Le haut du Panier (Jacques Chemla, Marseille, 25.02.2025)

Logarithme d'une somme

La fonction logarithme satisfait l' équation fonctionnelle

$$\log(xy) = \log x + \log y \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le logarithme d'un *produit* s'exprime ainsi en fonction des logarithmes des opérandes (leur somme).

Le logarithme d'une *somme* peut aussi s'exprimer en fonction des logarithmes des opérandes, suivant l'exposé d' Alain Connes [1] :

$$\log(x+y) = \max_{0 \le \alpha \le 1} \left\{ \alpha \log x + (1-\alpha) \log y + S(\alpha) \right\}.$$

$S(\alpha)$ désigne l' entropie de Shannon de la partition $(\alpha, 1-\alpha)$ de l'intervalle unité $[0,1]$:

$$S(\alpha) = -\alpha \log \alpha - (1-\alpha) \log(1-\alpha).$$

Lorsque $\alpha = 0$ ou 1, on considère le comportement à la limite, de sorte que $S(0) = S(1) = 0$, puisque $\lim_{x \to 0^+} x \log x = 0$.

Démonstration

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $0 \le \alpha \le 1$, on a

$$\begin{aligned} \log(x+y) &= \log\left(\alpha \frac{x}{\alpha} + (1-\alpha)\frac{y}{1-\alpha}\right) \\ &\ge \alpha \log\left(\frac{x}{\alpha}\right) + (1-\alpha)\log\left(\frac{y}{1-\alpha}\right) \\ &= \alpha \log x + (1-\alpha) \log y + S(\alpha). \end{aligned}$$

L'inégalité introduite à la deuxième étape résulte de la concavité de la fonction logarithme.

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & \log(x+y) \ge \alpha \log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha) \quad \forall \alpha \in [0,1] \\ \Longrightarrow \quad & \log(x+y) \ge \max_{0 \le \alpha \le 1} \left\{ \alpha \log x + (1-\alpha) \log y + S(\alpha) \right\}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\log(x+y)$ est bien atteinte par le terme de droite pour une valeur de α dans l'intervalle $[0,1]$.

Pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ fixés, on note $f(\alpha) = \alpha \log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha)$ le terme à maximiser.

[1] vers la 74ième minute.

Sa dérivée vaut

$$f'(\alpha) = \log x - \log y - \log \alpha + \log(1-\alpha) = -\log\left(\frac{y}{x}\right) + \log\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right).$$

Elle s'annule lorsque

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\alpha} - 1 \iff \alpha = \frac{1}{1+\frac{y}{x}} = \frac{x}{x+y}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= f\left(\frac{x}{x+y}\right) \\
&= \frac{x}{x+y}\log x + \frac{y}{x+y}\log y - \frac{x}{x+y}\log\left(\frac{x}{x+y}\right) - \frac{y}{x+y}\log\left(\frac{y}{x+y}\right) \\
&= \frac{x}{x+y}\log x + \frac{y}{x+y}\log y - \frac{x}{x+y}(\log x - \log(x+y)) - \frac{y}{x+y}(\log y - \log(x+y)) \\
&= \log(x+y).
\end{aligned}$$

> En résumé, on a
>
> $$\begin{aligned}
> \log(x+y) &= \max_{0\le\alpha\le 1}\left\{\alpha\log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha)\right\}, \\
> \frac{x}{x+y} &= \operatorname*{argmax}_{0\le\alpha\le 1}\left\{\alpha\log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha)\right\}.
> \end{aligned}$$

$+ = (\times, \max)$

En passant à l'exponentielle, on voit qu'il est possible de définir l'addition en fonction de la multiplication et du max :

$$\begin{aligned}
x + y &= e^{\max_{0\le\alpha\le 1}\{\alpha\log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha)\}} \\
&= \max_{0\le\alpha\le 1}\left\{e^{\alpha\log x + (1-\alpha)\log y + S(\alpha)}\right\} \\
&= \max_{0\le\alpha\le 1}\left\{e^{S(\alpha)}x^\alpha y^{1-\alpha}\right\} = \max_{0\le\alpha\le 1}\left\{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\alpha\left(\frac{y}{1-\alpha}\right)^{1-\alpha}\right\}.
\end{aligned}$$

La deuxième étape est justifiée par le fait que l'exponentielle est une fonction croissante.

Conjecture de Goldbach

$$\max_{0\le\alpha\le 1 p,q\in\mathbb{P}}\left\{e^{S(\alpha)}p^\alpha q^{1-\alpha}\right\} \supseteq 2\mathbb{N}_{\ge 2}$$

```python
import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np

P = np.array([3, 5, 7, 11, 13])
alfa = np.linspace(0, 1, 100)[1:-1]  # exclut les extremites 0 et 1 de l intervalle unite
S = -alfa*np.log(alfa) - (1-alfa)*np.log(1-alfa)
w = np.exp(S)
M = np.array([[w[k] * p**alfa[k] * q**(1-alfa[k]) for p in P for q in P] for k in range(len(alfa))])
k = np.argmax(M, axis=0)

axs = plt.figure(figsize=(12, 10)).subplots()
plt.plot(M)
plt.scatter(k, M[k, np.arange(M.shape[1])], c='red')
plt.xlabel('utiliser l entropie pour calculer des sommes')
plt.grid()
plt.show()

```