Les grandes lignes de l’évolution des mathématiques

Jean Dieudonné [1]

Je vais tâcher dans cette conférence inaugurale de dégager quelques traits généraux de l’évolution des mathématiques et de dissiper à cette occasion quelques idées inexactes assez répandues dans les milieux intellectuels qui s’intéressent aux sciences, sans être très au courant des mathématiques d’aujourd’hui.

Dans ce séminaire, vous allez entendre une série d’exposés sur l’histoire des mathénatiques, depuis les Grecs jusqu’au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, qui seront certainement très instructifs. Mais la première remarque que je voudrais faire, et dont peu de gens, hormis les mathématiciens professionnels, ont conscience, c’est qu’au moins 80 % des connaissances mathématiques d’aujourd’hui remonte à moins de 150 ans tant en ce qui concerne les résultats que les méthodes et techniques imaginées pour les obtenir.

Dans un livre intitulé “Panorama des mathématiques pures”, publié il y a 2 ans, j’ai réparti, pour la commodité de l’exposé, les mathématiques actuelles en 26 rubriques. Or il n’y en a qu’une seule, l’Analyse classique, dont on peut dire que la moitié était connue avant 1850. Par contre, 9 rubriques n’existaient pas avant 1895 : Topologie générale, Topologie algébrique, espaces vectoriels topologiques, théorie spectrale, algèbre de von Neumann, théorie ergodique, analyse harmonique non commutative, théorie des catégories, algèbre homologique. Quatre autres ne remontent pas plus haut que 1870 : Théorie des ensembles, groupes de Lie, formes modulaires et automorphes, fonctions de plusieurs variables complexes. Enfin, des 12 autres : Logique mathématique, Algèbre, Théorie des nombres, Algèbre commutative, Géométrie algébrique, Théorie des groupes, Intégration, Analyse harmonique commutative, équations différentielles, équations aux dérivées partielles, Géométrie différentielle, Probabilités, on peut dire que les 4/5 au moins de leurs méthodes et résultats sont postérieurs à 1840.

Pour quelles raisons cette accélération du progrès s’est-elle produite, et comment s’est-elle manifestée ? Pour le voir, nous sommes amenés à exa-

1. Séminaire de philosophie et mathématiques, 1980, fascicule 3, p. 1-10, http://www.numdam.org/item?id=SPHM$_1$980$_{3A^10}$,

miner comment, en gros, s'est déroulée l'histoire des mathématiques depuis 200 ans. Il faut d'abord faire justice d'une théorie assez répandue qui voudrait que toutes les notions mathématiques aient été introduites au fur et à mesure des besoins de la société ambiante, des techniques ou des sciences expérimentales. Certes, il serait absurde de nier que l'origine des nombres et de la géométrie provient des nécessités de la pratique : décompte d'objets, opérations commerciales, architecture ou irrigation. En outre, à partir de la Renaissance, la Mécanique, l'Astronomie, la Physique et même de nos jours la Biologie n'ont cessé de poser aux mathématiciens des problèmes qui exercent leur sagacité, notamment dans le domaine des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles ; qui plus est, ce sont souvent des notions issues de l'expérience : conservation de l'énergie, principes "extrémaux" variés, qui ont suggéré aux mathématiciens de fécondes méthodes d'attaque de ces problèmes. Plus récemment, l'Algèbre et les théories combinatoires, sans parler du calcul des probabilités, ont reçu des applications inattendues, avec le double courant d'échanges fructueux que cela implique nécessairement.

Mais cela dit, des 26 rubriques citées ci-dessus, l'histoire montre que plus de la moitié sont apparues sans aucune influence de la réalité sensible, ou n'ont avec elle que des liens extrêmement ténus : Algèbre, Théorie des groupes, Théorie des nombres, Géométrie algébrique, fonctions de plusieurs variables complexes se sont développées de façon complètement indépendante des sciences expérimentales depuis 1800 et dans les autres théories mathématiques, un problème issu de besoins des physiciens ou astronomes n'a souvent été que la chiquenaude initiale, tout à fait hors de proportion avec les conséquences qu'elle a entraînées.

