'abord choisir un titre qui ne donne absolument aucune information. Par exemple, il peut dire "Démonstration du théorème de untel" et ensuite choisir soit une personne absolument inconnue pour que l'on ne sache pas de quoi il s'agit, soit dire "Démonstration d'un théorème de... Euler". (*Rires*). Je veux dire, les deux choses sont essentiellement équivalentes, elles ne donnent aucune information. Ensuite, il doit commencer par énoncer son théorème. Enfin, il l'appellera son théorème principal. De nos jours, vous voyez, les théorèmes sont indexés par des chiffres comme deux, trois, quatre, etc. Donc, personne ne vérifiera qu'il n'y a qu'un seul théorème dans l'article. On peut toujours l'appeler le théorème principal. Et quelle notation utilise-t-il ? C'est pourquoi il utilise des notations qu'il a en tête, et il croit que chaque lecteur connaîtra sa notation. Donc, il dira mon théorème principal, je ne sais pas, par exemple : "Un $Fpph$ ATT est régulier", je veux dire, et il croit que si vous ne savez pas ce que sont ATT et $Fpph$, bien sûr, il a fait une faute de frappe, vous voyez, il voulait écrire $Fppf$, mais mettre une faute de frappe dans le théorème le rend encore plus difficile à comprendre. Quant à la régularité, il a raison sur ce point. La régularité est bien définie en mathématiques. Elle est si bien définie qu'il existe une vingtaine de définitions différentes. Donc, c'est parfait. Il commence donc par là. Il craint peut-être le correcteur.

Le correcteur pourrait lui demander une référence pour ATT, voire pour $Fpph$. Dans ce cas, John/Joan (ou quel que soit son nom) attendra au moins une ou deux pages avant de fournir une référence pour ATT ou $Fpph$, et cette référence sera soigneusement choisie. En fait, lorsqu'on donne une référence et qu'on ne souhaite pas qu'elle soit vérifiable, on procède comme suit : on cite un ouvrage volumineux de 600 pages, sans autre précision. Même pour un théorème d'Euler, on peut se référer à l'œuvre complète d'Euler, puisqu'elle n'est pas encore publiée intégralement. Mais si l'on cite SGA ou EGA (rires), on a également de fortes chances d'être refusé. Mais en parlant de références, il y a une façon de procéder qui est imbattable, bien meilleur que ce que je viens de dire.

Référence : How to write mathematics badly ? https://www.youtube.com/watch?v=tJZpdXWm4Gg.
Transcription en LaTeX : Denise Vella-Chemla, janvier 2026.

Vous écrivez ceci : "Pour la définition de ATT, voir [H]" et ensuite, si vous regardez dans la bibliographie, vous trouverez "[H] : D. Hilbert, communication privée." *(Rires).* Actuellement, les bibliographies regorgent de références de ce genre, impossibles à vérifier pour qui que ce soit (le nom de Hilbert est une plaisanterie), mais c'est exactement la même chose : elles devraient figurer dans la bibliographie.

Voilà comment on commence. Je veux dire, on commence par ne pas expliquer les notations, et quand on les explique, on fait des références impossibles. Après ça, eh bien, il faut commencer la démonstration, mais il existe de nombreuses façons de la rendre difficile à suivre. On peut utiliser certaines astuces typographiques pour se compliquer la vie. J'aime bien donner un exemple. Voyons voir. "Nous avons $f(x) = \sin x \cdot \cos x$. $\cos x$ étant continue, etc." On a donc des points qui jouent leur rôle habituel de séparateurs, et on a aussi ces points-là. C'est assez déroutant, mais très facile à arranger car, bien sûr, on peut toujours insérer "la fonction" avant la deuxième occurrence de cos. Et si on veut, on peut se rappeler de ne jamais commencer une phrase par un symbole. Je veux dire, j'avais un secrétaire à qui je dictais mes articles qui refusait catégoriquement de le faire. Quand une phrase commençait par f, je l'entendais crier. C'est donc très facile de se le mettre en tête. Voilà une chose que vous pouvez faire. Que pouvez-vous faire d'autre pour vous compliquer la vie ?

La vie est compliquée, mais elle peut aussi être plus simple pour vous, si vous utilisez ces astuces. Elle est alors compliquée pour le lecteur, et simple pour vous. Voyez-vous, une mauvaise écriture est, comme je l'ai dit, facile pour l'auteur, et le vrai travail incombe au lecteur.

Alors, comment parvenir à se simplifier ? Par une méthode qui frôle la triche ; ce n'est pas vraiment de la triche au sens où un mathématicien ne cherche généralement pas à tricher, mais plutôt à faciliter la tâche du lecteur. Alors, que faire ? Eh bien, il y a plusieurs solutions.

L'une d'elles est assez sérieuse. La voici : vous rédigez votre démonstration, vous écrivez "Lemme 1 : ..." ou un nombre quelconque, je veux dire avec un système classique, puis quelque chose d'assez simple, et vous donnez une démonstration complète.

