

NOTICE
SUR LES
TITRES
ET
TRAVAUX SCIENTIFIQUES

de

Jean-Pierre KAHANE
Professeur à l'Université de Paris-Sud

— o —

Référence de ce texte sur le site de l'Académie des Sciences ici :

https://www.academie-sciences.fr/pdf/membre/Kahane_nnotice1981.pdf.

Jean-Pierre KAHANE

Né le 11 décembre 1926 à Paris 12ème

Marié, 3 enfants

11 rue du Val de Grâce, 75005 Paris

Élève à l'Ecole Normale Supérieure, rue d'Ulm 1946-49
Agrégé de mathématiques 1949
Stagiaire, puis attaché au CNRS 1949-1954 (moins l'année de service militaire)
Service militaire 1951-52
Doctorat ès Sciences mathématiques 1954
Maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier 1954-57
Professeur à la Faculté des Sciences de Montpellier 1957-61
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, centre d'Orsay 1961-65
Professeur à la Faculté des Sciences d'Orsay, puis au Centre d'Orsay de l'Université de Paris-Sud
depuis 1965

Charge de cours Peccot et Prix Peccot 1957
Prix Maurice Audin 1960
Prix Carrière de mathématiques 1964
Prix Servant (1/2) 1972
Grand Prix d'Etat des Sciences Mathématiques et Physique 1980

Invitations ou missions à l'étranger

- 1955 Tunis Bucarest
- 1957 Bombay (cours au Tata Institute)
- 1959 Buenos Aires (cours au centre de formation des mathématiciens d'Amérique latine)
Rio de Janeiro Récife
- 1960 Jérusalem
- 1961 Varsovie Aarhus Stanford (cours d'été de l'American Mathematical Society)
Berkeley Madison
- 1962 Jérusalem Stockholm (conférencier au Congrès International des Mathématiciens)
- 1963 Japon Montréal (cours d'été) Princeton (semestre à l'Institut)
- 1964 Alger
- 1965 Stanford Chicago New Orléans Erevan
- 1966 Stanford Sigtuna (Suède; cours à l'école d'analyse harmonique) Moscou
- 1967 Montréal Pologne
- 1968 Warwick
- 1969 Jérusalem Tunis
- 1970 Montréal
- 1971 Stanford Maryland
- 1972 Jablona (Pologne)
- 1973 Madras Rabat Djursholm (Institut Mittag Leffler)
- 1974 Durham Boston Vancouver Sherbrooke
- 1979 Göteborg Durham

- 1980 Madrid Barcelone Wisław (Pologne) Budapest (hommage à F. Riesz et L. Fejér)
Wuhan (Chine) Jérusalem
- 1981 Chicago (hommage à A. Zygmund)
-

Responsabilités diverses :

- Secrétaire Général du Syndicat National de l'Enseignement Supérieur 1962-63
1964-65
- Président de la Société Mathématique de France1972 et 1973
- Président du Comité National Français de mathématiciens1974 - 1978
- Président de l'Université de Paris-Sud 1975 - 1978
- Président de la MIDIST1981 - 1985
(mission interministérielle de l'information scientifique et technique)
- Président de la CIEM 1983 -
(Commission internationale de l'enseignement mathématique)

PUBLICATIONS SCIENTIFIQUES

1947

1. Sur les propriétés des asymptotiques généralisées (complément à un article de M. Bouligand). Revue Scientifique 85 (1947), p. 286. [pdf](#)

1950

1. (avec P. Lalaglie) Quasi-analyticité des fonctions sommes de séries de Fourier lacunaires. C. R. Acad. Sc. Paris 230 (1950), 2250-2252. [pdf](#)

1952

1. Extension du théorème de Carlson et applications. C. R. Acad. Sc. Paris 234 (1952), 2038-2040. [pdf](#)

1953

1. Quasi-analyticité des fonctions moyenne-périodiques. C. R. Acad. Sc. Paris 236 (1953), 569-571. [pdf](#)

1954

1. Sur quelques problèmes d'unicité et de prolongement, relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles. Ann. Inst. Fourier 5 (1955), 39-130. (thèse). [pdf](#)

1955

1. Sur les fonctions sommes de séries trigonométriques absolument convergentes. C. R. Acad. Sc. Paris 240 (1955), 36-37. [pdf](#)

1956

1. Sur certaines classes de séries de Fourier absolument convergentes. J. Math. Pures et Appliquées 35 (1956), 249-259.
2. (avec R. Salem) Sur les ensembles linéaires ne portant pas de pseudomesures. C. R. Acad. Sc. Paris 243 (1956), 1185-1187. [pdf](#)

3. (avec R. Salem) Sur les ensembles de Carleson et Helson. C. R. Acad. Sc. Paris 243 (1956), 1706-1708. [pdf](#)
4. (avec R. Salem) Construction de pseudomesures sur les ensembles parfaits symétriques. C. R. Acad. Sc. Paris 243 (1956), 1986-1988. [pdf](#)

1957

1. Généralisation d'un théorème de S. Bernstein. Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 221-229. [pdf](#)
2. Sur un problème de Littlewood. Proc. Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen 60 (1957), 268-271. [pdf](#)

1958

1. Sur un théorème de Wiener-Lévy. C. R. Acad. Sc. Paris 246 (1958), 1949-1951. [pdf](#)
2. Sur les fonctions moyenne-périodiques bornées. Ann. Inst. Fourier 7 (1958), 293-314. [pdf](#)
3. (avec S. Mandelbrojt) Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson. Ann. Ec. Norm. Sup. 75 (1958), 57-80. [pdf](#)
4. (avec H. Helson) Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables. C. R. Acad. Sc. Paris 247 (1958), 626-628. [pdf](#)
5. (avec W. Rudin) Caractérisation des fonctions qui opèrent sur les coefficients de Fourier-Stieltjes. C. R. Acad. Sc. Paris 247 (1958), 773-775. [pdf](#)
6. (avec R. Salem) Sur la convolution d'une infinité de distributions de Bernoulli. Colloquium Math. 6 (1958), 193-202. [pdf](#)

1959

1. Lectures on mean-periodic functions (rédaction de notes prises en 1957 par P. K. Raman). Tata Inst. Fund. Research, Bombay (1959). (Réédition 1967), 152 p. [pdf](#)
2. Sur le recouvrement d'un cercle par des arcs disposés au hasard. C. R. Acad. Sc. Paris 248 (1959), 184-186. [pdf](#)
3. (avec Y. Katznelson) Sur la réciproque du théorème de Wiener-Lévy. C. R. Acad. Sc. Paris (1959), 1279-1281. [pdf](#)
4. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée. L'Enseignement

Mathématique 5 (1959), 53-57. [pdf](#)

5. Sur un théorème de Paul Malliavin. C. R. Acad. Sc. Paris 248 (1959), 2943-2944. [pdf](#)
6. (avec L. Rubel) Sur les produits canoniques de type nul sur l'axe réel. C. R. Acad. Sc. Paris 248 (1959), 3102-3103. [pdf](#)
7. Sur la totalité des suites d'exponentielles imaginaires. Ann. Inst. Fourier 8 (1959), 273-275. [pdf](#)
8. (avec H. Helson, Y. Katznelson et W. Rudin) The functions which operate on Fourier transforms. Acta Math. 102 (1959), 135-157. [pdf](#)
9. Fonctions qui opèrent dans les algèbres de transformées de Fourier de suites, de fonctions ou de mesures sommables. Sémin. Lelong, exposé 5 (1959), 6 p. [pdf](#)
10. Quelques généralisations de la notion de périodicité (conférence donnée à Recife en octobre 1959). Textos de Mat., Univ. de Recife (1959), 11 p.

1960

1. Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires. Studia Math. 19 (1960), 1-25. [pdf](#)
2. (avec L. Rubel) On Weierstrass products of zero type on the real axis. Illinois J. Math. 4 (1960), 584-592. [pdf](#)
3. Sur la synthèse harmonique dans ℓ^∞ . Anais Acad. Brasileira de Ciencias 32 (1960), 179-189.
4. Séries de Fourier aléatoires. Sémin. Bourbaki, exposé 200 (1960), 10 p. [pdf](#)

1961

1. Teoria constructiva de funciones. Cursos y Seminarios de Matematica 5, (cours donné en 1959), Univ. Buenos Aires (1961), 111 p. [pdf](#)
2. Algebras de convolucion de sucesiones, funciones y medidas sumables. Cursos y Seminarios de Matematica 6, (cours donné en 1959), Univ. Buenos Aires (1961), 89 p. [pdf](#)
3. Sur la divergence presque sûre presque partout de certaines séries de Fourier aléatoires. Ann. Univ. Sc. Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae 3-4 (1960/61), 101-108.
4. Fonctions pseudo-périodiques dans RP. Proc. International Symp. on Linear Spaces, (Jérusalem, July 5-12). Jérusalem Acad. Press (1961), 274-281.

5. Problèmes et remarques sur les carrés de convolution. Colloquium Math. 8 (1961), 263-265.
6. Sur les coefficients de Fourier-Bohr. Studia Math. 21 (1961), 103-106. [pdf](#)
7. Séries de Fourier lacunaires sur des compacts sans intérieur. Sém. Lelong, exposé 6 (1961), 6 p. [pdf](#)
8. Fonctions pseudo-périodiques. Sém. Lelong, exposé 3 (1961), 5 p. [pdf](#)
9. Five lectures :
 - I-II-III Pseudo-periodic functions.
 - IV Some problems on absolutely convergent trigonometric series restricted to compacts sets.
 - V Generalized almost periodic functions.

Cours d'été de l'American Mathematical Society, Stanford 1961, 42 p. (diffusion restreinte).

1962

1. Pseudo-périodicité et séries de Fourier lacunaires. Ann. Ec. Norm. Sup. 79 (1962), 93-150. [pdf](#)
2. Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide. Studia Math. 21 (1962), 231-236. [pdf](#)
3. Transformées de Fourier des fonctions sommables. Proc. International Congress of Mathematicians, Stockholm 1962, 114-131. [pdf](#)
4. Geometrical properties of equipotential surfaces. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 617-618. [pdf](#)
5. Sur les sous-algèbres fermées de $L^1(T)$. C. R. Acad. Sc. Paris 254 (1962), 4415-4416. [pdf](#)
6. Travaux de Beurling et Malliavin. Sém. Bourbaki, 14ème année, 1961/62, no. 225, 13 p. [pdf](#)
7. Espaces de suites. Sém. d'Orsay, 1961/62, 5 exposés, 48 p.

1963

1. (avec R. Salem) Ensembles parfaits et séries trigonométriques. Paris, Hermann, 1963, 192 p.
2. Séries de Fourier aléatoires. Univ. Montréal, Sém. Mathématiques Supérieures, été 1963, 186 p. (réédition 1966).

3. (avec Mary Weiss et Guido Weiss) On lacunary power series. Arkiv för Mat. 5 (1963), 1-26. [pdf](#)
4. (avec Y. Katznelson) Contribution à deux problèmes, concernant les fonctions de la classe A. Israël J. Math. 1 (1963), 110-131.

1964

1. Lacunary Taylor and Fourier series. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 199-213. [pdf](#)
2. Review : Fourier analysis on groups (Walter Rudin). Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 230-232. [pdf](#)
3. Sur les sommes vectorielles $\sum \pm u_n$. C. R. Acad. Sc. Paris 259 (1964), 2577-2580. [pdf](#)
4. (avec R. Salem) Distribution modulo 1 and sets of uniqueness. Bull. Amer. Math. Soc. 70 (1964), 259-261. [pdf](#)
5. Sur les mauvaises répartitions modulo 1. Ann. Inst. Fourier 14 (1964), 519-526. [pdf](#)
6. (avec Paul Malliavin) Appendice au livre de Gelfand, Raikov, Chilov, in “Les anneaux normés commutatifs”, par I. M. Gelfand, D. A. Raikov et G. E. Chilov, Paris, Gauthier-Villars, 1964, 235-256.
7. Sur la répartition de $\{\lambda_j u\}$ modulo 1. Sém. Dubreil-Pisot, 17ème année, 1963/64, no. 20, 4 p.

1965

1. (avec Masako et Shin-Ichi Izumi) Théorèmes élémentaires sur les séries de Fourier lacunaires. J. Anal. Math., Jérusalem, 14 (1965), 235-246.
2. (avec H. Helson) A Fourier method in diophantine problems. J. Anal. Math., Jérusalem, 15 (1965), 245-262. [pdf](#)
3. Séries de Taylor aléatoires gaussiennes dans le disque unité. Sobremennye problemy teorii analiticeskikh funkci, Erévan 1965, 156-176.
4. (avec Y. Katznelson) Sur les séries de Fourier uniformément convergentes. C. R. Acad. Sc. Paris 261 (1965), 3025-3028. [pdf](#)
5. (avec B. Mandelbrot) Ensembles de multiplicité aléatoires. C. R. Acad. Sc. 5. Paris 261 (1965), 3931-3933. [pdf](#)
6. (avec A. Zygmund) Introduction aux Œuvres de Raphaël Salem. Paris, Hermann, 1965, 19-39.