Le progrès des mathématiques est donc essentiellement d'origine interne. La résolution d'un problème est souvent obtenue tout d'abord par un artifice de calcul ou de raisonnement que l'auteur lui-même serait bien en peine d'expliquer ; un exemple typique est donné par les premières formules de résolution "par radicaux" des équations algébriques de degré 3 ou 4. Puis, après parfois une longue stagnation, vient une époque de réflexion, où l'on analyse les artifices qui ont réussi, et on cherche à en trouver les raisons profondes : pour les équations algébriques, il a fallu plus de 200 ans d'efforts infructueux tendant à étendre les formules de résolution aux équations de degré 5, avant que ne commence en 1770 une analyse de ces formules, qui devait conduire en 60 ans à la théorie de Galois. Cet exemple est typique à un autre égard, car ce qui a permis d'aboutir à la résolution complète du problème initial, c'est la mise en évidence des structures de groupe et de corps, sous-jacentes à la question et ignorées jusque là.

De même, durant tout le XIX$^{\text{ème}}$ siècle se sont accumulées de nombreuses idées concernant les "fonctions propres" solutions de problèmes de "vibration" régis par des équations différentielles linéaires, ou des équations aux dérivées partielles de type elliptique. Puis, tout à coup, en une quinzaine d'années, ces idées ont connu une brusque cristallisation avec la naissance de deux nouvelles structures, celle de l'espace topologique et celle d'espace normé, qui ont permis l'essor de la Théorie spectrale des opérateurs et de toutes ses retombées (y compris la Physique quantique). Un troisième exemple est fourni par la Géométrie différentielle, où, après 100 ans de travaux nourris des idées géniales de Gauss, Riemann, Sophus Lie et Elie Cartan, ont émergé les notions d'espace fibré et de connexion, devenues centrales dans cette théorie, et dont la création a été suivie à notre époque par celles de faisceau et feuilletage, dont on sait la fortune actuelle.

Il s'agit dans ces exemples de quelques-unes des grandes structures fondamentales des mathématiques d'aujourd'hui, qui en forment l'armature et se retrouvent partout. Car c'est une de leurs caractéristiques et leur principale vertu de se répandre hors des branches où elles ont pris naissance, abolissant les barrières artificielles entre les vieux compartiments périmés d'Algèbre, Géométrie, Arithmétique et Analyse, et réalisant l'unité essentielle de la mathématique.

L'évolution de la Géométrie algébrique est, de ce point de vue, particulièrement exemplaire : déjà hybride de Géométrie et d'Algèbre à sa naissance au XVII$^{\text{ème}}$ siècle, elle a subi successivement l'influence de l'Analyse avec la théorie des intégrales abéliennes, de la Théorie des nombres algébriques avec le concept d'idéal, de la naissante Topologie algébrique avec ses cycles et ses nombres d'intersection, pour devenir aujourd'hui cet extraordinaire carrefour où viennent se mêler presque toutes les notions mathématiques. Et n'est-il pas étonnant que par contrecoup elle ait entièrement absorbé l'Algèbre comutative, et qu'on puisse considérer les entiers comme des fonctions sur un espace topologique, le spectre de l'anneau qu'ils forment ? De même, on aurait sans doute fort surpris les premiers mathématiciens qui se sont occupés de Topologie algébrique, cherchant à y dégager des invariants numériques par les décompositions simpliciales et leurs “nombres d’incidence”, si on leur avait dit que la théorie des groupes l’envahirait toute entière et que, en un autre revirement inattendu, elle engendrerait une partie d’Algèbre pure, l’Algèbre homologique. Et qui, il y a 100 ans, aurait pu prévoir que la théorie des séries de Fourier fusionnerait avec celle des caractères des groupes abéliens, et qu’il en naîtrait la forme moderne de la Théorie des nombres algébriques, basée sur l’étude du groupe des idèles ?