Ensuite, vous faites "Lemme 2 : même chose". Puis vous obtenez le "Lemme 3". Et vous avez ici rassemblé toutes les difficultés du théorème, tous les calculs, ils se trouvent tous dans le lemme 3.

Soit vous dites, en toute honnêteté, "Lemme 3 : c'est un calcul.", soit vous dites simplement : "Cela découle des définitions." (*Rires*). Franchement, c'est imbattable. Ou n'importe quoi d'autre. Mais il y a une chose que je recommande vraiment, si vous voulez vraiment compliquer la vie du lecteur : écrivez "Lemme 3 :", puis faites exactement cela : "Lemme 3 : $\square$". *(Rires).*

Voyez, ce symbole a été inventé. Je ne le connaissais pas quand j'étais étudiant, il a été inventé une vingtaine d'années plus tard. C'est extrêmement pratique pour tricher. Avant, il fallait écrire quelque chose comme ceci : (montrant ce qu'il a écrit pour les deux premiers lemmes). Il fallait donc au moins expliquer pourquoi on ne fournissait pas de preuve. Mais aujourd'hui, il suffit de taper ce joli symbole et plus personne ne pose de questions.

C'est donc une forme de triche. C'est une question de style, pour ainsi dire. Mais il y a aussi des choses plus graves, je pense. Par exemple, l'utilisation de la grammaire, notamment anglaise, de manière peu honnête. Un exemple typique : le théorème 1. On le trouve très fréquemment dans les articles scientifiques. Théorème 1 : Il existe un isomorphisme $f : X \to Y$ avec X et Y... On présente ce théorème et on démontre l'existence de cet isomorphisme, ou on en fait une démonstration quelconque. Et immédiatement après, on affirme : Théorème 2 : f est continue, ou quelque chose du genre. Où est le problème ?

Vous voyez, le problème réside dans le fait que vous manipulez essentiellement un isomorphisme, puisque vous utilisez l'article indéfini. Et ici, si vous voulez vraiment l'écrire correctement, car j'ai commencé par le symbole f, mon dactylo aurait hurlé, j'aurais donc dû écrire "L'application f...", et si vous prétendez être précis, vous devez écrire "L'application du théorème 1", ce qui n'a absolument aucun sens ; vous trouvez cela dans de nombreux articles et cela ne veut rien dire, car le premier théorème affirme que l'ensemble des isomorphismes n'est pas vide. Vous voyez, cela est absolument équivalent ($\iff$) à dire $\mathrm{Isom}(X, Y) \neq \varnothing$, et ensuite vous prétendez avoir un f, c'est-à-dire que vous avez choisi quelque chose. En réalité, la plupart du temps, ce n'est pas de la triche à proprement parler, car la démonstration du théorème fournit parfois un f, et c'est celui-ci. Dans ce cas, il faudrait préciser "l'application de la démonstration du théorème 1", mais bien souvent, on ne dispose même pas de cette application. Cependant, le passage de l'article indéfini à l'article défini permet d'affirmer des choses que l'on n'a en fait pas du tout démontrées. Et même, parfois, on peut affirmer des choses totalement dénuées de sens. Par exemple, on pourrait dire : "L'application f du théorème 1 coïncide avec celle définie par, disons, au hasard, Euler, etc." Or, comme on ne l'a pas bien définie... Ce genre de situation s'est produit dans de nombreuses théories très différentes. Parfois, on ne peut pas faire grand-chose : on peut prouver l'existence d'un isomorphisme, mais sans obtenir une valeur précise. Parfois, comme dans la théorie de Langlands, on cherche à établir une bijection entre la représentation d'un certain type et celle d'un autre. Je me souviens de cours où les élèves affirmaient : "Il existe une bijection." Je leur demandais alors : "Vous voulez dire que ces deux ensembles ont le même cardinal ?" Évidemment, ce n'était pas du tout ce qu'ils voulaient dire. Mais à l'époque, ils étaient incapables de définir précisément les propriétés d'une bijection. Mais au moins, vous devriez être conscient que lorsque vous affirmez quelque chose comme ça, vous ne dites rien de plus que ceci *(Et Jean-Pierre Serre encadre la formule* $\mathrm{Isom}(X, Y) \neq \varnothing$*).*