7. Algèbres tensorielles et analyse harmonique. Sémin. Bourbaki, 17^{ème} année, 1964/65, no. 291, 17 p. [pdf](#)

1966

1. Idempotents and closed subalgebras of $A(Z)$. Function Algebras (conference in Tulane 1965, F. Birtel editor), 1966, 198-207.
2. On the construction of certain bounded continuous functions. Pacific J. Math. 16. (1966), 129-132. [pdf](#)
3. Norbert Wiener et l'analyse de Fourier. Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966), 42-47. [pdf](#)
4. Images browniennes des ensembles parfaits. C. R. Acad. Sc. Paris 263 (1966), 613-615. [pdf](#)
5. Images d'ensembles parfaits par des séries de Fourier gaussiennes. C. R. Acad. Sc. Paris 263 (1966), 678-681. [pdf](#)
6. Sommes partielles des séries de Fourier d'après L. Carleson. Sémin. Bourbaki, 18^{ème} année, 1965/66, no. 310, 17 p. [pdf](#)
7. Ensembles de Ryll-Nardzewski et ensembles de Helson. Colloquium Math. 15 (1966), 87-92. [pdf](#)
8. (avec Y. Katznelson) Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques. Studia Math. 26 (1966), 305-306. [pdf](#)

1967

1. Another theorem on bounded analytic functions. Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 827-831. [pdf](#)
2. Remarks on a theorem of Erdős. Proc. London Math. Soc. 17 (1967), 315-318.
3. Sur le théorème de Beurling-Pollard. Math. Scand. 21 (1967), 71-79. [pdf](#)
4. Une nouvelle réciproque du théorème de Wiener-Lévy. C. R. Acad. Sc. Paris 264 (1967), 104-106. [pdf](#)
5. Sur les réarrangements des suites de coefficients de Fourier-Lebesgue. C. R. Acad. Sc. Paris 265 (1967), 310-312. [pdf](#)
6. Quotients de fonctions définies-négatives (d'après Beurling et Deny). Sémin. Bourbaki, 19^{ème} année, 1966/67, no. 315, 11 p., 1968. [pdf](#)

1968

1. Some random series of functions. Heath Mathematical Monographs, 1968, 184 p.
2. Sur les séries de Fourier à coefficients dans P . Proc. of the conference held at Southern Illinois Univ., Edwardsville, April 27-29, 1967. Edited by Deborah Tepper Haimo, Southern Illinois Univ. Press, 1968, 257-272.
3. Sur les ensembles ultrakroneckeriens. Colloquium Math. 19 (1968), 261-263. [pdf](#)
4. Une remarque sur les séries de Rademacher et les domaines d'holomorphie. Colloquium Math. 19 (1968), 107-110.
5. (avec W. Żelazko) A characterization of maximal ideals in commutative Banach algebras. Studia Math. 29 (1968), 339-343. [pdf](#)
6. (avec Y. Katznelson) Lignes de niveau et séries de Fourier absolument convergentes. Israël J. Math. 6 (1968), 346-353.
7. Sur les ensembles tangents par translation. C. R. Acad. Sc. Paris 267 (1968), 437-439. [pdf](#)
8. Sur les réarrangements de fonctions de la classe A . Studia Math. 31 (1968), 287-293. [pdf](#)
9. Brownian motion and harmonic analysis. Lecture course given at the summer school in harmonic analysis, Univ. of Warwick, 1-13 July 1968, 35 p. [pdf](#)

1969

1. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. Enseignement Math. 15 (1969), 185-192. [pdf](#)
2. Approximation par des exponentielles imaginaires; ensembles de Dirichlet et ensembles de Kronecker. Abstract spaces and approximation. ISNM 10 (1969), 190-202.
3. A metric condition for a closed circular set to be a set of uniqueness. J. Approx. Theory 2 (1969), 233-246. [pdf](#)

1970

1. Séries de Fourier absolument convergentes. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Band 50. Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1970, 169 p.
2. (avec Y. Katznelson) Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle. J. Anal. Math., Jérusalem, 23 (1970), 185-197.

3. Sur certains ensembles de Salem. *Acta Math. Acad. Sc. Hungaricae* 21 (1970), 87-89.
4. Courbes étranges, ensembles minces. *Bull. Assoc. Prof. Math. Ens. Public* 275-276 (1970), 325-339.

1971

1. The technique of using random measures and random sets in harmonic analysis. *Advances in Probability and related topics*, edited by P. Ney, vol. 1 (1971). New York, M. Dekker, 67-101.
2. Sur la distribution de certaines séries aléatoires. *Colloque Th. Nombres* (1969, Bordeaux). *Bull. Soc. Math. France*, mémoire 25 (1971), 119-122. [pdf](#)
3. Sur certaines classes d'ensembles parfaits linéaires. *Revista Union Mat. Argentina* 25 (1971), 277-297.
4. (avec Y. Katznelson) Sur le comportement radial des fonctions analytiques. *C. R. Acad. Sc. Paris* 272 (1971), 718-719. [pdf](#)
5. Some thin sets in harmonic analysis. *Univ. Maryland* (1971), (notes d'un cours donné dans l'automne 1971), 65 p.

1972

1. (avec H. Helson) Compact groups with ordered duals III. *J. London Math. Soc.* 4 (1972), 573-575. [pdf](#)
2. Projection métrique de $L^1(T)$ sur des sous-espaces fermés invariants par translation. *Proc. Conf. on "Linear operators and approximation"* in Oberwolfach, August 14-22, 1971. *INSM* 20 (1972), 302-309.
3. (avec Y. Katznelson) Sur les coefficients des séries de Fourier dont les sommes partielles sont positives sur un ensemble. *Studia Math.* 44 (1972), 555-562. [pdf](#)

1973

1. Случайные функциональные ряды. Библиотека Сборника "Математика". Москва, 1973. (traduction de "Some Random series of fonctions", avec compléments).
2. Idéaux primaires fermés dans certaines algèbres de Banach de fonctions analytiques. *Actes de la Table Ronde Internationale (l'Analyse Harmonique dans le domaine complexe)* tenue à Montpellier du 11-15 sept. 1972. Springer-Verlag, *Lecture Notes in Math.* 336 (1973), 5-14.
3. Projections métriques dans $L^1(T)$. *C. R. Acad. Sc. Paris* 276 (1973), 621-623. [pdf](#)

4. Sur les séries de Dirichlet 5. C. R. Acad. Sc. Paris 276 (1973), 739-742. [pdf](#)
5. (avec Y. Katznelson) Sur les ensembles d'unicité $U(\varepsilon)$ de Zygmund. C. R. Acad. Sc. Paris 277 (1973), 893-895. [pdf](#)

1974

1. Séries trigonométriques. Encyclopedia Universalis (1974), 900-903.
2. Two problems on H^p classes, Symposium on Complex Analysis, Canterbury 1973, edited by J. Clunie and W. K. Hayman, Cambridge Univ. Press 1974. London Math. Soc. Lecture Note Series 12, 93-95.
3. Sur l'irrégularité locale du mouvement brownien. C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 331-333. [pdf](#)
4. Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot. C. R. Acad. Sc. Paris 278 (1974), 621-623. [pdf](#)
5. Best approximation in $L^1(T)$. Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 788-804. [pdf](#)
6. Les opérateurs de Toeplitz et la meilleure approximation. ISNM 25 (1974), 323-326.
7. (avec Michael J. Collins) Une remarque sur les points de Steiner. Bull. Sc. Math. 98 (1974), 249-250.

1975

1. Sur le théorème de superposition de Kolmogorov. J. Approx. Theory 13 (1975), 229-234.
2. Mesures et dimensions. Springer Verlag. Lecture Notes in Math. 565 (1975), 94-103.
3. A central object in mathematics : the brownian motion. Historia Math. 2 (1975), 595-600.

1976

1. Абсолютно сходящиеся ряды. Издательство "МИР". Москва 1976, 204 p. (traduction de "Séries de Fourier absolument convergentes", avec compléments).
2. Brownian motion and classical analysis. Bull. London Math. Soc. 8 (1976), 145-155. [pdf](#)
3. (avec Ch. Fefferman et E. Stein) O dorobku naukowym Antoniego Zygmunta (Sur l'œuvre scientifique de Antoni Zygmund). Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, seria II (1976), 91-126.

4. (avec Jacques Peyrière) Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot. *Advances Math.* 22 (1976), 131-145. [pdf](#)
5. Comments on Norbert Wiener Collected Works, vol. I (1976).
6. Sur les zéros et les instants de ralentissement du mouvement brownien. *C. R. Acad. Sc. Paris* 282 (1976), 431-433. [pdf](#)

1977

1. (avec Karel de Leeuw et Yitzhak Katznelson) Sur les coefficients de Fourier des fonctions continues. *C. R. Acad. Sc. Paris* 285 (1977), 1001-1003. [pdf](#)

1978

1. (avec Yitzhak Katznelson) Mauvaise approximation par polynômes trigonométriques dans certaines algèbres de convolution. *Israël J. Math.* 31 (1978), 217-223. [pdf](#)

1979

1. Sur les fonctions de type positif et de type négatif. *Sém. Anal. Harmonique 1978/79*, 17 p.

1980

1. Sur le treizième problème de Hilbert, le théorème de superposition de Kolmogorov et les sommes algébriques d'arcs croissants. *Actes du Congrès d'Analyse Harmonique à Iraklion (1978)*. Springer Verlag, *Lecture Notes in Math.* 781 (1980).
2. The 13th Hilbert problem and analytic functions. *Proceedings London Math. Soc. Conf. in Durham (1979)*, *Aspects of contemporary complex analysis* (D. A. Brannan and J. G. Clunie editors), Acad. Press 1980, 435-438.
3. Sur les polynômes à coefficients unimodulaires. *Bull. London Math. Soc.* 12 (1980), 321-342. [pdf](#)
4. Polynômes à coefficients unimodulaires sur le cercle unité. *Sém. Anal. Fonct. 1979/80*, exposé no. 9. École Polytechnique, 1980, 10 p.

1981

1. (avec Yitzhak Katznelson) Homéomorphismes du cercle et séries de Fourier absolument convergentes. *C. R. Acad. Sc. Paris* 292 (1981), 271-273. [pdf](#)
2. (avec Sergeï V. Hruščev et Yitzhak Katznelson) Mouvement brownien et séries de Fourier absolument convergentes. *C. R. Acad. Sc. Paris* 292 (1981), 389-391. [pdf](#)

3. Leopold Fejér et l'analyse mathématique au début du xxe siècle. Cahiers Sém. Histoire Math. 2 (1981), 67-84. [pdf](#)
4. Le mouvement brownien comme objet mathématique. Sém. Analyse Harmonique 1979/1980, Orsay, 27 p. [pdf](#)

À paraître

1. (avec Yitzhak Katznelson) Séries de Fourier des fonctions bornées. Volume dédié à Paul Turan, édité par l'Acad. Sc. Hongrie.
2. Hélices et quasi-hélices. Volume dédié à Laurent Schwartz.
3. Hilbert's 13th problem Et mødested for algebra, analyse og geometri (le 13e problème de Hilbert : un carrefour de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie). À paraître dans Normat (Nordisk Matematisk Tidskrift no. 3), Kristiansand. [pdf](#)
4. Cours professé à l'Université de Wuhan (Chine) : I. Hélices, II. Processus gaussiens, III. Mouvement brownien. Octobre 1980.
5. (avec Leon Brown) A note on the Pompeiu problem for convex domains. [pdf](#)
6. Sur les séries de Taylor et les transformations de Möbius. À paraître dans Monatshefte für Mathematik. [pdf](#)

Publications plus récentes

Enseignement mathématique, ordinateurs et calculettes. [1986](#)

Le rôle des algèbres A de Wiener, A^∞ de Beurling et H^1 de Sobolev dans la théorie des nombres premiers généralisés de Beurling, Annales de l'institut Fourier, tome 48, no 3 (1998), p. 611-648. [1998](#)

Probabilities and Baire's theory in harmonic analysis, dans J.S. Byrnes (eds), Twentieth century in harmonic analysis - a celebration, (2001), p. 57-72. [2000](#)

(avec Aurélia Fraysse, Stéphane Jaffard) Quelques propriétés génériques en analyse, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 340 (2005) 645–651. [2005-1](#)

Sur l'équation fonctionnelle $\int_{\mathbb{T}} (\psi(t+s) - \psi(s))^3 ds = \sin t$, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 341 (2005) 141–145. [2005-2](#)

(avec Yitzhak Katznelson) Entiers aléatoires, ensembles de Sidon, densité dans le groupe de Bohr et ensembles d'analyticité, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 345 (2007) 21–24. [2007](#)

(avec Jean Bourgain) Sur les séries de Fourier des fonctions continues unimodulaires, Annales de l'Institut Fourier, Tome 60, no 4 (2010), p. 1201-1214. [2010-1](#)

(avec Jean Bourgain, Laurent Clozel) Principe d'Heisenberg et fonctions positives, Annales de l'Institut Fourier, Tome 60, no 4 (2010), p. 1215-1232. [2010-2](#)

Idempotents et échantillonnage parcimonieux, Comptes Rendus. Mathématique, Volume 349 (2011) no. 19-20, pp. 1073-1076. [2011](#)

Variantes sur un théorème de Candès, Romberg et Tao, Annales de l'Institut Fourier, Tome 63, no 6 (2013), p. 2081-2096. [2013](#)

Conditions pour que les entiers de Beurling aient une densité, Journal de Théorie des nombres de Bordeaux, Tome 29, no 2 (2017), p. 681-692. [2017](#)

Les sciences mathématiques à l'aube du 21e siècle, Travaux mathématiques, Fascicule XV, 2004, 197-209. [pdf](#)

“Entretien avec Jean-Pierre Kahane”, La revue pour l'histoire du CNRS, 12, 2005,
<http://journals.openedition.org/histoire-cnrs/1343> [pdf](#)

Séries de Fourier, séries de Taylor, séries de Dirichlet ; un aperçu de l'importance des travaux des mathématiciens français dans la période 1880-1910. [pdf](#)

Sur trois notes de Stieltjes relatives aux séries de Dirichlet, Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6e série, tome S5 (1996), p. 33-56. [pdf](#)

Sur l'exemple d'Euler d'une fonction complètement multiplicative de somme nulle, L'enseignement mathématique, 63 (2017). [pdf](#)

Le retour de Fourier, texte pour l'Académie des Sciences, [pdf](#)

Coup d'œil sur l'analyse de Fourier, [pdf](#)

Tribune libre : Naissance et postérité de l'intégrale de Lebesgue [pdf](#)

Une formule de Fourier sur les nombres premiers, Gazette des mathématiciens, Soc. Math. France, 67, janvier 1996, 3-9. [pdf](#)

Le nombre cet inconnu, Assises de mathématiques, Poitiers, 2 avril 1999, [pdf](#)

Nombres et figures, définitions et énoncés, Exposé à l'Académie des sciences, le 14 mars 2017, dans le cadre de la Semaine des Mathématiques 2017 sur le thème “Mathématiques et Langage”. [pdf](#)

(avec Éric Saias) On Euler's example of a completely multiplicative function with sum 0, Comptes Rendus Mathématique, 2016, 10.1016/j.crma.2016.03.009. hal-01304311 [pdf](#)

PRÉSENTATION DES TRAVAUX

La rédaction de cette notice m'a été proposée comme devoir de vacances. Elle s'est présentée pour moi comme une évocation de souvenirs. Le plan en est assez vague. Je pars de mes premiers travaux, où se mêlent quasi-analyticité, problèmes de prolongement, sommes d'exponentielles, fonctions d'une variable complexe, spectres lacunaires et diverses généralisations de la périodicité. Puis je passe à l'algèbre A de Wiener et ce qui pour moi s'y rattache. Et je termine par les séries et ensembles aléatoires et le mouvement brownien, avec un appendice sur le point de vue de Baire. Mon style étant généralement abscons, mes efforts pour l'humaniser ont abouti à quelques fioritures et ornements que j'espère n'être pas trop hors de propos.