On pourrait multiplier ces exemples, mais il faut insister sur un aspect remarquable de ces migrations de structures : chacune entraîne avec elle le cortège d’“intuitions” dont elle était entourée dans la théorie d’où elle est sortie, d’où ce que j’ai appelé le transfert d’intuitions dans un article récent. Le plus surprenant peut-être est la généralisation de ce qu’il ne faut pas craindre d’appeler l’intuition géométrique, à presque tous les domaines des mathématiques ; si bien que les défenseurs attardés de la vieille “Géométrie élémentaire”, qui déplorent la disparition de l’esprit géométrique ne se rendent pas compte qu’au contraire jamais l’empire de la Géométrie n’a été aussi vaste et aussi universel.

Enfin, de même que les personnages des grands romans finissent, dit-on, par vivre d’une vie propre et s’imposer à leurs créateurs, les structures mathématiques, une fois créées, ont souvent une tendance à échapper à leur définition initiale et à acquérir des aspects protéiformes pour mieux s’insinuer dans des théories qui leur paraissaient tout à fait étrangères. Il y a longtemps, par exemple, qu’on ne s’étonne plus de voir que le Calcul différentiel a divorcé d’avec les idées de continuité et de limite, et s’est implanté en Algèbre pure, voire même lorsque le corps où l’on travaille n’est plus de caractéristique zéro. Si les structures algébriques “classiques” semblaient indissolublement liées à des ensembles où elles étaient définies, voici maintenant qu’on peut les définir sur des catégories à peu près quelconques, et parler par exemple de schéma en groupes ou de groupes formels alors qu’il n’y a plus d’éléments que l’on puisse “composer” par la loi du groupe ! Ou bien, autre avatar, dans ce qu’on appelle la théorie de Kan, on peut mimer en quelque sorte les groupes, l’homologie, les espaces fibrés, etc. ... sur des “objets simpliciaux”, eux aussi à peu près quelconques, puisqu’on peut en associer à toute catégorie et par exemple appliquer ainsi la K-théorie à une catégorie abélienne arbitraire. Et que dire des “topologies de Grothendieck” ou des “groupes virtuels” de Mackey, qui bien entendu ne sont plus des topologies ou des groupes au sens habituel ; et il n'est pas jusqu'à la notion de fonction intégrable elle-même qui ne change tout à fait de nature dans la récente théorie de l'intégration commutative de Connes.

En résumé, on peut donc dire que, depuis un siècle, les progrès essentiels des mathématiques sont jalonnés par les inventions de structures, doublées souvent par de non moins importantes inventions de foncteurs. Il reste bien entendu de vastes domaines des mathématiques où de nombreux résultats ne paraissent pas s'ordonner autour de structures bien nettes ; mais toute l'histoire récente (comme celle des extraordinaires "conjectures de Weil") donne à penser que cela est simplement dû à notre myopie qui nous empêche de les voir, et on peut espérer que nos successeurs seront plus perspicaces que nous.

Cette vue un peu schématique appelle quelques remarques complémentaires. En premier lieu, cette découverte des structures a été contemporaine de l'adoption progressive du langage ensembliste, qui a contribué de façon déterminante à la rendre possible. Si nous voulions aujourd'hui définir de façon générale un groupe, sans parler d'ensemble ni d'application, nous serions extrêmement gênés ; c'est exactement la situation où se trouvaient les mathématiciens avant 1870, et c'est là, à mon avis, qu'il faut chercher la cause principale de la lenteur avec laquelle ont émergé les structures mathématiques essentielles, phénomène auquel j'ai consacré un récent article. De nos jours, à ce cadre si commode que nous fournit la Théorie des ensembles, sont venus s'ajouter les concepts beaucoup plus récents de catégorie et de foncteur, dont on ne peut nier le rôle bénéfique, pourvu que l'on n'en abuse pas.