Bon, dans le pire des cas, enfin, c'est un problème, je reçois tous les jours des prépublications où ce genre de chose arrive : "Théorème I a) Il existe f... b) f est quelque chose...". Si c'est au tableau, j'interromps généralement l'orateur (j'aime bien faire ça) et je lui demande : "Voulez-vous dire qu'on peut choisir f dans a) qui possède la propriété b) ou que tout f possédant la propriété a) possède la propriété b) ?" Eh bien, la plupart du temps, ils jouent la carte de la sécurité et se contentent de dire : "Oh, je veux dire, on peut choisir f qui possède les propriétés a) et b)." Ils se dégonflent. C'est un problème sérieux et pas si simple à résoudre. Si, au lieu de parler de mauvaise écriture, j'essaie d'aborder la question de la bonne écriture, ce point est loin d'être anodin. Car généralement, on procède à une construction : on obtient un f, on veut énoncer ses propriétés et on est pressé. Alors on déclare immédiatement : "Théorème : il existe un f". Après cela, on est complètement perdu. Il est probablement préférable de construire d'abord f, si possible, puis d'affirmer : "f est un isomorphisme" ou toute autre propriété que l'on a en tête, et c'est tout à fait acceptable. Mais cela demande un peu de patience. Bien sûr, on pourrait simplement l'annoncer, c'est-à-dire, dans les commentaires ou l'introduction, dire : "Au paragraphe deux, nous construisons un f possédant ces propriétés." Mais il est préférable de construire d'abord l'animal, puis de lui attribuer des propriétés. Qu'est-ce qu'on peut faire d'autre ? On peut faire d'autres choses.

Rendons la vie un peu plus amusante en faisant ceci : "Pimenter les choses avec une orthographe créative", ce que j'aurais simplement appelé "faute d'orthographe". Et comme bon exemple de faute d'orthographe, je pense que la meilleure est vraiment celle-ci : *il a écrit le mot "mispelling" en anglais qui est le mot qui signifie "faute d'orthographe" mais en le dysorthographiant, il a mis deux s.*. C'est un très bon exemple de "faute d'orthographe", qui est en fait un mot auto-descriptif. Je veux dire sa perfection qui vient de l'idée qu'il s'agit d'une "demie" action d'épeler (*pour illustrer cela, il a coupé le mot après la syllabe "mi" par un trait vertical, mi-orthographe et en français, mi est le préfixe en français pour signifier la notion de moitié*), ce qui n'est pas correct, alors laissez-moi l'écrire correctement : je ne veux pas vous donner de mauvais exemples, alors essayons de cacher directement les fautes d'orthographe *(Il écrit "mispelling" correctement.)*. Eh bien, certaines parmi ces fautes d'orthographe sont tout simplement amusantes. Je veux dire, combien de fois trouvez-vous "it's" comme une sorte d'abréviation pour "its" ? Eh bien, j'ai remarqué que ce sont très souvent les personnes non anglophones ou non américaines qui font cette erreur. Quand on est étranger et qu'on apprend l'anglais, on a tendance à prendre d'abord les mauvaises habitudes de la langue, comme celle de formuler des choses comme ça. Ce n'est pas une très bonne habitude et ici, c'est mal employé. Mais ma faute d'orthographe préférée n'est pas celle-ci. Elle se trouve dans le domaine de la topologie. "Principle bundle"[1]. La prononciation est parfaite. Il n'y a aucun problème et un dictionnaire vous le confirmera. D'ailleurs, c'est même assez poétique. Cela signifie un principe qui varie en fonction d'un paramètre, comme un ruban de Möbius. Voyez-vous, quand on part d'un principe très fort, on fait une boucle et on arrive au principe opposé[2]. Et ne croyez pas que ce soit rare : j'ai fait une recherche sur Google avant de venir, et Google donne 400 exemples de "principle bundle".

Bon, pour être honnête, Google donne aussi environ 4 000 définitions correctes des "principle bundles", l'ensemble des principes. Mais peut-être devrais-je quand même écrire aussi "principal bundle". Et dans l'une des conversations lues sur la toile, une personne dit à une autre que l'expression "principal bundle" n'est pas la bonne formulation, elle lui explique qu'elle est incorrecte, elle dit à l'autre de se souvenir que la bonne orthographe est "principle bundle". et elle ajoute que la bonne formulation "principle bundle... has a moral fiber". Je n'y suis pour rien, je veux dire, je me contente de copier ce que j'ai trouvé. J'ai juste copié ce que j'ai lu. *(Rires)*. Mais malheureusement, dans les exemples donnés par Google, certains provenaient de livres, où la chose était définie de cette manière, et il aurait fallu se plaindre.

Oh, il y a beaucoup de façons de mal écrire les choses. L'utilisation d'abréviations peut aussi compliquer la vie. Je me souviens d'un cas, qui a fâché Kodaira. *(Serre écrit au tableau)* : "An elliptic curve, with. c.m.". Cela s'est passé à Princeton. Je dois avouer que c'est moi qui écrivais ça au tableau. Kodaira m'a demandé : "Que voulez-vous dire par avec multiplication complexe ?". J'ai répondu : "Non, ce n'est pas avec multiplication complexe : j'ai mis un point : vous voyez, le point indique que c'est une abréviation, et bien sûr, une abréviation doit être complétée..." et j'ai com-

1. (au lieu de "Principal bundle")
2. *(Note de la traductrice : "Retourner sa veste" en français).*

plété par “without c.m.”. *(Rires)*. Alors je me suis souvenu de ne plus jamais refaire cette erreur, sauf ici. Alors, faites attention aux abréviations.