Orsay, le 30 septembre 1981

En 1950, il était permis à un étudiant en mathématiques d'être incroyablement ignorant. C'était mon cas, et il m'en reste une grande naïveté dans beaucoup de domaines importants. Mais j'avais et j'ai conservé le goût des problèmes - c'était le bon côté de l'enseignement de cette époque -.

Il y avait de très bons professeurs à la Sorbonne et à l'École Normale ; certains m'inspiraient une familiarité désinvolte, d'autres une crainte respectueuse ; je ne désirais pas travailler avec eux. J'avais suivi des cours de Raphaël Salem, alors professeur au M.I.T., sur les séries trigonométriques ; j'ai collaboré avec lui quelques années plus tard de manière très stimulante ; en 1949, lorsque je suis entré comme stagiaire au C.N.R.S., il n'en était pas question. C'est Szolem Mandelbrojt qui m'a mis sur les chemins de la recherche.

L'analyse mathématique, telle que la pratiquait S. Mandelbrojt, n'avait pas grand chose à voir avec ce qu'un auteur célèbre de l'époque appelait "les structures fondamentales de l'analyse". L'analyse "réelle", l'analyse "complexe", les fonctions indéfiniment dérivables, les séries trigonométriques, les séries de Taylor, les séries de Dirichlet, la théorie de l'approximation y étaient inextricablement mêlées. Pour la première fois avec S. Mandelbrojt, j'ai eu le sentiment de la forêt vierge, avec ses problèmes entrelacés, son fouillis foisonnant d'idées et de méthodes, sa richesse luxuriante, et aussi la difficulté d'entrer là-dedans. En fait, au cours de plus de trente ans, j'ai découvert sans cesse de nouvelles merveilles dans ce qu'on appelle l'analyse classique c'est-à-dire l'analyse que connaissaient ou qu'auraient pu connaître Hadamard et Lebesgue. Car le plus étrange avec cette forêt vierge est qu'elle n'est pas vierge du tout ; c'est l'œuvre croisée de cent jardiniers. De temps en temps, une équipe de jardiniers tente d'y mettre un peu d'ordre ; cela dessine de nouvelles perspectives et introduit de nouveaux points de vue. En 1950 justement, la tendance semblait être à l'ordonnement à la française. Bourbaki avait tracé de grandes allées ; le parc venait d'être ouvert au public, et il était si beau que certains pouvaient croire ce cadre fixé pour l'éternité. Par exemple, il me semblait que l'analyse était linéaire, ou n'était pas avant Bourbaki, c'est Banach qui avait développé cette perspective magnifique et trompeuse, par un traité qui a marqué tous les analystes du siècle. J'étais sous cette grande influence quand S. Mandelbrojt m'a révélé son coin de forêt, avec son histoire et ses recoins cachés. Depuis, la forêt mathématique a repris ses droits, et on sait maintenant qu'il y faut en permanence des milliers d'ouvriers pour l'entretenir et la développer. Du moins, presque tout le monde le sait.

La quasi-analyticité.

Parmi les sujets auxquels S. Mandelbrojt m'a introduit, l'un avait occupé une place importante dans l'analyse au cours du demi-siècle écoulé. C'est la *quasi-analyticité*. On rencontre naturellement, dans la théorie des équations aux dérivées partielles, des fonctions indéfiniment dérivables (on dit maintenant de classe C^∞) dont on sait contrôler la croissance des dérivées : la dérivée $n^{\text{ième}}$ est bornée par un nombre positif $M_{|n|}$ et la suite M_n est donnée ; malgré l'origine du problème, on peut se restreindre à des fonctions d'une variable réelle définie sur un intervalle I ; ainsi

$$(1) \quad |f^{(n)}(x)| \leq M_n \quad (x \in I ; n = 0, 1, \dots).$$

Si $M_n^{1/n} \leq C n$, la fonction f est analytique ; elle est parfaitement déterminée par sa série de Taylor en un point de I . Si $M_n^{1/n} = n^\alpha$ avec $\alpha > 1$, il n'en est plus ainsi : il existe plusieurs fonctions f ,

vérifiant (1), et ayant même série de Taylor en un point. À quelle condition, portant sur M_n , est-il vrai que f soit bien définie par sa série de Taylor

$$(2) \quad \sum_0^{\infty} \frac{(x - x_0)^{(n)}}{n!} f^{(n)}(x_0) \quad (x_0 \in I) ?$$

En d'autres termes, à quelle condition une fonction f vérifiant (1) est-elle bien définie par la suite $\{f^{(n)}(x_0)\}$ ($n = 0, 1, \dots$) (cela n'a rien à voir avec la convergence de la série (2)) ? C'était là un problème d'Hadamard - le problème de quasi-analyticité. La solution (Denjoy, Carleman) est restée longtemps assez mystérieuse : c'est la divergence de la série $\sum M_n^{1/n}$, moyennant une condition de régularité sur la suite $\{M_n\}$. On est tenté d'appeler *quasi-analytiques* les fonctions f vérifiant (1) lorsque la suite $\{M_n\}$ vérifie la condition de Denjoy et Carleman, et on pourrait s'attendre à ce que la somme de deux fonctions quasi-analytiques soit quasi-analytique. Mais il n'en est rien : Mandelbrojt a découvert que n'importe quelle fonction de classe C^∞ est la somme de deux fonctions quasi-analytiques au sens donné ci-dessus. Depuis la découverte de Mandelbrojt, on ne s'est plus intéressé aux *fonctions* quasi-analytiques, mais aux *classes de fonctions* quasi-analytiques. Par exemple, la classe $\mathcal{C}(\{M_n\}, I)$ constituée par les fonctions f satisfaisant (1) et les multiples scalaires de ces fonctions est quasi-analytique moyennant la condition de Denjoy et Carleman.

Son lien à l'analyse de Fourier

Sans rien perdre d'essentiel, on peut supposer que l'intervalle I est la droite entière. De manière assez surprenante, la quasi-analyticité apparaît alors comme un problème d'analyse de Fourier. Il y a au moins deux manières de la voir.

La première est due à Carleman. Elle consiste, pour une fonction f bornée sur la droite, à introduire les fonctions analytiques

$$F^-(w) = \int_0^{\infty} f(x)e^{-ixw} dx \quad (w = u + iv, v < 0)$$

$$F^+(w) = - \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-ixw} dx \quad (w = u + iv, v > 0),$$

respectivement définies dans le demi-plan inférieur et le demi-plan supérieur. C'est le couple (F^+, F^-) que Carleman appelle transformée de Fourier de f ; nous l'appellerons transformée de Carleman. Formellement, la transformée de Fourier usuelle est $F^-(u) - F^+(u)$. Si, dans un sens à préciser, f est petite au voisinage de 0, les fonctions F^+ et F^- sont petites à l'infini dans la direction verticale. Si, de plus, f appartient à une classe $\mathcal{C}(\{M_n\}, \mathbb{R})$, les fonctions F^+ et F^- sont petites à l'infini dans toutes les directions, et la suite $\{M_n\}$ contrôle leur comportement à l'infini. La condition de Denjoy et Carleman entraîne que les fonctions F^+ et F^- sont nulles, donc que f aussi est nulle, dès que f vérifie (1) et que $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0$. On voit ainsi que la condition de Denjoy et Carleman entraîne la quasi-analyticité.

Or, toute hypothèse sur le spectre de Fourier de f se traduit par une information intéressante sur le couple (F^+, F^-) : ces fonctions, définies respectivement dans le demi-plan supérieur et dans le demi-plan inférieur, communiquent analytiquement à travers les lacunes du spectre de f . La méthode même de Carleman suggère de nouveaux problèmes de quasi-analyticité, faisant intervenir le spectre de f . C'est une bonne manière de voir les travaux de Mandelbrojt sur séries de Fourier

et classes quasi-analytiques.

La seconde est due à Mandelbrojt. Si f appartient à $\mathcal{C}(\{M_n\}, \mathbb{R})$, et si φ est une fonction intégrable sur \mathbb{R} , la convolution

$$g(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)\varphi(x)dx$$

appartient à $\mathcal{C}(\{M_n\}, \mathbb{R})$. Si cette classe est quasi-analytique, et si l'on a

$$g^{(n)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(x)\varphi(x)dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

on a $g(t) = 0$ pour tout t . Cela signifie que toute translatée de f est approchable par des combinaisons linéaires de dérivées de f , dans la topologie convenable (la topologie "faible" des fonctions bornées sur la droite, qu'on désigne par $\tau(L^\infty(\mathbb{R}), L^1(\mathbb{R}))$). En d'autres termes, dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R})$ muni de la topologie faible, le sous-espace vectoriel fermé engendré par les dérivées de f , $\delta(f)$, et le sous-espace vectoriel fermé engendré par les translatées de f , $\tau(f)$, coïncident. L'égalité

$$\delta(f) = \tau(f)$$

peut servir de définition à la quasi-analyticité de f ; on obtient ainsi les fonctions quasi-analytiques au sens de Denjoy-Carleman, et aussi d'autres fonctions de classe C^∞ . Les nouvelles classes quasi-analytiques dépendent à la fois de $\{M_n\}$ et d'une information sur $\tau(f)$. Or l'étude de $\tau(f)$ est typique de l'analyse harmonique; par exemple, le spectre d'une fonction f bornée sur la droite est l'ensemble des λ tels que la fonction $\exp(i\lambda x)$ appartienne à $\tau(f)$. On obtiendra de nouvelles classes quasi-analytiques en associant les conditions

$$(3) \quad |f^{(n)}(x)| \leq K M_n \quad (x \in \mathbb{R}; n = 0, 1, \dots; K = K(f))$$

et

$$(4) \quad \text{Spectre } f \subset \Lambda$$

moyennant des conditions à découvrir entre $\{M_n\}$ et Λ . J'indiquerai tout à l'heure certains résultats définitifs que j'ai obtenus dans cette voie.

Les fonctions moyenne-périodiques.

Ce problème de quasi-analyticité généralisée est susceptible de nombreuses variantes. La plus intéressante est de considérer, au lieu des fonctions bornées sur la droite, l'espace de toutes les fonctions continues sur la droite, muni de la topologie naturelle. Dans ce cadre, L. Schwartz, inspiré par J. Delsarte, avait appelé moyenne-périodiques les fonctions f telles que $\tau(f)$ ne soit pas l'espace entier, et spectre d'une fonction f moyenne-périodique l'ensemble des λ complexes tels que $\exp(i\lambda x)$ appartienne à $\tau(f)$; par exemple, la fonction e^x est moyenne périodique et son spectre est constitué par le point $-i$; la fonction $P(x)e^x$, où $P(x)$ est un polynôme de degré p , est aussi moyenne périodique et son spectre est constitué par le point $-i$, compté avec la multiplicité p . En

1947, dans un important mémoire, il avait montré que les fonctions moyenne-périodiques d’une variable réelle admettent la synthèse spectrale, c’est-à-dire que toute fonction f moyenne-périodique est approchable par des combinaisons linéaires finies

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} P(x)e^{i\lambda x}$$

λ appartenant au spectre de f , et $P(x)$ étant un polynôme (dépendant de λ) dont le degré est strictement inférieur à la multiplicité de λ dans le spectre.

Quasi-analyticité et fonctions moyenne-périodiques.

Dans ma thèse (1954), j’ai décidé de traiter la quasi-analyticité généralisée dans le cadre des fonctions moyenne-périodiques. L’essentiel est de donner une nouvelle définition de la transformée de Carleman : c’est une fonction méromorphe, quotient de deux fonctions entières de type exponentiel associées à f par un procédé convenable. Elle joue le même rôle que la transformée de Fourier. Obtenir la transformée de Carleman à partir de la fonction f , c’est l’analyse harmonique de f . Reconstruire f à partir de la transformée de Carleman, c’est la synthèse harmonique. Grâce à cet outil, le théorème de synthèse de L. Schwartz se démontre en quelques pages. Le problème de quasi-analyticité de Mandelbrojt, et ses variantes, se traduisent en questions sur le comportement à l’infini d’une fonction méromorphe dont on connaît les pôles avec leur multiplicité. Voici un exemple de solution : si Λ est réelle, symétrique par rapport à 0, soit $\Lambda = \{\lambda_n\}$ avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ et $\lambda_{-n} = -\lambda_n$, la classe $\mathcal{C}(M_n) \cap \mathcal{C}_\Lambda$ (définie par (3) et (4)) est quasi-analytique dès que

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n+1}} = 0.$$

Pour certaines suites Λ , il existe une transformée de Carleman extrémale, qui est une fonction méromorphe à pôles dans Λ et sans zéro. La fonction f_0 correspondante a des propriétés extrémales intéressantes dans \mathcal{C}_Λ ensemble des fonctions moyenne-périodiques à spectre dans Λ . C’est “la plus petite fonction de \mathcal{C}_Λ ” au voisinage du point 0 au sens suivant : si f appartient à \mathcal{C}_Λ et si

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\int_0^\alpha |f(x)| dx}{\int_0^\alpha |f_0(x)| dx} < \infty,$$

f est un multiple scalaire de f_0 . C’est aussi la fonction test pour la quasi-analyticité : pour que la classe $\mathcal{C}(M_n) \cap \mathcal{C}_\Lambda$ soit quasi analytique, il faut et suffit que $\mathcal{C}(M_n)$ ne contienne pas f_0 . En application de cela, la condition (5) s’avère une condition nécessaire et suffisante de quasi-analyticité pour les suites Λ lacunaires¹ “à la Hadamard”, c’est-à-dire telles que

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > q > 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

La quasi-analyticité est liée à d’autres problèmes d’unicité, comme la détermination d’une mesure par ses moments, et à l’approximation polynomiale pondérée. S. Mandelbrojt avait étudié ces

1. 1953.1, 1954.1

problèmes à l'aide des "séries adhérentes". J'ai obtenu d'autres éléments de réponse, à l'aide de lemmes sur les fonctions méromorphes dont voici un exemple. On donne deux suites positives Λ_1 et Λ_2 dont les fonctions de densité sont $D_1(t)$ et $D_2(t)$, c'est-à-dire

$$D_j(t) = \frac{1}{t} \text{card}(\Lambda_j \cap [0, t]),$$

et une fonction $k(r)$ à variation bornée ($r > 0$). Alors la condition

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \int_0^r (D_1(t) - D_2(t) - k(t)) \frac{dt}{t} < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction $F(w)$ méromorphe à droite de l'axe imaginaire, non identiquement nulle, nulle sur Λ_1 , ayant ses pôles dans Λ_2 , et vérifiant la majoration

$$\log|F(w)| < \pi r k(r) + O(\log|\theta|) \quad (w = re^{i\theta}).$$

Problèmes de prolongement.²

Enfin, le terme même de quasi-analyticité suggère l'existence d'un prolongement quasi-analytique. Il reste dans ce domaine des questions très simples inexplorées; par exemple, on donne sur un intervalle une fonction dont le spectre est lacunaire - sans connaître ce spectre; comment trouver ce spectre, et prolonger la fonction sur toute la droite? Dans ma thèse et un peu au delà, j'ai étudié deux problèmes de prolongement. Le premier concerne les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle, moyenne-périodiques, dont on connaît le spectre Λ et une propriété P sur un intervalle I ; à quelle condition, portant sur Λ, P, I , est-il vrai que f possède nécessairement la propriété P sur toute la droite? À cette occasion, j'ai introduit la densité uniforme extérieure de $\Lambda, \Delta(A)$ (que j'avais d'abord appelé "densité de répartition") : c'est la borne inférieure des densités des suites Λ' uniformément réparties contenant Λ - en convenant de dire qu'une suite Λ' est uniformément répartie et de densité D si le nombre de ses points sur un intervalle de longueur ℓ ne diffère de $D\ell$ que par une quantité bornée -. Pour beaucoup de propriétés P , la condition $|I| > 2\pi\Delta(\Lambda)$ suffit pour avoir une réponse positive au problème posé. Un excellent cadre pour ce genre de questions est la pseudo-périodicité au sens de Paley et Wiener sur lequel je reviendrai.