Une autre remarque est que la mise en évidence de structures sous-jacentes à une branche des mathématiques s'accompagne invariablement d'une recherche nouvelle de précision dans le langage et les déductions, qui tranche sur le laisser-aller antérieur. La "rigueur" weierstrassienne en est un exemple célèbre ; mais, à un niveau beaucoup moins subtil, il est bien rare de voir un mathématicien du XIX$^{\text{ème}}$ siècle dire ce qu'il entend exactement par les "fonctions" dont il va parler, ou si les nombres qu'il utilise sont réels ou complexes ! Ce n'est pas sans mal que l'on est à peu près parvenu à faire cesser ces négligences, et il a fallu souvent bien des tâtonnements avant que l'on arrive à des modes d'exposition entièrement satisfaisants ; j'y reviendrai plus loin.

En troisième lieu, pour comprendre les difficultés de nos prédécesseurs, il faut aussi se rendre compte que dans les objets mathématiques “naturels” qu'ils maniaient depuis des siècles, les structures étaient tellement imbriquées les unes dans les autres qu'il ne pouvait guère venir à l'idée de les dissocier. Pour un mathématicien du milieu du $\text{XIX}^{\text{ème}}$ siècle, la droite réelle (ou “le continu” comme on disait encore alors) était conçue comme un monolithe, avec toutes ses propriétés à la fois ; il a fallu l'esprit puissamment original de Cantor pour nous apprendre à y voir la droite en tant qu'ensemble (caractérisée par son nombre cardinal), la droite en tant que groupe, la droite en tant que corps, la droite en tant qu'ensemble ordonné, la droite en tant qu'espace topologique et la droite en tant qu'espace mesuré. Je me souviens de ma propre surprise lorsqu'on m'a montré (il y a 45 ans de cela !) qu'il pouvait exister plusieurs topologies sur la droite et d'éminents mathématiciens ont longtemps refusé d'admettre qu'il y avait sur la droite d'autres mesures que celle de Lebesgue.

Ce n'est là qu'un exemple de tendances qui s'opposent aux progrès ou les retardent. On croirait que parmi les hommes qui font profession de science il n'y a pas de place pour la routine et que l'introduction d'une méthode ou d'une notion nouvelle, plus puissante ou plus féconde que celles qu'elle remplace, entraînerait une adhésion immédiate et unanime. C'est compter sans l'inertie et la pesanteur de l'esprit humain, qui s'étalent là comme ailleurs : changer de point de vue demande un fatigant effort, et il est tellement plus commode de s'en tenir à ce qu'on a appris jadis et qui est devenu une seconde nature ! Bien entendu, c'est dans l'enseignement que ce conservatisme borné fait le plus de ravages, mais les exemples ne manquent pas montrant que la routine se propage même parmi les créateurs, surtout lorsqu'ils vieillissent. L'exemple le plus extrême est la difficulté avec laquelle se sont imposées les notions géométriques intrinsèques de l'Algèbre linéaire et multilinéaire, malgré les vains efforts de Grassmann et de Peano pour éliminer la frénésie calculatoire des matrices et des déterminants ; et la même histoire s'est répétée quand il s'est agi d'en finir avec la débauche d'indices du Calcul tensoriel classique et de lui substituer des notions intrinsèques. Qu'on se rappelle aussi la répugnance prolongée des mathématiciens à adopter les nombres p-adiques de Hensel, le calcul différentiel extérieur de E. Cartan, plus près de nous les distributions de L. Schwartz. Et comment expliquer l'incroyable persistance de la prétendue “intégrale de Riemann”, une notion bâtarde dont on sait depuis 80 ans qu'elle est inutilisable en Analyse ?