On a souvent tendance à tout écrire avec des symboles, peu importe leur usage, d’une manière incompatible avec leur sens. Pourtant, il est facile de les remplacer par les mots “pour tout” et “il existe” qui font mieux voir où est le problème.

Une autre chose qui complique la lecture : l’utilisation des virgules. On trouve fréquemment des énoncés comme “si A, B, C...”, A, B et C représentant des expressions complexes, les virgules sont alors utilisées avec deux sens différents. Ici, cela signifie “si A et B sont vrais, alors C est aussi vrai”. La première virgule dénote la conjonction et la seconde dénote l’implication. Il faut faire attention : c’est une très mauvaise idée de faire faire aux virgules ce qu’elles ne sont pas censées faire. Si vous voulez dire ceci, car il n’y a aucun moyen, cela pourrait signifier (si la première virgule dénotait l’implication et la seconde la conjonction logique) “Si A est vrai, alors B et C sont vrais”. C’est une construction standard.

Ai-je une liste exhaustive de toutes les possibilités ? Certainement pas ! Eh bien, il arrive que des symboles soient utilisés à la place de verbes, et c’est également très désagréable.

Je me souviens d’un article paru dans les *Inventiones* à l’époque où j’étais éditeur, dont le théorème principal était quelque chose comme ceci Théorème : suivi d’un théorème sans aucun mot, seulement constitué d’une formule mathématique. La formule était une expression complexe du style : Une certaine valeur d’une fonction L, avec un certain caractère, etc., suivie du signe “=”, donc la première expression compliquée était égale à une autre expression tout aussi compliquée, mais différente, avec des puissances de $2i\pi$, et des choses comme ça et à la suite de la deuxième expression compliquée, l’auteur(e) avait écrit $\in \mathbb{Q}$. Heureusement, j’ai lu l’article et j’ai compris ce qu’il voulait dire. Il voulait dire que cette expression complexe (constituée du “Première expression = Seconde expression”) était un rationnel. L’égalité “Première expression = Seconde expression”, était une assertion connue : elle avait été démontrée précédemment dans l’article. L’énoncé était donc entièrement là, dans le “$\in \mathbb{Q}$”. Cela signifiait qu’un certain nombre était un nombre rationnel, mais il fallait repérer dans la longue liste de symboles celui qui était un verbe, pour ainsi dire. Donc, s’il vous plaît, n’utilisez ce symbole $\in$ que lorsqu’il n’a pas un sens si compliqué que dans ce cas-ci, dans ce cas-ci, dites ce que vous souhaitez exprimer avec des mots, si possible. D’accord, il s’agit donc plus ou moins ici d’une grammaire de l’écriture mathématique, et de ce que vous pouvez faire avec cette grammaire. Il existe différents types de pratiques. Eh bien, j’hésite à dire “triche”, car c’est un peu fort. Quand on parle une langue étrangère, on a tendance à utiliser des mots forts, et non des mots nuancés. Veuillez donc m’en excuser. J’écris donc le titre ainsi : “Différentes formes de “triche” ”.

Ces types de problèmes se présentent différemment selon les différentes branches des mathématiques. Il faut donc examiner les différentes branches. Par exemple, en algèbre homologique, c’est facile. L’erreur courante consiste à affirmer que “tous les diagrammes sont commutatifs”, ce qui est parfois le cas. Et si jamais deux personnes ont construit deux flèches ayant les mêmes origines et les mêmes extrémités, elles sont égales. Deux flèches “naturellement définies” sont égales. Par exemple, vous prouvez une isomorphie entre ce groupe d’homologie-ci et celui-là, puis vous dites que l'on retrouve le théorème de, disons, Eilenberg-MacLane. Je me souviens avoir envoyé cela à Eilenberg et il m'a répondu : "Serre, vous n'avez pas prouvé qu'il s'agit de la même application.". Je ne le sais toujours pas, si ça se trouve, c'est le contraire. Quant à prouver que le diagramme est commutatif, c'est une question sérieuse. Ce n'est pas vraiment de la triche. Il n'existe pas de méthode mathématique très efficace pour prouver la commutativité d'un diagramme. Théoriquement, pour un diagramme très simple, on pourrait donner des noms aux flèches (a, b, c, d) et écrire $ba = dc$ ou quoi que ce soit d'autre, et alors le prouver. Mais cela ne se fait pratiquement jamais. En plus, généralement, les diagrammes comportent plus de symboles que cet exemple. Je ne pense donc pas que le calcul des diagrammes repose sur des bases très solides. La plupart des travaux se limitent à affirmer leur commutativité. Eh bien, Bourbaki a écrit quelques chapitres sur l'algèbre homologique, où il n'y a vraiment pas de triche, mais c'est difficile à lire.