Le second problème est, à proprement parler, un problème de prolongement analytique. Étant donné Λ , suite complexe, et G , domaine ouvert dans le plan de la variable complexe, on considère les fonctions $f(z)$, définies sur G , et limites de combinaisons linéaires d'exponentielles $\exp(i\lambda z)$ ($\lambda \in \Lambda$). Peut-on prolonger $f(z)$ dans un domaine plus grand que G , et comment? Cette question avait déjà été étudiée par L. Schwartz dans sa thèse, et par des auteurs soviétiques (A. F. Leontiev surtout). J'ai utilisé une méthode de balayage qui ramenait le problème posé à un problème spécial d'interpolation par des fonctions entières de type exponentiel. Cela permettait de retrouver et d'étendre beaucoup de résultats antérieurs y compris des théorèmes de Mandelbrojt sur le prolongement analytique des séries de Dirichlet. Voici un résultat difficile à obtenir et assez simple à exprimer : toute fonction moyenne-périodique de moyenne-période L , analytique sur la droite, est prolongeable analytiquement dans une bande horizontale (éventuellement un demi-plan sur le plan entier) telle que tout segment de longueur L à la frontière de cette bande contient une singularité.

2. 1954.1

Quand Λ est portée par une demi-droite issue de 0, le prolongement peut avoir lieu dans un demi-plan (on est alors ramené à des séries de Dirichlet), ou dans des domaines contenant des angles d'ouverture aussi voisins qu'on veut de π , mais aucun demi-plan ; la forme de ces domaines a bien été précisée par Aimée Baillelte, qui fut à Montpellier ma première élève.

Quelques suites à ma thèse.³

Je ne suis plus revenu à la quasi-analyticité après ma thèse, sinon en orientant Charles Roumieu vers une généralisation des distributions de L. Schwartz, consistant à prendre les formes linéaires sur des classes de fonctions indéfiniment dérivables. Lorsque les classes contiennent des fonctions à support compact arbitrairement petit, les ultradistributions de Roumieu ont les propriétés les plus utiles des distributions ordinaires. Lorsque les classes sont quasi-analytiques, une partie seulement de ces propriétés est conservée par exemple, le “théorème des supports” de Lions disparaît. On est amené à des questions assez délicates sur les fonctions entières de type exponentiel, du type suivant : que peut-on dire du type d'un produit de telles fonctions, soumises à une majoration donnée sur l'axe réel ? Sur cette question particulière, j'ai obtenu avec L. Rubel des résultats précis.

J'ai également abandonné après ma thèse la théorie générale des fonctions moyenne-périodiques. Le problème de synthèse spectrale des fonctions moyenne-périodiques définies sur \mathbb{R}^n attirait alors l'attention (la thèse de B. Malgrange en témoigne). Il n'y avait aucun espoir d'adapter la transformée de Carleman au cas de plusieurs variables. On sait d'ailleurs maintenant (D. I. Gurevič 1972) que la synthèse spectrale n'a pas lieu pour $n > 1$; cette découverte, qui aurait fait grand bruit quinze ans plus tôt, me semble avoir été accueillie dans l'indifférence générale.

Cependant, c'est sur ce sujet que j'ai donné mon cours au Tata Institute de Bombay en 1957. À cette occasion, j'ai donné un exemple d'une suite Λ réelle, de densité nulle (au sens $\lim_{t \rightarrow \infty} D(t) = 0$), et qui n'est le spectre d'aucune fonction moyenne-périodique. Cela infirmait une conjecture de L. Schwartz - que j'avais cru d'abord démontrer, à savoir que la “moyenne-période” associée à une suite était proportionnelle à sa “densité maximum”. En fait, la “densité” qui intervient dans ce problème est très différente de la densité ordinaire ; elle a été explicitée au début des années 1960 par A. Beurling et P. Malliavin.

Fonctions pseudopériodiques.⁴

J'ai aussi éclairci les relations entre fonctions moyenne-périodiques bornées, fonctions presque-périodiques au sens de Bohr et fonctions pseudo-périodiques au sens de Paley et Wiener. Une fonction moyenne-périodique bornée n'est pas forcément presque-périodique. Par contre, si $\tau(f)$ est constitué de fonctions bornées, f est à la fois presque périodique au sens de Bohr et pseudo-périodique au sens de Paley et Wiener, et son spectre a des propriétés arithmétiques bien spéciales. Ce sujet, que j'avais laissé en friche, a été complètement élucidé par Yves Meyer en 1970 (voir Astérisque no. 1). J'avais, pour ma part, bien exploré la théorie- L^2 correspondante, qui est exactement celle des fonctions pseudo-périodiques de Paley et Wiener : ce sont les fonctions f , localement de carré intégrable, telles que, si I et J sont deux intervalles assez grands ($|I| > \ell$, $|J| > \ell$). on a

3. 1959.6, 1959.1, 1959.7

4. 1958.2, 1958.3

équivalence des normes dans $L^2(I)$ et $L^2(J)$ pour toutes les combinaisons linéaires de translatées de f (c'est-à-dire pour $\tau(f)$). La plus petite valeur de ℓ est la "pseudo-période" de f , et elle ne dépend que de son spectre, Λ . Elle est proportionnelle à la densité uniforme extérieure de Λ . dont j'ai donné la définition plus haut.

Dans cet ordre d'idées, j'ai étudié avec S. Mandelbrojt les distributions presque-périodiques dont à la fois le support et le spectre sont discrets ; elles s'introduisent naturellement à partir de la formule sommatoire de Poisson, et de l'équation fonctionnelle de Riemann. Voici un résultat typique tout intervalle de longueur égale à la densité uniforme intérieure du spectre (définie de la façon qu'on devine) contient au moins un point du support.

La théorie des fonctions pseudopériodiques se développe bien à plusieurs dimensions ; au lieu d'intervalles, on a des domaines associés à Λ qui, dans le cas où Λ est un sous-groupe discret de \mathbb{R}^n , se ramènent aux domaines fondamentaux associés au sous-groupe. J'ai traité quelques problèmes géométriques (épaisseur dans une direction, stabilité des domaines associés) et seulement amorcé d'autres (diamètre), qui restent ouverts.

D'autre part, en restant sur la droite, on peut obtenir des résultats précis dans deux voies. D'abord, on peut remplacer L^2 par d'autres espaces sans changer la valeur de la pseudo-période. Les espaces $\mathcal{F}(L^p(\omega(x)dx))$, où $\omega(x)$ est un poids polynomial et $1 \leq p \leq \infty$ sont de tels espaces ; \mathcal{F} désigne ici la transformation de Fourier. En particulier, les espaces de Sobolev ($p = 2$) et l'algèbre de Wiener $\mathcal{F}L^1$ conviennent. On peut alors interpréter la pseudopériode associée à Λ comme la borne inférieure des longueurs des intervalles I tels que, si une fonction de spectre Λ possède une certaine propriété sur I (telle qu'avoir une dérivée $n^{\text{ième}}$ dans L^2 , ou appartenir localement à $\mathcal{F}L^1$), elle possède la même propriété partout. La pseudo-périodicité est un outil puissant pour étudier ce genre de problèmes, et cela m'a permis de regrouper et d'améliorer un certain nombre de résultats épars dans la littérature sur séries de Fourier.

Spectres lacunaires. ⁵

Ensuite, dans le cas où la pseudo-période est nulle, on peut remplacer les intervalles par des ensembles compacts sans intérieur, du type de l'ensemble de Cantor. Ainsi, quand Λ est une réunion finie de suites lacunaires au sens d'Hadamard, un théorème de Zygmund de 1947 montre que la norme L^2 des fonctions de spectre Λ sur un intervalle est équivalente à leur norme L^2 sur tout ensemble de mesure strictement positive. Je me suis intéressé aux ensembles E de mesure nulle, "associés" à Λ au sens que, pour les fonctions à spectre dans Λ , la borne supérieure du module sur E et la somme des modules des coefficients sont des normes équivalentes. De curieuses propriétés arithmétiques apparaissent alors, analogues à celles que Salem a découvertes dans la classification des ensembles du type de Cantor en ensembles d'unicité et ensembles de multiplicité.

On désigne par E_ξ un ensemble de Cantor correspondant au rapport de direction ξ - cela veut dire que E_ξ se compose de deux portions qui lui sont homothétiques dans le rapport ξ -. On dit que $1/\xi$ est un nombre de Pisot si $0 < \xi < 1$ et que ξ est la seule racine de module strictement inférieur à 1 d'une équation algébrique à coefficients entiers dont le terme constant est 1. Si $1/\xi$ n'est pas

5. 1958.3, 1961.4, 1962.1

un nombre de Pisot, E_ξ est associé au sens précédent à toute suite Λ convenablement lacunaire. Si $1/\xi$ est un nombre de Pisot petit (< 3), E_ξ est associé à toutes les suites $\{\lambda_n\}$ lacunaires à la Hadamard ($\lambda_{n+1} > q\lambda_n$) avec q assez grand, mais il existe une fonction presque périodique dont le spectre est lacunaire à la Hadamard (avec q voisin de 1) qui s'annule sur E_ξ . Si $1/\xi$ est un nombre de Pisot grand (> 7) aucune condition de lacunarité n'assure que E_ξ est associé à Λ ; au contraire, il existe des fonctions presque périodiques

$$f(x) = \sum_0^\infty \alpha_n e^{i\lambda_n x}$$

qui s'annulent sur E_ξ , avec des λ_n croissant aussi vite que l'on veut (c'est-à-dire $\lambda_n > \varphi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})$, où les φ_n sont des fonctions arbitraires).

J'avais appelé⁶ suites de Banach-Szidon les suites Λ telles que les fonctions bornées à spectre dans Λ aient leur série de Fourier absolument convergentes - indépendamment, Szidon et Banach avaient montré à la fin des années 1920 que les suites lacunaires à la Hadamard ont cette propriété, qui est d'ailleurs susceptible de nombreuses formulations équivalentes. Sous le nom d'ensembles de Sidon, elles ont attiré l'attention d'excellents mathématiciens jusque tout récemment (W. Rudin, N. Varopoulos, M.-P. et P. Malliavin, S. Drury auquel est due la démonstration que la réunion de deux ensembles de Sidon est un ensemble de Sidon, Myriam Déchamps, D. Rider, G. Pisier qui a donné de nouvelles caractérisations remarquables). Ma contribution au départ avait été d'indiquer une condition nécessaire pour que Λ soit un ensemble de Sidon : c'est que, pour un $K > 0$ convenable, il y ait au plus Kns points de Λ dans toute "maille" de la forme

$$\left\{ a + \sum_{j=1}^n m_j b_j ; \quad m_j \text{ entiers, } \sum_1^n |m_j| \leq 2^s. \right\}.$$

On ne connaît pas encore de meilleure condition de ce type, et on ne sait pas si elle est suffisante. Pour obtenir cette condition, j'avais utilisé des polynômes trigonométriques aléatoires à plusieurs variables, et une évaluation de leur module maximum par des techniques de Salem et Zygmund. Dans les travaux récents sur ensembles de Sidon, de Drury à Pisier, le lien avec les probabilités s'affirme. C'est un sujet beaucoup plus riche qu'on ne pouvait le prévoir.

La propriété de Sidon des suites lacunaires $\Lambda = \{\lambda_n\}$ est très liée au comportement des suites $\{\lambda_n x\}$ - modulo 1. Prenons par exemple $\lambda_n = \lambda^n$. D'après un célèbre théorème de Koksma, on sait que pour tout x , la suite $\{\lambda^n x\}$ est uniformément répartie modulo 1 pour presque tout λ . Mais, d'autre part, il résulte facilement de la propriété de Sidon que, pour tout λ , il existe des x tels que la suite $\{\lambda^n x\}$ ne soit pas uniformément répartie modulo 1. Plus précisément, il existe de tels x dans tout ensemble associé à la suite $\{\lambda^n\}$. Cette remarque, que j'ai faite avec H. Helson, s'inscrit dans le cadre bien connu des relations entre théorie des nombres et séries de Fourier. Elle a été le point de départ de nouveaux travaux dans ce sens (J.-F. Méla, puis ses élèves B. Host et F. Parreau qui, parallèlement à H. Furstenberg et Y. Katznelson, ont analysé récemment les liens entre suites lacunaires, spectres des mesures, et théorie ergodique). J'ai participé moi-même à ce mouvement; par exemple, j'ai montré que, si un ensemble Λ de nombres réels a la propriété que

6. 1962.1, 1958.2

toute fonction bornée sur Λ est prolongeable sur la droite en fonction presque-périodique, elle est aussi prolongeable en fonction presque périodique dont la série de Fourier converge absolument ; J.-F. Méla a fait ensuite une étude exhaustive des ensembles de ce type.

J'aurai l'occasion de revenir sur les séries trigonométriques lacunaires à propos du mouvement brownien, et des propriétés locales des processus gaussiens stationnaires. Je reviendrai également sur les ensembles du type de Cantor, qui apparaissent en analyse harmonique et en probabilités.