Une autre manifestation de cet état d'esprit se montre chez beaucoup de mathématiciens dans un attachement à des notions qui ont été jadis de grandes nouveautés et ont eu une importance historique indéniable, mais qui, comme on dit, ont "fait leur temps". Par exemple, on sait que les idées de Cantor sur l'infini ont paru révolutionnaires à leur époque et ont rencontré beaucoup de résistance avant de s'imposer ; mais aujourd'hui, toute la partie de son œuvre concernant l'arithmétique des cardinaux et des ordinaux est devenue un simple objet de curiosité, dont les applications en dehors de la Logique et de la Théorie des ensembles sont négligeables (comme on s'en assure sans peine en feuilletant Mathematical Reviews) ; cependant, nombreux sont encore les mathématiciens qui considèrent cette théorie comme fondamentale en mathématiques, et le respect dû à Cantor a souvent tendance à tourner à l'hagiographie pure et simple ! Un autre exemple assez frappant a été le comportement de F. Riesz à la fin de sa vie ; il fut un des grands créateurs de l'Analyse fonctionnelle moderne, et l'importance de son œuvre ne fut reconnue qu'assez tard. En 1913 il avait donné un exposé aussi lucide qu'élégant de la théorie spectrale de Hilbert, beaucoup plus clair et utilisable que celui de Hilbert lui-même ; mais en 1950, écrivant avec B.Sz. Nagy un ouvrage relativement élémentaire d'Analyse fonctionnelle, il s'est borné purement et simplement à reprendre son exposé de 1913, alors que dans l'intervalle, une méthode bien plus élégante et puissante avait été découverte par Gelfand à l'aide de sa théorie des algèbres de Banach ; si bien que ce livre, qui 30 ans auparavant aurait été un évènement, était en fait périmé dès sa parution. Il est à peine besoin de dire que l'ouvrage a eu un énorme succès !

*

*   *

J'ai dit plus haut les difficultés rencontrées pour dégager certaines notions nouvelles ; dans quelques cas, cette lente maturation s'est accompagnée de tâtonnements et d'incertitudes, qui ne correspondent guère à l'image d'Epinal d'une mathématique dispensatrice de vérités parfaites et immuables. Récemment, certains philosophes se sont portés à l'autre extrême et ont voulu voir dans ces tâtonnements la démarche constante de toute la mathématique ; c'est la thèse qui a notamment été soutenue par I. Lakatos, récemment disparu, dans un livre, "Proofs and refutations" qui a eu dans les milieux philosophiques s'occupant de sciences un succès qui paraît fort étrange à un mathématicien professionnel. L'auteur y prend un exemple assez singulier à tous égards, le théorème d'Euler sur la relation entre nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un polyèdre ; il s'étend avec complaisance, en plus de 100 pages, sur les nombreuses démonstrations fausses ou incomplètes qui ont été données pendant 100 ans de ce théorème, avant d'arriver à une preuve entièrement correcte et applicable à tous les cas. Ce qu'il ne dit pas, c'est qu'il s'agissait dans cette question d'une branche des mathématiques en formation, la Topologie algébrique, où l'intuition géométrique tient un rôle important de guide, assez sûr en général, mais qui peut jouer des tours pendables si elle n'est pas contrôlée ; c'est seulement au tournant du XX$^{\text{ème}}$ siècle que Poincaré a réussi à asseoir cette discipline sur des bases solides. On connaît aussi les erreurs commises par des hommes aussi célèbres que Cauchy et Riemann dans les questions touchant à la notion de limite, avant que Weierstrass n'ait introduit en Analyse une démarche parfaitement rigoureuse. Plus près de nous, la Géométrie algébrique italienne, malgré ses remarquables découvertes, a longtemps souffert du manque de précision dans les définitions et démonstrations, qui a suscité des controverses, même entre les meilleurs de ces géomètres ; là aussi, tout est rentré dans l'ordre une fois les bases solidement assises.