Le problème, c'est que très souvent, si l'on veut donner un nom, on se retrouve avec une longue suite de lettres qui équivaut à une autre longue suite de lettres, et la seule solution est alors d'écrire : "Cela découle de la définition.". C'est là un des problèmes de l'algèbre homologique.

On trouve également en algèbre homologiquee quelque chose concernant "La suite spectrale d'une application $X \to Y$..." (on voit la fibre). Et cela semble avoir du sens. Mais c'est, bien sûr, l'utilisation de l'article défini "La" qui pose problème. Car cela n'a de sens que si l'on se réfère à une construction spécifique. Il existe diverses constructions dans la littérature, et il n'est pas certain qu'elles donnent la même réponse. On peut constater qu'il y a un problème en se posant la question suivante : Supposons que l'on prenne deux variétés *(Jean-Pierre Serre écrit verticalement $U \times V \to U$.)*, vous projetez, il s'agit de deux variétés compactes orientées, et supposons que l'on choisisse des orientations. Dans ce cas, sur le terme $E2$[3], on a une classe d'invariants bien définie dans le produit tensoriel de dimension supérieure. On obtient donc, pour chaque orientation de U et V, une orientation de $U \times V$. Mais laquelle ? Car il y a deux choix naturels. Donc, dans la séquence spectrale de Leray, la base vient en premier. Donc cohomologie de la base puis cohomologie de la fibre. Et vous multipliez selon ce choix. Mais Grothendieck, lorsqu'il définit les suites spectrales, dans Tohoku, dit seulement "Il existe une suite spectrale". Et donc vous devez regardez la preuve, et différentes personnes fournissent différentes preuves. Et je ne suis pas sûr, euh bon, en fait, je suis quasiment sûr du contraire, que ces différentes personnes donnent la même réponse. Ils donneront des termes isomorphes, mais ils n'utiliseront pas les mêmes flèches. Je dois donc dire que je n'ai pas beaucoup confiance dans les signes que je vois se développer actuellement en algèbre homologique.

C'est bon, donc voilà pour l'algèbre homologique. En topologie, quels sont les problèmes de la topologie ? Eh bien, ce sont essentiellement ceux de l'algèbre homologique, plus un, et ce problème, c'est celui des illustrations : dans la démonstration, vous dites : "On a ceci, voyez l'illustration deux !". Eh bien, sur l'illustration deux, vous trouvez quelque chose comme ceci. *(Serre dessine une sorte de zigouigoui.)* Et si vous demandez à l'auteur : "Est-ce que le nombre de fois où ça se tortille, trois ou quatre fois, est important ou pas ?". Réponse : "Alors, non, bien sûr que non !". Question : "Est-il important que là, les traits se touchent ou pas ?". Réponse : "Euh, en fait, ils ne se touchent pas, là, présentement, sur ce dessin, mais ils devraient le faire.", et ainsi de suite. Il y a un adage qui dit qu'une illustration vaut en général, vingt explications ? Est-ce plutôt 1000 que 20 ?... Oui, pour l'auteur, généralement, l'auteur d'une illustration est très satisfait ; il dit : "Regardez, c'est

3. ?

parfaitement expliqué, je comprends tout.". Et pour le lecteur, cela représente 1000 explications. Voilà les problèmes concernant la topologie.

L'analyse... Bon, la triche en analyse, on en trouve particulièrement en théorie analytique des nombres, elle est courante.

Le premier problème que je veux souligner, est valable pour toute l'analyse. On a un théorème. Je dis : "*Soit* f, etc., suivi d'opérateurs complexes dépendant de paramètres $A, \ldots$. Ensuite, est écrit $|Af \leq C|f|$ où C est une "constante", un joli mot, vous voyez. Je ne pense pas qu'il existe en mathématiques, ou d'ailleurs où que ce soit dans Bourbaki ou autre, où une constante soit définie. Que veut-on dire là ? La constante C est-elle un nombre réel strictement positif ? Et est-ce que vous l'appelez constante parce que ce nombre ne dépend pas de certaines des données... ? Or, très souvent, on utilise "*Soit* f...". Quand on introduit quelque chose avec "*Soit*...", c'est comme si on le clouait au tableau avec son nom (*Serre fait le geste de clouer la constante au tableau avec un marteau.*). Vous voyez, "*Soit* f...", f est fixé, donc en mathématiques saines, la constante devrait dépendre de f. Mais bien sûr, l'auteur ne le souhaite pas. Donc, ce qu'il écrit ne signifie pas que la constante peut dépendre de f, mais elle peut dépendre de bien d'autres choses.

Une autre façon de formuler cela, qui est correcte et qui est utilisée par les spécialistes, consiste à utiliser le symbole de Vinogradov $|Af| \ll_A |f|$, et le petit indice A est à mettre pour tout ce qui dépend de A (ou de tout autre paramètre). Ceci est correct. Par ailleurs, admettons qu'on ait deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies pour tout x strictement positif. Alors on peut écrire $f(x) = \mathrm{O}(x)$, alors que normalement, les gens devraient écrire, mais ils ne le font pas, pour x allant dans cette direction (*il écrit* $x \to \infty$). Mais même cette notation est incorrecte. Qu'est-ce que cela signifie exactement ? Cela signifie qu'il y a en fait *deux* constantes, et non pas *une* : x_0 et C, telles que $|f(x) \leq C|g(x)|$ pour $x \geq x_0$.