L'algèbre de Wiener.⁷

Je m'attarderai maintenant sur une autre source d'inspiration : c'est l'étude de l'algèbre de Wiener, dont j'ai déjà parlé p. 10. En 1932, à propos de théorèmes "taubériens", N. Wiener avait procédé à l'étude des fonctions transformées de Fourier de fonctions intégrables

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u x} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty.$$

L'ensemble de ces fonctions \widehat{f} est désigné par $A(\mathbb{R})$. De manière analogue, on désigne par $A(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions 1-périodiques sommes de séries trigonométriques absolument convergentes

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{2\pi i n x}, \quad \sum |f_n| < \infty,$$

par $A(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites de coefficients de Fourier des fonctions intégrables sur \mathbb{T}

$$\widehat{f}(n) = \int_{\mathbb{T}} e^{2\pi i n x} f(x) dx, \quad \int_{\mathbb{T}} |f(x)| dx < \infty$$

etc... ; on peut définir $A(G)$ pour tout groupe abélien localement compact, comme transformé de Fourier de l'espace $L^1(\Gamma)$ des fonctions intégrables sur le groupe Γ dual de G . Le produit de deux fonctions de $A(G)$ appartient à $A(G)$; c'est un "anneau normé" au sens de Gelfand (1942) ou, comme on dit maintenant, une "algèbre de Banach". La théorie générale des algèbres de Banach est due à Gelfand, et elle est devenue classique vers 1950 ; j'ai eu la chance, grâce à L. Schwartz, de devoir l'étudier à l'occasion de ma seconde thèse.

Le théorème de Wiener-Lévy et sa réciproque.

Wiener était parti de la question suivante à quelle condition le sous-espace fermé de $L^1(\mathbb{R})$ engendré par les translatées d'une fonction f coïncide-t-il avec $L^1(\mathbb{R})$ entier ? Une condition nécessaire facile à voir est que la transformée de Fourier \widehat{f} ne s'annule pas. Le théorème de Wiener exprime que c'est une condition suffisante. L'essentiel de la démonstration repose sur un lemme qu'on appelle aussi théorème de Wiener et qui s'énonce ainsi : si une fonction \widehat{f} appartient à $A(\mathbb{T})$ et ne s'annule pas, son inverse $1/\widehat{f}$ appartient aussi à $A(\mathbb{T})$. En 1934, Paul Lévy a observé que la démonstration donne aussi un résultat plus général : si \widehat{f} appartient à $A(\mathbb{T})$ et si F est une fonction analytique sur l'ensemble des valeurs prises par \widehat{f} , la fonction $F(\widehat{f})$ appartient à $A(\mathbb{T})$. C'est le théorème de

7. 1965.2, 1964.5, 1966.7

Wiener-Lévy. Paul Lévy posait la question : y-a-t-il d'autres fonctions F que les fonctions analytiques possédant cette propriété, c'est-à-dire "opérant" dans $A(\mathbb{T})$? J'ai lu cet article de Paul Lévy peu après ma thèse, en 1954, et il a eu une grande influence sur mon travail ultérieur. Paul Lévy, dans son ouvrage autobiographique de 1971, m'en attribue la solution. Ce n'est pas tout à fait exact. La réciproque du théorème de Wiener-Lévy "seules les fonctions analytiques opèrent" a été établie par Yitzhak Katznelson en 1958 ; cependant il est vrai que mon rôle dans cette solution n'a pas été insignifiant.

Relation avec la synthèse spectrale.

Les travaux de Katznelson et les miens - que je présenterai tout à l'heure en détail - ont eu un certain retentissement. La première raison est que la solution n'allait pas dans le sens généralement attendu. La seconde, plus importante, c'est qu'ils ont ouvert la voie à d'autres recherches. On pouvait s'attendre à ce qu'une meilleure connaissance des fonctions qui opèrent dans $A(\mathbb{R})$ fasse faire un progrès au problème, alors très en vogue, de la synthèse spectrale dans $L^\infty(\mathbb{R})$. En effet, ce problème concerne la structure des sous-espaces de $L^\infty(\mathbb{R})$ invariants par translation, c'est-à-dire (par dualité) des sous-espaces de $L^1(\mathbb{R})$ invariants par translation, c'est-à-dire (par transformation de Fourier) des idéaux fermés de $A(\mathbb{R})$. Moins il y a de fonctions qui opèrent, moins on doit s'attendre à la synthèse spectrale.

En fait, le lien est loin d'être immédiat. C'est P. Malliavin qui a élucidé la question en 1959. Il a commencé par étudier le "calcul symbolique individuel", c'est-à-dire les fonctions F telles que, pour une fonction $f \in A(G)$ donnée, $F(f)$ appartienne à $A(G)$. Il a ensuite réussi à construire une fonction $f \in A(\mathbb{R})$ pour laquelle on puisse définir $\delta'(f)$ comme un élément du dual de $A(\mathbb{R})$ (δ' étant la dérivée de la mesure de Dirac) ; il est presque évident que $\delta'(t)$ est une distribution portée par l'ensemble des zéros de f , et il reste à vérifier que le produit $f\delta'(f)$ n'est pas nul. L'idée vient naturellement de l'exemple donné par L. Schwartz en 1948 pour $A(\mathbb{R}^3)$; mais alors L. Schwartz utilisait la rotondité de la sphère dans \mathbb{R}^3 , et la manière dont elle se traduisait en analyse de Fourier ; on ne disposait pas encore d'ensembles qui, sur la droite, puissent jouer le rôle de la sphère dans l'espace. Ces travaux de Malliavin ont eu à leur tour une grande importance pour moi. J'ai donné, immédiatement, une version probabiliste de la construction de f (j'étais alors sous l'influence de R. Salem, et bien rompu au jeu des séries de Fourier aléatoires). Bien plus tard, en 1967, j'ai résolu complètement le problème du calcul symbolique individuel, en mariant la méthode que j'avais introduite en 1958 et les algèbres tensorielles de N. Varopoulos ; c'est une version forte de la réciproque au théorème de Wiener-Lévy.

Ma contribution au calcul symbolique.⁸

En 1954, on savait encore peu de choses sur les "fonctions qui opèrent" en dehors du théorème de Wiener-Lévy. Par exemple, il y avait une question fréquemment posée : existe-t-il une fonction f de $A(\mathbb{T})$ telle que sa valeur absolue $|f|$ n'appartienne pas à $A(\mathbb{T})$? Mon premier succès a été la solution de ce problème, par une construction explicite et délicate. (Ce résultat est cité dans les traités de l'époque sur les séries trigonométriques, et il lui est arrivé une plaisante aventure ; dans la traduction anglaise du livre de Nina Bari, je suis crédité de l'énoncé suivant : quand une fonction

8. 1959.5

appartient à $A(\mathbb{T})$, sa valeur absolue *ne peut pas* appartenir à $A(\mathbb{T})$. La méthode m'a permis de résoudre sur le champ un des problèmes posés en 1956 par J. E. Littlewood dans une conférence à Chicago à laquelle je n'avais pu me rendre, mais à laquelle je participais activement, grâce à ma correspondance avec R. Salem et la rapidité du courrier à l'époque : il existe une suite $a_n \geq 0$ telle que, des séries,

$$\sum_0^\infty a_n \cos nx, \quad \sum_1^\infty a_n \sin nx$$

la seconde soit une série de Fourier-Lebesgue sans que la première le soit.

Cependant⁹, l'idée la plus fructueuse a été d'étudier soigneusement la croissance des normes $\|e^{\text{inf}}\|_{A(\mathbb{T})}$ lorsque f est une fonction réelle donnée dans $A(\mathbb{T})$, et $n \rightarrow \infty$. Si ces normes ne croissent pas plus vite qu'une suite ω_n , et si F est une fonction de la forme

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{inx}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| \omega_n < \infty,$$

(en bref, $F \in A(\omega_n)$), la fonction composée $F(f)$ appartient à $A(\mathbb{T})$. Inversement, si pour toute $F \in A(\omega_n)$ la fonction composée $F(f)$ appartient à $A(\mathbb{T})$, on a

$$(L) \quad \|e^{\text{inf}}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\omega_n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

c'est-à-dire que le premier membre est majoré par $K\omega_n$, $K > 0$ convenable. J'ai obtenu des estimations précises pour certaines classes de fonctions. Si f est une fonction assez régulière (analytique, ou même de classe C^2), on a

$$\|e^{\text{inf}}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\sqrt{|n|})$$

et le résultat est inaméliorable. Si f est une fonction linéaire par morceaux, on a

$$\|e^{\text{inf}}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\log n).$$

inaméliorable également. J'ai conjecturé la réciproque, à savoir que

$$\|e^{\text{inf}}\|_{A(\mathbb{T})} = O(\log n)$$

entraîne que f est linéaire par morceaux; c'est apparemment une question difficile, sur laquelle Brent Smith semble avoir actuellement de nouvelles méthodes d'attaque (après la résolution de la "conjecture de Littlewood" sur la norme L^1 des polynômes trigonométriques idempotents). Puis j'ai découvert un des derniers travaux écrits par Marcinkiewicz, en 1939, où il utilise le fait que, si

$$f(t) = \sum_0^\infty r_n \cos(2\pi mt + \varphi_m), \quad r_m \geq 0$$

on a

$$(M) \quad \|e^{\text{inf}}\|_{A(\mathbb{T})} \leq \prod_{m=1}^\infty \Phi(r_m n), \quad \Phi(\Gamma) = \|e^{i\Gamma \cos 2\pi t}\|_{A(\mathbb{T})}.$$

9. 1955.1, 1956.1, 1957.2, 1956.1

Il est facile de voir que le second membre est $O(e^{\varepsilon n})$ quel que soit $\varepsilon > 0$, et Marcinkiewicz montre qu'on peut dire mieux si on suppose $\sum r_m^\alpha < \infty$, $0 < \alpha < 1$, au lieu de $\sum r_m < \infty$. On a la même inégalité si

$$f(t) = \sum_0^\infty r_m \cos(2\pi\lambda_m t + \varphi_m), \quad r_m \geq 0.$$

Ma contribution principale ¹⁰ a été d'observer que l'inégalité (M) est alors inaméliorable, c'est-à-dire qu'on peut choisir la suite λ_m croissant assez vite pour que le rapport entre les deux membres soit aussi voisin de 1 que l'on veut (uniformément par rapport à n). En conséquence, pour toute suite ω_n croissant moins vite que toute suite exponentielle, il existe une fonction f dans $A(\mathbb{T})$ réelle, telle que la relation (L) n'ait pas lieu. Il en résulte que, dans le théorème de Wiener-Lévy, on ne peut pas remplacer "fonction analytique" par "fonction de classe C^∞ ", ni même par "fonction quasi-analytique au sens de Denjoy-Carleman". J'ajoutais en remarque à ma note de 1958 qu'il semblait difficile de construire une fonction F non analytique opérant dans $A(\mathbb{T})$, à cause de la proposition suivante :

"Si F est périodique et que, quelle que soit la fonction f réelle appartenant à $A(\mathbb{T})$, les normes $\|F(f+a)\|_{A(\mathbb{T})}$ soient bornées uniformément pour toutes les constantes réelles a , F est analytique".

Cette proposition est facile, et je ne soupçonnais pas à l'époque qu'on pouvait tirer un meilleur parti de sa démonstration, qui est simplement l'égalité

$$\int_{\mathbb{T}} F(f+a) e^{-2\pi i n(f+a)} da = \widehat{F}(n) e^{-2\pi i n f}$$

et l'inégalité correspondante

$$|\widehat{F}(n)| \|e^{2\pi i n f}\|_{A(\mathbb{T})} < K.$$

Le problème s'est trouvé à l'ordre du jour lors d'une rencontre, à Montpellier en 1958, à laquelle participaient H. Helson, Y. Katznelson et W. Rudin. Je disposais d'un lemme inédit, à savoir que, pour tout $r \geq 0$, la borne supérieure des normes dans $A(\mathbb{T})$ des fonctions e^{if} , avec f réelle et $\|f\|_{A(\mathbb{T})} \leq r$, est e^r . C'est exactement ce qui convenait à Katznelson, à un certain point, pour démontrer le théorème. Des extensions diverses en ont été publiées sous nos quatre noms. Cela a été aussi le point de départ de la thèse de Katznelson, qui contient d'autres très beaux résultats sur les fonctions qui opèrent dans les algèbres de Banach.

L'attention s'est ensuite portée sur les "algèbres de restrictions". On donne un ensemble E fermé dans G , et on désigne par $A(E)$ l'algèbre des fonctions, définies sur E , prolongeables sur G en fonctions appartenant à $A(G)$. R. Salem et moi avons étudié quelques propriétés structurelles des ensembles E tels que toute fonction continue sur E appartienne à $A(E)$; ce sont les "ensembles de Helson", qui jouent pour les groupes compacts le même rôle que les ensembles de Sidon pour les groupes discrets. Ainsi, toutes les fonctions continues opèrent dans $A(E)$. Katznelson a appelé "ensembles d'analyticité" les ensembles E tels que, au contraire, seules les fonctions analytiques opèrent dans $A(E)$; nous en avons donné des exemples; d'autres ont été donnés par Katznelson et Malliavin; les "algèbres tensorielles" de Varopoulos (1965) permettent d'en obtenir de très simples,

10. 1958.1

à savoir toutes les sommes algébriques $E_1 + E_2$ de deux ensembles fermés infinis. On ne connaît encore aucun ensemble compact qui ne soit ni ensemble de Helson, ni ensemble d'analyticité.

Après les travaux de Varopoulos j'ai repensé à ma note de 1958¹¹. En fait, elle permettait de donner une solution complète au calcul symbolique individuel de Malliavin pour des fonctions de $A(\mathbb{T}^2)$ c'est-à-dire des fonctions de deux variables. À partir de là, la méthode de Varopoulos permettait d'obtenir la solution complète pour tous les groupes compacts. Précisément, la solution s'exprime ainsi, dans le cas $G = T$:

“Si on donne un ensemble fermé E de \mathbb{T} , contenant la somme algébrique de deux parfaits non vides, une suite $\{M_n\}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nM_n^{1/n} = 0,$$

et un intervalle réel fermé I , il existe une fonction f dans $A(E)$, à valeurs dans I , et telle que, si Φ est définie sur I et que $\Phi(f)$ appartienne à $A(E)$, Φ appartient à $\mathcal{C}(\{M_n\}, I)$.”

Comme l'intersection de toutes les classes $\mathcal{C}(\{M_n\}, I)$ en question est la classe des fonctions analytiques au voisinage de I , le calcul symbolique individuel permet de retrouver le théorème de Katznelson.

Pour résumer cette longue histoire, je crois avoir été le premier, en 1958, et le dernier, en 1967, à donner des réciproques significatives du théorème de Wiener-Lévy. Dans l'intervalle, je ne peux que m'enorgueillir d'avoir stimulé par mes premiers travaux des mathématiciens tels que Y. Katznelson, P. Malliavin, N. Varopoulos.