Mais vouloir faire de ces quelques exemples une règle générale est parfaitement ridicule. Lakatos n'avait qu'une connaissance sommaire des mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, et ne semble jamais avoir connu celles qui ont été découvertes ultérieurement. Même dans les branches traditionnelles, la plus grande partie, comme la Théorie des nombres, l'Algèbre, la Géométrie différentielle et une part importante de l'Analyse, n'ont jamais connu les hésitations et tâtonnements que Lakatos voudrait faire passer pour la norme du développement des mathématiques ; dans tous ces domaines, mis à part les cas d'erreurs matérielles (tels qu'une faute de signe ou une confusion de lettres), un théorème une fois démontré n'a jamais donné lieu à contestation. Et cela, à un tout petit nombre d'exceptions près, est vrai des milliers de résultats obtenus dans tous les domaines des mathématiques depuis 1940, grâce aux exigences de précision dans la rédaction dont je parlais plus haut, et qui sont devenues universellements admises. Lakatos a tout bonnement voulu faire passer l'exception pour la règle, ce qui ne semble pas une méthode recommandable pour un historien des sciences ou un philosophe. Finalement, que faut-il penser de ce qu'on a appelé des "crises" dans l'histoire des mathématiques ? Si l'on veut dire par là une refonte complète de pensée, comme cela s'est produit par exemple en Physique avec la Relativité ou la Mécanique quantique, on peut affirmer qu'il n'y a jamais eu rien de pareil en mathématiques, sauf, peut-être, le tournant des mathématiques grecques qui a suivi la découverte des irrationnelles, sur lequel nous sommes malheureusement très mal renseignés. Depuis lors, ce qui s'est produit à deux ou trois reprises, c'est une mise en ordre de théories ou méthodes insuffisamment précises, comme le Calcul infinitésimal ou la Géométrie algébrique, dont j'ai parlé plus haut. Mais la "crise" dont aiment à parler certains, c'est ce qu'on a appelé la "crise des fondements", qui s'est déclenchée à partir de 1895 environ à propos des "antinomies" apparues dans la Théorie des ensembles "naïve" développée par Cantor. Je résumerai rapidement ce que je pense de cette question, à laquelle j'ai consacré un article récent. Les faits principaux que j'y ai développés sont les suivants (il s'agit, j'insiste, de faits immédiatement vérifiables et non d'opinions) :

1°) Les règles usuelles de maniement des ensembles et des applications (ce qu'on appelle aussi le "calcul booléen") ne sont que des constatations du bon sens le plus banal lorsqu'il s'agit d'ensembles ayant un petit nombre d'éléments. La théorie "naïve" des ensembles avait étendu ces règles à tous les ensembles infinis, comme s'il s'était agi d'objets dont nous aurions eu une connaissance "intuitive" aussi claire que celles des ensembles de 3 ou 4 éléments. Les "antinomies" montraient que cette assimilation était abusive et qu'il fallait, comme dans les autres prétendues "crises" rappelées plus haut, préciser non seulement les propriétés admises sur les ensembles, mais même le langage utilisé pour les énoncer, en raison des ambigüités du langage courant. Cela fut fait entre 1908 et 1920, dans ce qu'on a appelé la théorie axiomatique des ensembles, ou "système de Zermelo-Fraenkel" (ZF en abrégé).

2°) Les mathématiciens qui ont préconisé l'adoption de ce système sont souvent qualifiés de "formalistes". Mais en fait, la quasi-totalité des mathématiciens d'aujourd'hui, autres que les logiciens, ont totalement cessé de se soucier de ces questions ; ils raisonnent sur les ensembles comme leurs prédécesseurs du XIX$^{\text{ème}}$ siècle et on ne trouvera jamais dans leurs mémoires des professions de foi "formalistes".

Ils agissent ainsi en toute quiétude, car on s'est rapidement aperçu que les raisonnements dont avaient découlé les "antinomies" ne se rencontraient jamais dans la pratique des mathématiciens ; ceux-ci avaient toujours respecté les règles de ZF sans le savoir, comme M. Jourdain faisait de la prose !