Mais très souvent, et pratiquement tout le temps, on parle de **la** constante, qui est implicite dans la notation $\mathrm{O}(x)$, ce qui n'a de sens que si l'on a bien défini ce qu'est x_0. Or, dans de nombreux cas, en particulier en théorie analytique des nombres, il n'est pas du tout évident qu'on calcule, par exemple, la fonction $\pi(x)$. Bon, d'accord, on va supposer quelque chose comme ça, $x \geq 0$, mais dans certains théorèmes, comme le théorème de densité de Chebotarev, lorsqu'on essaie d'écrire des bornes explicites, on constate que le choix de x_0 est aussi difficile que celui de la constante C ici devant. Il est très important de trouver x_0 ; ceci est donc une façon classique de tricher en théorie analytique des nombres, ce qui, je pense, cause énormément d'erreurs. Bon, peut-être devrais-je aborder un aspect un peu plus positif. Comment peut-on éviter ces différents écueils ? J'ai dû en oublier beaucoup. J'en ai peut-être fait une petite liste. *(Il sort la liste qu'il avait préparée de sa poche).* Ah oui ! Bon ! Ce n'est pas très grave.

Je veux dire, il s'agit d'ortographe. Je voulais faire un petit commentaire à ce sujet *(Il écrit "iff")*. Mais c'est de l'anglais affreux, même si les mathématiques sont bonnes car c'est absolument sans ambiguïté. Cela signifie "si et seulement si". Je ne peux donc pas dire grand-chose contre cela, si ce n'est que vous pourriez faire ceci, puisque la plupart d'entre vous travaillent sur ordinateur : programmer votre ordinateur pour qu'à chaque fois que vous tapez "*iff*", cela soit remplacé dans votre fichier par "*si et seulement si*". Ainsi, vous seriez satisfaits, et je le serais aussi. Je dois dire que les Français se comportent aussi mal que les Anglais, en écrivant "*ssi*" en lieu et place de "*si et seulement si*". Mais heureusement, l'Académie des Sciences refuse cela. Je veux dire par là que si vous envoyez une note aux Comptes-Rendus, nous remplacerions le "*ssi*" par "*si et seulement si*" et je suis très heureux de vous annoncer que les Allemands n'ont jamais introduit "*wunw*" pour "*wenn und núr wenn*" (*L'expression de Serre est mal audible*). Donc, cela n'existe pas. Je veux dire, c'est... Je ne parle pas russe, donc je ne peux pas vous dire si les Russes ont inventé quelque chose aussi. Voyons voir..., une autre chose que j'ai oubliée. Ah oui ! Je voulais dire quelque chose à propos de Bourbaki. Oui, parce que nous avons toujours notre John/Joan, notre auteur John/Joan, qui veut écrire aussi vite que possible. Et oui, j'ai choisi John/Joan parce que ça peut s'interpréter au masculin comme au féminin. Voilà, c'est tout. Mais j'allais donner un conseil à John/Joan, au cas où le correcteur dirait : "Oh mon Dieu, votre démonstration n'est pas très bonne !" À ça, John/Joan pourrait toujours répondre : "Oh oui, bien sûr que ce n'est pas une démonstration de Bourbaki.". Et vous savez, dire que ce n'est pas une démonstration de Bourbaki permet d'obtenir l'assentiment des gens. Je me souviens d'une fois où... Bott n'est pas là... ? Non, il n'est pas là. C'était à Oberwolfach. Non, pas à Oberwolfach, à Bonn, lors d'un événement quelconque. Un de mes vieux amis donnait une conférence sur les travaux d'un physicien, et à la fin de l'heure, je n'étais pas sûr qu'il ait prouvé quelque chose ou non. Alors j'ai demandé à mon cher ami : "Y a-t-il une démonstration ? Je veux dire, est-ce qu'on peut en faire une démonstration ?". Mais il m'a répondu : "Oh, bien sûr, pas une démonstration de Bourbaki, mais une démonstration..." Et tout le monde a ri.

Je n'étais donc pas très content, mais cela m'a fait réfléchir à la différence entre une démonstration et une démonstration de Bourbaki. Je peux donc vous dire qu'une démonstration est acceptée par des experts, tandis qu'une démonstration de Bourbaki est acceptée par des non-experts. Bien sûr, je privilégie la seconde option.