Au delà du théorème de Wiener-Lévy, qui intéresse les algèbres $A(G)$, l'attention s'est portée sur les fonctions qui opèrent dans d'autres algèbres transformées de Fourier de mesures (Rudin et moi), fonctions de type positif (C. Herz, W. Rudin), fonctions de type négatif (K. Harzallah ; récemment, moi), transformées de Fourier de suites dans ℓ^α avec $0 < \alpha < 1$ (N. Rivière, Y. Sagher, puis moi), transformées de Fourier de fonctions radiales (M. Gatasoupe), transformées de Fourier de fonctions sommables avec poids (N. Leblanc), algèbres homogènes au sens de Katznelson (M. Zafran, G. Pisier), etc...

Pseudomesures et pseudofonctions.¹²

Comme je l'ai dit, j'avais suivi, étudiant, des cours de Raphaël Salem. Nous avons commencé à collaborer lorsqu'il est revenu à Paris, et que j'étais à Montpellier. En fait, de 1955 à sa mort en 1963, presque tout mon travail a été influencé par lui et par son œuvre.

Dans la théorie classique des séries trigonométriques, et en particulier dans la thèse de Riemann, dans celle de Cantor, dans celle de Fatou, on voit apparaître implicitement des distributions (au sens de L. Schwartz) dont les coefficients de Fourier tendent vers zéro à l'infini. Nous avons appelé “pseudofonctions” de telles distributions, et “pseudomesures” les distributions dont les coefficients

11. 1958.1, 1958.4, 1958.5, 1959.3, 1959.8, 1956.3, 1963.4, 1967.4

12. 1967.4

de Fourier sont bornés. Il y a à peu près la même relation entre les pseudofonctions, les pseudomesures et les fonctions de la classe A de Wiener qu'entre les fonctions intégrables au sens de Lebesgue, les mesures de Radon, et les fonctions continues. Une bonne partie de la théorie classique se ramène au théorème suivant : si une pseudofonction est nulle sur un intervalle, sa série de Fourier y converge vers zéro, et inversement (le fait que PF soit un module sur A rend ce théorème presque évident). Il en résulte presque immédiatement le théorème de Cantor : si une série trigonométrique converge vers 0 en tout point de \mathbb{T} , tous ses coefficients sont nuls. Les "ensembles d'unicité" au sens de Cantor (ensembles U) sont les ensembles E tels que, dans l'énoncé précédent, on puisse remplacer \mathbb{T} par $\mathbb{T} \setminus E$; les autres sont les ensembles de multiplicité (ensembles M). En 1955, Salem venait d'achever, avec Zygmund, la classification des ensembles E_ξ décrits p. 11¹³ en ensembles U et ensembles M ; c'est le plus beau joyau de la théorie.

Si E est un ensemble fermé, il est du type U ou M suivant que $PF(E)$, l'espace des pseudofonctions portées par E , se réduit ou non à zéro. En particulier, si E porte une mesure non nulle dont les coefficients de Fourier tendent vers 0, c'est un ensemble M . Il y a beaucoup d'autres raisons d'étudier le comportement à l'infini des transformées de Fourier de mesures portées par un ensemble; historiquement, c'est la thèse de Cantor qui a mené à ce problème.

Le problème¹⁴ de synthèse spectrale dans L^∞ se ramène, lui, à la question suivante : si E est un ensemble fermé, T une pseudomesure portée par E , f une fonction de la classe A nulle sur E , a-t-on nécessairement $Tf = 0$? Ou, en d'autres termes, l'espace $PM(E)$ des pseudomesures portées par E est-il le dual de $A(E)$?

Notre premier travail commun a été la construction d'un ensemble parfait E tel que $PM(E) = M(E)$, l'espace des mesures portées par E ; pour un tel ensemble, on a $A(E) = C(E)$, c'est-à-dire qu'il est du type de Helson, et la synthèse spectrale a lieu. Inversement, si l'on peut construire un ensemble de Helson E tel que $PM(E) \neq M(E)$, la synthèse spectrale n'a pas lieu pour E . Une telle construction, n'a été réalisée qu'en 1971, par T. Körner.

Dans l'intervalle, la solution de P. Malliavin a consisté, je le rappelle, à construire une fonction f de la classe A telle que $\delta'(f)$ ait un sens dans PM ; comme, formellement,

$$\delta'(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i u f} \cdot 2\pi i u \, du$$

il suffit pour cela que les normes

$$\|e^{2\pi i u f}\|_{PM}$$

tendent vers zéro assez vite quand u tend vers l'infini. Dans la solution de Malliavin - comme dans la version probabiliste que j'en ai donnée - l'ensemble E des zéros de f est assez dissimulé. En fait, c'est l'étude de $\delta(f)$, $\delta'(f)$, ... qui donne la meilleure information sur E . Cela n'est pas sans rapport avec mes travaux ultérieurs sur les zéros des processus gaussiens stationnaires.

La construction de pseudomesures portées par E est essentielle dans l'étude des algèbres de restrictions $A(E)$. En voici la raison. Pour montrer qu'une fonction I donnée sur E appartient à $A(E)$,

13. à réviser en fonction de la nouvelle pagination.

14. 1956.2, 1959.5

il suffit d'en trouver un prolongement sur \mathbb{T} et de développer ce prolongement en série de Fourier. Si l'on veut montrer que f n'appartient pas à $A(E)$, faute de pouvoir considérer tous les prolongements, on est amené à tester f sur des mesures ou pseudomesures μ portées par E , telles que $\|\mu\| \leq 1$, et à voir si le produit scalaire (μ, f) peut être arbitrairement grand.

C'est la méthode que j'ai utilisée pour diverses généralisations du théorème de S. Bernstein et de sa réciproque. Le théorème de Bernstein donne la meilleure condition possible, portant sur le module de continuité d'une fonction définie sur \mathbb{T} , pour qu'elle appartienne à $A(\mathbb{T})$. J'ai donné la meilleure condition possible quand on remplace \mathbb{T} par certains sous-ensembles fermés E (par exemple, les ensembles E_ζ cités plus haut).

L'évaluation des normes $\|\mu\|_{PM}$, dans le cas où μ est une mesure discrète, revient à l'évaluation de la borne supérieure du module d'un polynôme trigonométrique. Comment construire des polynômes trigonométriques

$$P(x) = \sum a_n e^{inx}$$

tels que $\sup_x |P(x)|$ soit petit et $\sum |a_n|$ soit grand? Comment le faire s'il y a des conditions additionnelles sur le spectre ou sur les a_n ? Dans certains cas, on obtient le meilleur résultat possible avec un choix aléatoire des coefficients, par exemple $a_n = \pm 1$ quand n appartient au spectre. C'est ainsi, par exemple, que j'ai obtenu les propriétés des ensembles de Sidon indiquées p. 11¹⁵, et qui se transcrivent mot pour mot pour les ensembles de Helson. L'outil avait été préparé par Paley et Zygmund dans les années 1930, et surtout par Salem et Zygmund au début des années 1950. Je dirai plus tard comment l'outil est devenu objet d'étude, pour aboutir à mon livre "Some random series of functions".

Ma collaboration avec Salem s'est resserrée quand je suis venu moi-même à Paris. C'est alors que nous avons écrit notre livre "Ensembles parfaits et séries trigonométriques", qui est paru au lendemain de la mort de Salem. Ce livre a eu une influence certaine. Je n'en veux pour preuve que la brillante suite de notes aux Comptes-Rendus de¹⁶ N. Varopoulos, en 1965, qui portaient toutes pour titre : "Sur les ensembles parfaits et les séries trigonométriques".

Autres problèmes sur la classe A.

Il y a sur la classe A de Wiener bien d'autres problèmes que ceux que j'ai évoqués. En me restreignant au groupe \mathbb{T} , c'est-à-dire aux séries trigonométriques absolument convergentes, j'en ai fait une sorte d'inventaire dans mon livre de 1970. La plupart de mes contributions au sujet, entre 1963 et 1970, ont été faites en commun avec Y. Katznelson; mon livre en donne parfois des versions améliorées. En voici quelques exemples.

Le théorème de S. Bernstein dans sa version la plus forte dit que toute fonction continue sur \mathbb{T} et dont le module de continuité

$$\omega_f(\delta) = \sup_{|x-x'| \leq \delta} |f(x) - f(x')|$$

15. à modifier en fonction de la nouvelle pagination.

16. 1957.1, 1963.1, 1968.1, 1970.1

satisfait

$$\omega_f(\delta) = O(\delta^{1/2+\varepsilon}) \quad (\varepsilon > 0, \delta \rightarrow 0)$$

appartient à $A(\mathbb{T})$, et on sait qu'on ne peut pas remplacer ε par 0. On peut dire mieux. Il existe une fonction f continue sur \mathbb{T} , dont le module de continuité satisfait

$$\omega_f(\delta) = O(\delta^{1/2}) \quad (\delta \rightarrow 0)$$

et telle que les seules fonctions de la forme $F(f)$ dans $A(\mathbb{T})$ soient les constantes. Des résultats analogues existent pour certaines algèbres $A(E)$. Par exemple, si aucune portion de E n'est un ensemble de Helson, il existe une fonction f continue sur E , non constante, telle que les seules fonctions de la forme $F(f)$ dans $A(E)$ soient les constantes (et, bien sûr, la condition donnée sur E est nécessaire et suffisante).

Nous avons appelé A^+ la classe des fonctions

$$f(t) = \sum_0^\infty \widehat{f}_n e^{2\pi i n t}, \quad \sum_0^\infty |\widehat{f}_n| < \infty,$$

c'est-à-dire les fonctions de la classe A à spectre positif, ou encore les valeurs au bord des séries de Taylor absolument convergentes; et nous avons désigné par $A^+(E)$ la classe des restrictions à E (fermé de \mathbb{T}) des fonctions de la classe A^+ . S'il n'existe pas de fonction de A^+ s'annulant sur E , $A^+(E)$ est une algèbre isomorphe¹⁷ à A^+ , dont on connaît bien le spectre (c'est le disque unité du plan de la variable complexe), les idéaux primaires, les automorphismes, etc... Dans le cas contraire (nous disons alors que E est du type ZA^+) le spectre de $A^+(E)$ est l'ensemble E et l'algèbre est régulière. On connaît beaucoup d'exemples d'ensembles ZA^+ , parmi lesquels tous les dénombrables fermés. Mais - même dans ce dernier cas - on ne sait pas si, pour un ensemble E du type ZA^+ , il existe une fonction de A^+ qui s'annule exactement sur E . Il est facile de voir que, si E est du type ZA^+ , toute fonction analytique sur E appartient à $A^+(E)$. Dans le sens opposé, nous avons construit, pour chaque $\alpha > 2$, un ensemble E de type ZA^+ tel que $A^+(E)$ ne contienne pas toutes les fonctions de la classe de Gevrey G_α . Il y avait une grande lacune entre les deux énoncés, puisque les fonctions analytiques constituent la classe de Gevrey G_1 . En fait, c'est bien la valeur 2 qui est critique, comme l'a montré récemment A. Atzmon.

Tout récemment (1981), nous avons résolu ensemble un problème de Lusin qui s'énonce ainsi : une fonction continue sur le cercle étant donnée, exist-t-il un homéomorphisme du cercle tel que la fonction composée appartienne à la classe A ? La réponse est négative. En même temps que nous, M. N. Olevskii à Moscou a annoncé le même résultat, amélioré : en effet, Katznelson et moi construisons une fonction à valeurs complexes, tandis qu'Olevskii construit une fonction à valeurs réelles. Je reviendrai tout à l'heure sur ce sujet, des homéomorphismes du cercle et des séries de Fourier.

Ainsi il est faux que toute fonction f continue sur \mathbb{T} s'écrive

$$f(t) = g(h(t)),$$

17. 1970.1, 1968.6, 1970.2

où g appartient à $A(\mathbb{T})$ et h est un homéomorphisme de \mathbb{T} . Par contre, j'avais montré en 1968 que f peut s'écrire

$$f(t) = g_1(h_1(t)) + g_2(h_2(t)),$$

où les g_i appartiennent à $A(\mathbb{T})$ et les h_i sont des homéomorphismes de \mathbb{T} , *indépendants de f* . Cet énoncé est directement inspiré par le théorème de superposition de Kolmogorov, que je présenterai à la fin de cette notice.

J'arrêterai là la liste des problèmes¹⁸ sur la classe $A(\mathbb{T})$ auxquels j'ai contribué. Il y a des problèmes identiques ou analogues dans toutes les algèbres $A(G)$. Lorsque G est discret, par exemple $G = \mathbb{Z}$, il y a des problèmes nouveaux. Ainsi W. Rudin, à la fin de son livre "Fourier analysis on groups" (1962) considérait les sous-algèbres fermées de $A(\mathbb{Z})$. À chaque sous-algèbre fermée de $A(\mathbb{Z})$ correspond une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} . Inversement - c'est la question posée par Rudin - à une relation d'équivalence sur \mathbb{Z} correspond-il nécessairement une seule sous-algèbre fermée de $A(\mathbb{Z})$? J'ai montré que la réponse est négative : c'est une sorte de non-synthèse spectrale pour certaines sous-algèbres fermées de $A(\mathbb{Z})$.

En termes d'analyse classique, le problème s'exprime ainsi. Une fonction f intégrable étant donnée, on cherche à l'approcher en norme par des polynômes trigonométriques P tels que $\widehat{P}_n = \widehat{P}_m$ chaque fois que $\widehat{f}_n = \widehat{f}_m$, c'est-à-dire par des polynômes P de la forme

$$\sum F(\widehat{f}_n) e^{2\pi i n t}.$$

Le même problème se pose dans d'autres espaces fonctionnels, par exemple $C(\mathbb{T})$, ou $L^p(\mathbb{T})$ avec $p \neq 1$. Il a évidemment une réponse positive dans $L^2(\mathbb{T})$ (en prenant pour F une fonction nulle au voisinage de 0, et égale à 1 en dehors du voisinage). On sait maintenant qu'il a une réponse négative pour $1 \leq p < 2$ et $p > 2$. Katznelson et moi avons donné assez récemment des contre-exemples dans $L^1(\mathbb{T})$ et $C(\mathbb{T})$ avec une relation d'équivalence dont toutes les classes finies ont au plus deux éléments (si toutes les classes finies ont un seul élément, le théorème de Fejér assure la synthèse).¹⁹

Autres résultats avec Katznelson.