3°) Depuis le début du siècle, les logiciens ont obtenu toute une série de résultats aussi extraordinaires qu'imprévus, dont on peut dire que la teneur générale a été de rappeler les mathématiciens à plus de modestie. Nous savons maintenant qu'espérer, comme Hilbert, démontrer la non-contradiction des mathématiques était une prétention exorbitante ; et nous avons cessé de croire que nous avons une idée claire de l'infini depuis que Gödel et P. Cohen nous ont montré qu'il y a une infinité de "Théories des ensembles", également possibles et deux à deux incompatibles. Mais si ce sont là des conquêtes majeures du point de vue philosophique, il faut aussi reconnaître que leurs répercussions sur la pratique journalière des mathématiciens ont été quasi-nulles ; mis à part quelques résultats de Topologie générale, très éloignés des applications à d'autres branches, dans les 24 rubriques (autres que la Logique mathématique et la Théorie des ensembles) que j'ai mentionnées au début de cette conférence, il est impossible d'en déceler la moindre trace. Tout ce qu'ont fait les logiciens depuis 1925 (théorie de la démonstration, logique du second ordre, logiques modales, logiques à plus de 2 valeurs, etc. ...) disparaîtrait demain que l'on ne s'en apercevrait même pas ; vis-à-vis des autres parties des mathématiques, la Logique et la Théorie des ensembles sont devenues des disciplines marginales.

4°) La position des "formalistes" au sujet des rapports des mathématiques et de la "réalité" consiste à ne pas en avoir : suivant la formule de Bourbaki, "libre à chacun de penser ce qu'il voudra sur la "nature" des êtres mathématiques ou la "vérité" des théorèmes qu'il utilise, pourvu que ses raisonnements puissent être transcrits dans le langage commun (c'est-à-dire le système ZF)". On sait qu'il y a un petit groupe de mathématiciens (intuitionnistes, constructivistes, etc. ...) qui n'adoptent pas ce point de vue et ont un système de valeurs qui leur fait accepter ou rejeter tel ou tel mode de raisonnement au nom d'un "sens" qu'il devrait avoir et qui varie d'ailleurs suivant les écoles. Une vérification aisée (par exemple en consultant Mathematical Reviews) montre que sur 1500 travaux recensés chaque mois, 2 ou 3 en moyenne sont dus à des mathématiciens de ces écoles.

5°) ces faits permettent de dire en toute objectivité qu'il n'y a aucune "crise des fondements" perceptible dans la littérature mathématique actuelle.

Mais on peut aller plus loin et soutenir qu'en réalité il n'y a jamais eu de "crise des fondements", même dans la période des controverses les plus vives, que l'on place généralement entre 1895 et 1930. Qu'à cette époque il y ait eu dans la communauté mathématique (contrairement à ce qui se passe aujourd'hui) un sentiment de malaise très répandu, ce n'est pas niable ; mais il concernait essentiellement les rapports des notions et raisonnements mathématiques avec les autres démarches de la pensée, et non les progrès des mathématiques proprement dites. Il suffit pour s'en convaincre de rappeler les grandes nouveautés de cette période, qui en font une des plus fertiles de l'histoire : corps de classes, représentations linéaires des groupes, théorie des groupes de Lie semi-simples, Topologie générale, Topologie algébrique, espaces vectoriels topologiques, Intégration, théorie spectrale des opérateurs ; parler de "crise" dans ces conditions est un défi au bon sens.

Ce serait encore plus ridicule à présent. Comme je l'ai déjà écrit, il y a eu en mathématiques plus de résultats nouveaux et de méthodes nouvelles depuis 1940 que de Thalès à 1940 ; aucun ralentissement n'est décelable à l'heure actuelle et rien ne nous interdit d'avoir confiance en l'avenir des mathématiques, tant que subsisteront les formes actuelles de civilisation.