Revenons-en maintenant à la manière d'écrire "pas trop mal". J'ai mentionné certains problèmes faciles à éviter. Vous pouvez définir vos notations avec précision et citer vos livres, en indiquant le numéro de page. Je dois d'ailleurs vous parler des références bibliographiques sans indication de page. J'étais correcteur d'un article une fois, un article sur les représentations p-adiques, ou quelque chose d'approchant, où l'auteur présentait une formule intéressante. La référence était indiquée comme provenant d'un de mes livres, mais heureusement, je connaissais la formule dans mon ouvrage, et j'ai donc compris qu'elle n'y figurait pas. *(Gros rires).*

Alors, au départ, je pensais écrire une démonstration, puis j'ai créé un contre-exemple. Cela résout le problème. La formule était fausse. Pourquoi ai-je pensé à cela ? Oui, je reviens au fil de mon propos. Certaines de mes remarques sont faciles à corriger, d'autres non. Celles concernant la commutativité des diagrammes sont sérieuses.

Ce que j'appelle de la triche est pratiquement impossible à éviter. Chaque démonstration contient une forme de triche. On ne peut pas donner une démonstration totalement explicite. La question est donc de savoir ce qu'il faut omettre, et ce n'est pas évident. Certains y arrivent, et d'autres... Un jour, un autre ami, heureusement, je ne donne pas de nom, il m'a envoyé une démonstration il y a environ un an. Il avait résolu une question et sa démonstration tenait en deux pages. J'y ai réfléchi, puis je la lui ai rendue. Je lui ai dit que la démonstration était fausse, mais que tout ce qu'il avait écrit était correct, car c'est très souvent le cas. On cherche à démontrer un théorème, on avance des arguments, puis on s'arrête. On croit alors que ce qu'on a démontré implique une autre propriété, mais on ne tient pas compte de cette implication. C'est là que réside l'erreur : on suppose quelque chose de faux. Très souvent, les erreurs dans les démonstrations se trouvent dans la partie non écrite, la partie implicite.

Mais une explication complètement explicite est impossible. Par exemple, il existe un problème très général avec les identifications. On a toujours dit qu'on identifiait $\mathbb{Z}$ à un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$ *(Serre écrit :)* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, etc. Mais qu'est-ce que cela signifie ? C'est absolument faux. $\mathbb{N}$ n'est pas une partie de $\mathbb{Z}$. Prenons l'exemple suivant : dans le système de Zermelo-Fraenkel, pratiquement, tout est ensemble. Donc, 3 est un ensemble. Quel est le cardinal de 3 ? Dans Bourbaki, les éléments de $\mathbb{N}$ représente les ensembles finis. Le cardinal de 3 est 3[4]. Dans ce système, le cardinal d'un ensemble de 3 éléments est égal à 3. On utilise 3 et $3 \in \mathbb{N}$. Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont des paires d'entiers de même valeur absolue. Donc, un élément de $\mathbb{Z}$. Un élément de $\mathbb{Z}$ a pour cardinalité $\aleph_0$. *(Serre écrit)* $3 \in \mathbb{Z}, 3 \in \mathbb{Q}$. Mais ici, dans $\mathbb{R}$, vous avez des suites de Cauchy et donc la cardinalité est la puissance $2^{\aleph_0}$, d'accord ? Qu'est-ce que cela signifie ? Je veux dire, vous ne devriez pas poser la question. Oui. Mais d'un autre côté, quand on explique les mathématiques à d'autres personnes, ce n'est pas toujours compatible avec ce qu'on leur dit qu'il y ait des questions qu'il ne faille pas poser. Donc, c'est très désagréable, vous devez le savoir, et j'ai pris un exemple assez trivial, mais il y en a des beaucoup plus amusants. Si vous prenez $\mathbb{Q}$ et les adèles de $\mathbb{Q}$ (*il écrit* $A_\mathbb{Q}$). Vous avez un plongement diagonal ($\mathbb{Q} \xrightarrow{\text{diag}} A_\mathbb{Q}$), mais vous avez aussi les corps p-adiques (*Serre rajoute en dessous* $\mathbb{Q}_p$ *avec des flèches qui relie, l'une* $\mathbb{Q}$ *à* $\mathbb{Q}_p$ *et la seconde qui relie* $\mathbb{Q}_p$ *à* $A_\mathbb{Q}$). Donc, vous avez toute une collection de plongements qui ne sont pas compatibles entre eux. Donc, vous devez savoir lequel vous avez en tête.

Chevalley, qui était membre de Bourbaki, aurait préféré ne jamais procéder à une identification, mais c'est absolument impossible. Le texte serait illisible s'il fallait nommer l'injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$, etc. Certes, le fait de donner un nom à chaque flèche de plongement pourrait être utile, mais dans ce cas précis, non.

En fin de compte, nous devons admettre que nous ne pouvons pas écrire avec une rigueur absolue ; savoir quoi dire et quoi taire relève de l'art. Savoir ce qu'il faut dire et ne pas dire. Ok, j'arrête mon exposé ici.