Katznelson et moi avons souvent collaboré sur d'autres sujets concernant les séries de Fourier, au hasard de nos rencontres. Une bonne partie de nos résultats communs a été publiée uniquement aux Comptes-Rendus.

En 1965, Katznelson écrivait son livre "An introduction to harmonic analysis", et cherchait un procédé pour exposer simplement le théorème de Kolmogorov, selon lequel il existe une fonction intégrable f dont la série de Fourier diverge partout. À cette occasion, nous avons montré que, pour tout ensemble fermé E de mesure nulle, il existe une fonction continue dont la série de Fourier diverge sur E . Quelques mois plus tard, Carleson démontrait son théorème célèbre : pour toute fonction de carré intégrable (en particulier pour toute fonction continue) la série de Fourier converge presque partout. Donc, pour les fonctions continues, on ne peut améliorer ni notre résultat ni le sien.

18. 1970.2, 1981.1 1968.8

19. 1962.5, 1966.8, 1966.1, 1978.1, 1965.4

La classe $U(\mathbb{T})$ des fonctions continues dont la série de Fourier est uniformément convergente n'est pas une algèbre ; c'est un résultat de Salem. Nous avons montré que les seules fonctions d'une variable réelle opérant dans $U(\mathbb{T})$ sont les fonctions linéaires.

Des essais infructueux sur un problème de Menchoff nous ont mené à une construction curieuse, de fonction analytique dans le disque unité et soumise à certaines conditions.

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$$

On donne deux fonctions mesurables à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$, $\psi(t)$ et $\varphi(t)$ ($0 < t \leq 2\pi$). On impose une condition à $f(z)$ un peu plus faible que l'appartenance à H^2 , par exemple $\sum |a_n|^{2+\varepsilon} < \infty$, ou bien $|f(z)| < (1 - |z|)^{-1/2}$. Alors on peut construire $f(z)$, vérifiant cette condition, et telle que presque partout

$$\lim_{r \rightarrow 1} \operatorname{Re} f(re^{it}) = \varphi(t)$$

$$\lim_{r \rightarrow 1} \operatorname{Im} f(re^{it}) = \psi(t).$$

Quand f appartient à H^2 , cela est impossible, parce que les limites radiales sont alors nécessairement de carré intégrable et conjuguées.

En réponse à un problème de A. Zygmund²⁰, nous avons montré qu'à toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_n)$ tendant vers zéro on peut faire correspondre un ensemble E de mesure de Lebesgue nulle, tel que, si une série trigonométrique converge vers 0 sur E et a ses coefficients de Fourier majorés en module par les ε_n , c'est forcément la série nulle. Dans la terminologie de Zygmund, le complémentaire de E est un ensemble U_ε de mesure pleine ; Zygmund avait autrefois mis en évidence des ensembles U de mesure positive, mais il y avait une difficulté substantielle à franchir le pas. Bernard Connes a ensuite éclairci la relation entre rapidité de décroissance de la suite ε et dimension de Hausdorff de E .

En collaboration avec K. de Leeuw, nous avons résolu un autre vieux problème, dont je parlerai plus tard.

Je passe sur d'autres travaux, pour terminer sur les homéomorphismes du cercle et les séries de Fourier, sujet sur lequel nous avons des résultats encore inédits. La question générale est celle-ci : étant donné une fonction continue sur le cercle, peut-on l'"améliorer" par changement de variable, c'est-à-dire peut-on trouver un homéomorphisme h de \mathbb{T} tel que $f(h)$ appartienne à une classe donnée ? Naturellement, la question dépend de f et de la classe.

Le premier résultat dans cette direction est dû à Pál (1914) et Bohr (1934), avec une démonstration élégante de Salem (1944) : pour toute $f \in C(\mathbb{T})$ réelle, il existe un h tel que $f(h)$ appartienne à $U(\mathbb{T})$. Le procédé de Pál, Bohr et Salem ne permettait pas d'obtenir le résultat pour f complexe. Nous avons montré qu'on peut choisir h indépendant de f dès que f est dans un compact fixe de $C(\mathbb{T})$; le résultat vaut donc pour f complexe (1978 ; à paraître dans un volume en hommage à P.

20. 1971.4, 1973.5, 1977.1

Turán, toujours non publié).

Pour $A(\mathbb{T})$, la situation s'est éclaircie cette année, comme je l'ai dit : il existe une f réelle telle que, pour aucun h , la fonction composée $f(h)$ n'appartienne à $A(\mathbb{T})$.

Un sous-produit de notre résultat est curieux. Appelons $A_\varepsilon(\mathbb{T})$ la classe des fonctions f continues sur \mathbb{T}

$$f \sim \sum \widehat{f}_n e^{2\pi i n t},$$

telles que $\sum |\widehat{f}_n|_n < \infty$, où (ε_n) est une suite positive donnée tendant vers zéro quand $|n| \rightarrow \infty$. Quelle que soit la suite ε , pour toute f réelle, il existe h tel que $f(h)$ appartienne à $A_\varepsilon(\mathbb{T})$; nous connaissions l'énoncé (Saakian 1980); notre démonstration introduit une sorte de "distribution topologique" pour les fonctions continues réelles. Par contre, si la suite ε tend vers 0 assez lentement, il existe f complexe telle que, pour tout h , $f(h)$ n'appartienne pas à $A_\varepsilon(\mathbb{T})$.

J'indiquerai tout à l'heure un autre résultat très récent, avec S. Hruščev, sur le mouvement brownien et les séries trigonométriques.

Méthodes aléatoires et objets aléatoires. ²¹

La troisième influence majeure sur mon travail mathématique est celle du mouvement brownien et de tout ce qui s'y rattache. Là encore, les noms de Lévy et de Wiener dominent le sujet. Cependant, c'est par les travaux de Paley et Zygmund et de Salem que j'y ai été amené.

Paley et Zygmund.

Paley et Zygmund, dans une série de notes intitulées "On some series of functions" avaient étudié au début des années 1930 les séries trigonométriques à coefficients aléatoires de la forme

$$(R) \quad \sum_1^\infty (\pm a_n \cos nx \pm b_n \sin nx)$$

ou

$$(S) \quad \sum_1^\infty r_n \cos(nx + 2\pi\omega_n).$$

Dans les premières, on choisit les $+$ et $-$ au hasard avec la probabilité naturelle; dans les secondes, on choisit au hasard les phases ω_n . Les lettres R et S évoquent les "fonctions de Rademacher" (les \pm), et les "fonctions de Steinhaus" (les ω_n). Leur résultat le plus remarquable est que de telles séries représentent une fonction de L^p avec une probabilité (nécessairement 0 ou 1) qui ne dépend pas de p , si $1 \leq p < \infty$. Ainsi, supposons que dans (R) la somme des carrés des coefficients diverge. Alors il est presque sûr que (R) n'est pas une série de Fourier d'une fonction de L^1 , c'est-à-dire une série de Fourier-Lebesgue. C'est la seule façon, à ma connaissance, de montrer l'existence d'une suite de $+$ et $-$ telle que la série (R) correspondante ne soit pas une série de Fourier-Lebesgue.

21. 1981.1, 1981.2

Dans d'autres cas encore, par exemple pour mettre en évidence des comportements possibles de fonctions conjuguées dans le disque unité, Paley et Zygmund avaient introduit l'usage de signes \pm aléatoires. Sur les séries (R) et (S), ils avaient donné des conditions nécessaires et des conditions suffisantes (plus tard améliorées par Salem et Zygmund) pour qu'elles représentent des fonctions bornées; la recherche de conditions nécessaires et suffisantes n'a abouti que tout récemment, avec les travaux de Dudley, Fernique, Marcus et Pisier.

Paley et Zygmund avaient un lointain précurseur. C'est Emile Borel, qui, en 1896, dans une note assez ésotérique, avait introduit les séries de Taylor à coefficients aléatoires sous la forme suivante : "si les coefficients sont quelconques, le cercle de convergence est une coupure... dire que les coefficients sont quelconques, c'est en effet dire que (sauf la condition qui résulte de ce que le rayon de convergence est donné) les valeurs des n premiers coefficients n'ont aucune influence sur les valeurs des suivants". En 1929, H. Steinhaus, en donnant une expression claire à cette proposition d'Émile Borel, avait réellement introduit l'aléatoire dans l'analyse.

Les ensembles de Salem.

Les objets aléatoires construits par Steinhaus, Paley et Zygmund, étaient des séries, ou des fonctions. C'est Salem qui, pour la première fois, a construit des ensembles aléatoires, bâtis à la manière de Cantor, mais avec une sorte de jeu aléatoire dans le cours de la construction (1950). Le but de Salem était d'obtenir des ensembles E , ayant un nombre α donné pour dimension de Hausdorff ($0 < \alpha < 1$), et portant une mesure μ dont la transformée de Fourier décroisse rapidement à l'infini (la méthode de Salem permet d'obtenir

$$(M_\alpha) \quad \widehat{\mu}(u) = o(|u|^{-\alpha/2}) \quad (|u| \rightarrow \infty)$$

et c'est le meilleur exposant possible). L'idée, vue d'aujourd'hui, est naturelle : la dimension de Hausdorff de E décrit le meilleur comportement possible des transformées de Fourier $\widehat{\mu}(u)$ en moyenne quadratique par rapport à des poids $|u|^{\alpha-1}$, c'est précisément, la borne supérieure des α tels que

$$(I_\alpha) \quad 0 < \int |\widehat{\mu}(u)|^2 |u|^{\alpha-1} du < \infty$$

pour au moins une mesure μ portée par E . Il est clair que (M_α) entraîne $(I_{\alpha'})$ pour tout $\alpha' < \alpha$; mais (I_α) n'entraîne même pas (M_0) , parce que E , quelle que soit sa dimension de Hausdorff, peut avoir des propriétés arithmétiques qui forcent la résonance à certaines fréquences arbitrairement élevées. C'est le cas pour l'ensemble triadique de Cantor, et, comme on l'a vu, pour tous les ensembles qu'on appelle du type U (ensembles d'unicité au sens de Cantor). Mais si l'on introduit un jeu aléatoire dans la construction, ces propriétés arithmétiques sont détruites, la résonance est brouillée, et on peut obtenir (M_α) pour des valeurs strictement positives de α .

La méthode de Salem, très ingénieuse, mêlait probabilités et théorie des nombres : ce n'est pas en brouillant des ensembles de Cantor, mais des ensembles plus savamment construits qu'il arrive à (M_α) avec des α arbitrairement voisins de la dimension de Hausdorff. En bref, appelons "ensembles de Salem" des ensembles ayant cette propriété.

Le mouvement brownien.

J'en viens aux relations du mouvement brownien avec les séries (R) et (S) de Paley et Zygmund, et avec les ensembles de Salem.

Sur l'intervalle de temps $[0, 1]$, le mouvement brownien d'une particule sur la droite, convenablement normalisée, peut s'écrire

$$W(t) = \xi_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{2\pi n} (\xi_n \sin 2\pi n t + \xi'_n (\cos 2\pi n t - 1))$$

où les ξ_n et les ξ'_n sont des variables gaussiennes normalisées indépendantes. Le second membre est la "série de Fourier-Wiener", le premier membre la "fonction de Wiener". À plusieurs reprises et en particulier dans son livre avec Paley "Fourier transforms in the complex domain" (1934), Wiener indique qu'il a été inspiré, dans sa théorie du mouvement brownien, par la phrase de Jean Perrin dans "Atomes" à propos de la cinématographie du mouvement brownien :

"C'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et qu'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer".

En fait, le programme de Jean Perrin a été réalisé conjointement par Paley, Wiener et Zygmund en 1933. Ils montrent non seulement que, presque sûrement, la fonction de Wiener n'est dérivable nulle part, mais encore que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a presque sûrement

$$\forall t \quad \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|W(t+h) - W(t)|}{|h|^{1/2+\varepsilon}} = \infty.$$

Ils indiquent aussi l'analogie des problèmes concernant les séries (R), (S), et

$$(G) \quad \sum r_n (\xi_n \cos nt + \xi'_n \sin nt)$$

où les ξ_n et ξ'_n sont des variables gaussiennes normalisées indépendantes.

Mon premier travail dans cet ordre d'idées a été une étude de la régularité (module de continuité) et de l'irrégularité de fonctions définies par des séries

$$\sum_1^{\infty} (a_n X_n \cos nt + b_n Y_n \sin nt)$$

où les X_n et Y_n sont des variables aléatoires indépendantes "sous-gaussiennes", séries qui contiennent comme cas particuliers les séries (R), (S), (G). Pierre Billard (mon meilleur élève de Montpellier) a ensuite complété les travaux de Paley et Zygmund en démontrant que c'est avec la même probabilité (zéro ou un) que les séries (R) (ou (S)) représentent une fonction bornée ou une fonction continue, et que ces probabilités pour (R) ou (S) sont les mêmes si $r_n^2 = a_n^2 + b_n^2$.

Séries aléatoires dans un espace de Banach.

C'est pour expliquer les travaux de Billard que j'ai introduit les séries

$$\sum_1^{\infty} \pm u_n$$

à valeurs dans un espace de Banach. Un fait essentiel est que, lorsqu'il y a convergence presque sûre, les normes des vecteurs sommes V sont intégrables sur l'espace de probabilité, c'est-à-dire, en notant $E(\cdot)$ l'espérance mathématique,

$$E(\|V\|) < \infty.$$

J'avais montré un résultat plus fort, à savoir

$$E(\exp\|V\|) < \infty ;$$

la preuve consiste à montrer que s'il est peu probable que V soit grand, il est extrêmement peu probable que V soit très grand. On sait aujourd'hui que

$$E(\exp\|V\|^2) < \infty,$$

et c'est le meilleur résultat possible. De l'intégrabilité de $\|V\|$ découle un "principe de contraction" : on améliore la convergence presque sûre si l'on diminue les vecteurs u_n . En conséquence, dans un espace de Banach complexe, les séries

$$\sum \pm u_n, \quad \sum e^{2\pi i \omega_n} u_n$$

(ω_n : variables de Steinhaus) convergent ou divergent avec la même probabilité. De plus, la sommabilité presque sûre d'une telle série entraîne sa convergence presque sûre.

C'est par là que commence mon livre "Some random series of functions", qui se veut une continuation de l'œuvre de Paley et Zygmund, et c'est mon unique contribution à la théorie des probabilités à valeurs dans les espaces de Banach. Le sujet s'est remarquablement développé depuis dix ans, et il semble que mon livre ait eu un rôle de stimulant.