[*Applaudissements*] Je serais ravi de recevoir vos commentaires ou questions, car les opinions sur ces sujets peuvent être très diverses. Par exemple, il y a un point que je n'ai pas abordé car il est un peu complexe : il faudrait expliquer les idées clairement, donner les détails complets, ou les deux. Personnellement, je pense que si vous me fournissez une démonstration détaillée, je peux en déduire les idées sous-jacentes. Ce n'est pas très difficile. Si vous me donnez les idées sans les détails, je risque de bloquer sur certains points. De plus, je préfère une démonstration plus détaillée sur

4. *Note de la traductrice : cette phrase est la transcription littérale de ce que Serre dit ; en fait, il faudrait remplacer le premier 3 par une écriture infernal car 3 est représenté par l'ensemble contenant 0, 1 et 2 :* $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ *(ou* $\{\{\}, \{\{\}\}, \{\{\}, \{\{\}\}\}\}$*). Je me rappelle que quand Cogis avait écrit ça au tableau, j'avais dit à ma voisine de classe "Ah pour sûr, on n'est pas rendus", mais je suis une fourmi, face aux génies Zermelo et Fraenkel, ou von Neumann."*

papier, car si elle est trop longue, on passe simplement à la page suivante. En revanche, si elle est trop courte ou s'il manque des informations, on peut perdre beaucoup de temps à la reconstituer. Bon. Mais je voulais une autre question que celles que je me suis posées. Donc non, vous devez savoir ce que c'est que de mal écrire les mathématiques. Je suis sûr qu'il suffit de lire n'importe quel texte à la bibliothèque.

[*Intervention inaudible*] Je suis sûr que si cela arrivait avec Bourbaki : un membre de Bourbaki disait à l'autre : "C'est parce que tu es stupide et que tu n'as pas trouvé la bonne formulation qui fournirait les deux.". Donc, normalement, si cela arrive, il devrait vraiment y avoir une réaction, parce que c'est ce que je déteste. Les gens vous disent : "La preuve du théorème 2 est similaire" ! "Oh oui, je vous promets que c'est similaire, c'est certain. Il y a une expression latine pour dire ça, vous souvenez-vous laquelle ? Ah oui ! Mutatis mutandis. Oui. C'est ça. C'est correct ? Je ne suis pas sûr de l'orthographe. En clair, cela signifie "changer ce qui doit être changé".

[*Intervention inaudible*] Vous voulez dire dans le document ? Oui. Si vous pouvez le faire, c'est toujours très utile. Cela appartient généralement à l'introduction. Certaines personnes le font très bien. Il existe une manière de rédiger des articles où l'on commence par une très longue introduction présentant tous les énoncés sans démonstration, puis où l'on détaille la démonstration dans le reste du texte. Cette méthode pourrait être plus claire, à condition que la notation des théorèmes énoncés dans l'introduction soit explicite. On trouve très souvent des introductions comme "théorème 31", etc., sans que la notation soit expliquée.

Donc, vous posez la question sérieuse de savoir comment on transmet les idées et la motivation. J'ai tendance à croire que la motivation, c'est ma propre curiosité : je veux juste savoir comment les choses fonctionnent, et ensuite je vous explique. Eh bien, je me demande ce qu'est la vraie motivation... Je ne suis pas sûr de croire vraiment à la notion de motivation. Quelque chose peut paraître très étrange au premier abord, puis devenir clair plus tard. Il y a des gens qui savent écrire une très bonne introduction. Puisque Bott n'est pas là, je peux vous donner le nom de l'un d'eux : le topologue de ma génération, Milnor, était brillant, notamment parce que certains sujets sont moins faciles. Je ne sais pas comment on peut trouver la motivation dans le théorème de Feit-Thompson : tout groupe fini d'ordre impair est résoluble. Eh bien, la motivation, c'est une belle démonstration. La démonstration fait 250 ou 300 pages. En fait, la démonstration elle-même est la motivation, mais les idées de la démonstration, je veux dire, sont absolument invisibles pour les non-spécialistes. Ce n'est pas grave. Autre chose ?

[*Intervention inaudible*] Parce que vous pensez que c'était mieux quand j'étais jeune ? Je ne crois pas. Je me souviens d'articles de topologie dans les *Annals* qui me désespéraient, car ils n'avançaient pas. Ils créaient des suites exactes qui tournaient en rond, et tout ça sur des groupes qu'ils ne connaissaient pas. Non, je ne pense pas, je ne veux pas blâmer votre génération, non. Mais c'est une tendance naturelle, je veux dire, le moindre effort, je pense que c'est tout. L'ordinateur y est peut-être pour quelque chose aussi, car c'est trop facile maintenant de prendre un texte qu'on a écrit à un moment donné et de le coller ailleurs, et puis les notations ne correspondent pas ou sont différentes, et on peut faire beaucoup plus de choses qu'avant, quand il fallait taper sur papier, découper et coller. Il y avait moins de possibilités, non, mais je ne pense pas que l'écriture soit pire.