Régularité et irrégularité locale. ²²

Mon intérêt s'est plutôt porté sur les propriétés fines du mouvement brownien, et des fonctions sommes de séries de Fourier aléatoires ; mon livre y consacre plusieurs chapitres, et j'y suis revenu ensuite - tout récemment encore -.

Les séries de Fourier aléatoires ressemblent, dans une certaine mesure, aux séries de Fourier lacunaires. Par exemple, les propriétés presque sûres des séries (G) de la forme

$$\sum_1^{\infty} n^{-\alpha-\frac{1}{2}} (\xi_n \cos nt + \xi'_n \sin nt)$$

22. 1964.3, 1968.1

ressemblent aux propriétés des séries

$$\sum_1^{\infty} \lambda^{-n\alpha} \cos \lambda^n t \quad (\lambda \text{ entier } \geq 2; 0 < \alpha < 1).$$

Ce sont justement de telles séries lacunaires qui ont donné les premiers exemples de fonctions continues nulle part dérivables (Weierstrass 1872). Désignons par F (fonction aléatoire) la somme de la première série, et par f la somme de la seconde. À très peu près, F est la fonction de Wiener lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$.

Pour f , le module de continuité

$$\omega_f(\delta) = \sup_{t, t', |t-t'| \leq \delta} |f(t) - f(t')|$$

est équivalent à δ^α (au sens où leur rapport reste compris entre deux nombres strictement positifs). De plus, en chaque point t donné, on a

$$0 < \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} < \infty.$$

Avec M. et S. Izumi, j'ai donné de ce fait une preuve simple, et une série de conséquences pour les séries de Fourier lacunaires²³.

Pour F , le module de continuité est presque sûrement équivalent à $\delta^\alpha \sqrt{\log \frac{1}{\delta}}$; pour $\alpha = \frac{1}{2}$ (mouvement brownien) c'est un théorème de Paul Lévy. En chaque point t fixé, on a presque sûrement

$$0 < \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha \sqrt{\log \log \frac{1}{h}}} = \mu < \infty$$

μ ne dépendant pas de t ; pour $\alpha = \frac{1}{2}$, c'est la "loi du logarithme itéré" de Khintchine et Kolmogorov. Il en résulte que, presque sûrement, on a cette égalité pour presque tout t ? Y-a-t-il, presque sûrement, des valeurs exceptionnelles où cela n'ait pas lieu ? Paul Lévy estimait probable que ces valeurs exceptionnelles n'existent pas (cf. processus stochastiques et mouvement brownien, 1948, p. 247) ; alors la loi du logarithme itéré aurait donné la version la plus forte de non dérivabilité en chaque point. En fait, on a presque sûrement en tout point t

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} > 0 ;$$

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, c'est un résultat de A. Dvoretzky (1963) qui améliore celui de Paley-Wiener. Mais, presque sûrement aussi, il existe des t tels que

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0} \frac{|f(t+h) - f(t)|}{|h|^\alpha} < \infty ;$$

23. 1965.1, 1968.1

pour $\alpha = \frac{1}{2}$, j'ai montré l'existence de ces "points lents" en 1974 ; le cas général est tout récent. La situation est donc beaucoup plus complexe pour le mouvement brownien et pour les séries de Fourier aléatoires que pour les séries de Fourier lacunaires ; ces dernières ont une irrégularité régulière, tandis que le mouvement brownien est irrégulièrement irrégulier.

Images browniennes. ²⁴

Par contre, il peut arriver au mouvement brownien de jouer un rôle régularisant, et de fournir de façon très simple des objets délicats à construire autrement. Ainsi des ensembles de Salem. Soit E un ensemble fermé sur la droite, de dimension de Hausdorff $\beta \leq \frac{1}{2}$. Alors, l'ensemble image de E par la fonction de Wiener, $W(E)$, est presque sûrement un ensemble de Salem de dimension 2β . Plus généralement, pour la un ou fonction F ci-dessus, $F(E)$ est presque sûrement un ensemble de Salem de dimension 1 ou $\frac{\beta}{\alpha}$. Pour la preuve, on utilise le fait suivant : toute mesure positive θ sur la droite vérifiant pour tout intervalle I

$$\theta(I) \leq h(|I|)$$

a pour image par F une mesure μ dont la transformée de Fourier $\hat{\mu}$ vérifie

$$\hat{\mu}(u) = O(\sqrt{\log |u| h(|u|^{-1/\alpha})}) \quad (u \rightarrow \infty).$$

Ce fait a d'autres corollaires intéressants. Par exemple, il donne la meilleure condition métrique pour qu'un ensemble compact soit de type U : si l'on appelle $N(\varepsilon)$ le nombre minimum d'intervalles de longueur ε permettant de recouvrir l'ensemble E , la condition

$$\overline{\lim} \frac{N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}} < \infty$$

entraîne que E est un ensemble U , et c'est la meilleure condition possible sur $N(\varepsilon)$.

Naturellement, les résultats sur ensembles de Salem s'étendent au mouvement brownien à valeurs dans un espace à plusieurs dimensions, ou aux séries de Fourier gaussiennes à valeurs dans un tel espace. Les ensembles $F(E)$ obtenus ont alors toutes les dimensions possibles. Pour l'analyse harmonique (en ce qui concerne le comportement à l'infini des transformées de Fourier des mesures qu'ils portent) ils jouent le même rôle que les sphères ; ce sont des sortes d'ensembles ronds. En sens opposé, les ensembles d'unicité sont des sortes d'ensembles carrés. D'autres ensembles aléatoires très naturels (par exemple les images d'ensembles compacts par des processus de Lévy, l'ensemble des zéros du mouvement brownien.. etc...) sont presque sûrement "ronds". On verra qu'inversement, du point de vue de Baire, les ensembles les plus naturels sont génériquement "carrés".

Ensembles de niveau.

En montrant comment définir $\delta(F)$ (suivant en cela l'idée de Malliavin en 1959), j'ai aussi obtenu la dimension de Hausdorff des ensembles de niveau de F : c'est $1 - \alpha$. Quand F est le mouvement brownien, $\delta(F)$ est essentiellement le "temps local" de Paul Lévy. La méthode s'applique à des

24. 1974.3, 1976.6, 1976.2, 1966.4, 1966.5, 1969.3, 1970.2

fonctions aléatoires définies sur \mathbb{R}^2 , et, dans ce cadre, la dimension de Hausdorff des lignes de niveau semble maintenant un sujet assez populaire. On peut se reporter aux belles choses que Benoît Mandelbrot a écrites et dessinées sur les “fractals”.

Pour réaliser certaines propriétés étranges en analyse harmonique, le mouvement brownien est un candidat naturel. C’est ainsi que nous avons montré récemment, avec Y. Katznelson et H. Hruščev, que ce mouvement est presque sûrement “incorrigeable” au sens suivant : on ne peut pas obtenir une fonction de la classe A en le modifiant sur un ensemble de mesure non pleine. On peut aussi penser - mais c’est une question ouverte - qu’il est également incorrigeable au sens de Lusin : on ne peut pas obtenir une fonction de la classe A par changement de variable continu.

Autres applications. ²⁵

Les polynômes trigonométriques aléatoires

$$\sum \pm c_n e^{int}, \quad \sum \pm c_{n,m} e^{i(nx+my)}$$

sont d’un usage commode lorsqu’on veut que la norme L^∞ ne s’éloigne pas trop de la norme L^2 .

J’ai indiqué les résultats qu’ils permettent d’obtenir sur les ensembles de Helson et de Sidon. Récemment, ils m’ont servi à deux occasions.

La première a été l’étude, entreprise par K. de Leeuw et Y. Katznelson, du problème suivant : étant donné une suite a_n positive de carré sommable, existe-t-il une fonction f continue dont les modules des coefficients de Fourier soient minorés par les a_n ? Nous avons trouvé ensemble la solution, qui est positive.

La seconde a été la solution, par T. Körner, d’un problème de J. E. Littlewood. Körner a montré que, pour un choix convenable de $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, le polynôme

$$P(z) = e^{i\omega_1} z + e^{i\omega_2} z^2 + \dots + e^{i\omega_n} z^n$$

dont les coefficients sont de module 1 vérifie

$$A\sqrt{n} \leq |P(z)| \leq B\sqrt{n}$$

pour tout nombre complexe z de module 1, A et B étant des constantes absolues ($0 < A < B$). J’ai pu montrer que, si n est assez grand, A et B peuvent être choisis arbitrairement proches de 1 - ce qui résolvait aussi un autre problème, de P. Erdős, sur la comparaison des normes L^∞ et L^2 des polynômes à coefficients unimodulaires. La méthode est une sorte de double correction aléatoire, sur les coefficients d’une part, sur la fonction d’autre part, à partir d’un polynôme explicite dont on maîtrise bien le comportement. Le résultat était imprévu par les (très rares) spécialistes.

Les résultats que je viens d’indiquer sont récents. C’est cependant entre 1960 et 1966 que j’étais le plus intéressé à une étude systématique d’objets aléatoires. Ma motivation d’origine était d’obtenir une fonction de carré sommable dont la série de Fourier diverge presque partout (j’avais visé

25. 1965.5, 1977.1, 1968.1, 1981.2

dans la mauvaise direction). Heureusement l'outillage pouvait servir à d'autres problèmes. Je l'ai développé dans deux articles : l'un sur les séries de Taylor à coefficients gaussiens indépendants, qui met en évidence différents comportements à la frontière du disque de convergence; l'autre - écrit en 1966 et paru seulement en 1971 - sur un ensemble de techniques aléatoires en analyse de Fourier. Les méthodes et résultats se trouvent, sous forme quelquefois améliorée, dans mon livre de 1968. J'indique ci-dessous ce qui concerne certaines séries de translatées aléatoires.

Séries de translatées.²⁶

1. On donne une suite ℓ_n de nombres positifs, décroissante, et on jette sur le cercle de longueur 1 des intervalles de centre ℓ_n , en choisissant leurs centres ω_n au hasard. À quelle condition est-il presque sûr que le cercle est entièrement recouvert? C'était un problème de Dvoretzky, que Paul Lévy m'avait signalé en 1959; j'avais apporté immédiatement une réponse partielle, P. Billard l'avait améliorée, et la réponse complète a été donnée par L. A. Shepp. Dans mon livre (avant le résultat de Shepp), j'ai étudié le cas de non recouvrement, et donné une formule explicite pour la dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert lorsque cet ensemble est non vide; par exemple, dans le cas $\ell_n = \frac{1-\varepsilon}{n}$, cette dimension est ε . Le sujet a ensuite été repris, dans un cadre plus large, par Hoffman Jörgensen, et par mes élèves M. Wschebor et El Hélou; il reste, dans le cas multidimensionnel (physiquement très naturel, les intervalles étant remplacés par des boules), des questions intéressantes sur la topologie des ensembles non recouverts.

2. On donne encore une suite décroissante de nombres positifs, m_n ; on les considère maintenant comme des masses ponctuelles et on les jette sur le cercle en des points ω_n choisis au hasard. Si la somme des m_n est finie, on obtient sur le cercle une mesure μ discrète aléatoire. Si de plus

$$\sum_1^{\infty} m_n \log \frac{1}{m_n} < \infty,$$

les sommes partielles de la série de Fourier de μ sont bornées presque partout. Si par contre

$$\sum_1^{\infty} m_n \log \frac{1}{m_n} = \infty,$$

les sommes partielles sont non-bornées presque partout. Une simple régularisation donne alors le fameux exemple de Kolmogorov, d'une fonction intégrable dont la série de Fourier diverge presque partout.

3. On donne comme précédemment une suite positive décroissante m_n , sans supposer la somme finie, mais seulement la somme des carrés

$$\sum_1^{\infty} m_n^2 < \infty$$

On choisit au hasard les signes + et -, et on jette au hasard les masses $\pm m_n$ en des points ω_n du cercle choisis au hasard. On obtient une distribution de Schwartz, θ . La transformée de Cauchy

26. 1980.3, 1980.4, 1960.1, 1960.4, 1961.3, 1965.3, 1971.1, 1968.1, 1959.2

de θ est une fonction analytique $u(z) + iv(z)$. En choisissant convenablement les m_n , les comportements de u et de v à la frontière sont très différents, et permettent de compléter les théorèmes classiques sur fonctions conjuguées (M. Riesz, Kolmogorov) en montrant que les hypothèses sont inaméliorables.

Autres sujets. ²⁷

Voici quelques autres sujets, intéressant les probabilités ou leurs applications à l'analyse auxquels j'ai contribué.

Avec Salem en 1957, j'ai étudié les convolutions de mesures de Bernoulli $\frac{1}{2}(\delta_{-r_n} + \delta_{r_n})$, où r_n est une suite donnée; par exemple, étant données des conditions sur les r_n nécessaires et suffisantes pour que la convolution soit une fonction de carré intégrable; le cas $r_n = \xi^n$ fait apparaître les nombres de Pisot, et laisse encore des questions ouvertes.

Les convolutions de mesures équiréparties sur des intervalles $[-r_n, r_n]$ donnent des fonctions de classe C^∞ , bien étudiées par S. Mandelbrojt; j'ai ajouté la remarque que, lorsque les r_n tendent rapidement vers 0, ces fonctions sont localement des polynômes, en dehors d'un ensemble parfait du type de Cantor. ²⁸

En 1964, en réponse à une question de G. Piranian inspirée par des travaux sur la représentation conforme, j'ai construit par un procédé de martingale une mesure positive sur la droite singulière et "lisse" au sens A de Zygmund; la variante publiée en 1969 donne la condition de régularité la meilleure possible.

En 1976, en collaboration avec J. Peyrière, j'ai étudié une martingale dans un espace de mesures introduite par B. Mandelbrot comme modèle possible de turbulence. Cette martingale dépend d'une distribution donnée sur la droite réelle positive, et nous avons pu répondre aux conjectures de B. Mandelbrot sur la relation entre cette distribution et les propriétés de la martingale ou de la mesure limite (dégénérescence, existence de moments, dimension des ensembles supportant la mesure). La théorie d'autres objets aléatoires introduits par B. Mandelbrot a été poursuivie par J. Peyrière, qui y était remarquablement préparé par les travaux de sa thèse.

La théorie moderne des processus gaussiens (Dudley, Fernique) donne un nouvel intérêt aux "hélices" de Schoenberg, c'est-à-dire aux courbes dans un espace de Hilbert \mathcal{H} (de dimension infinie) telle que la distance de deux points $h(t)$ et $h(s)$ ne soit fonction que de $t - s$:

$$\|h(t) - h(s)\|^2 = \psi(t - s).$$

On dit alors que la fonction ψ est de type négatif. Si \mathcal{H} est un espace de Hilbert de variables gaussiennes, une telle hélice représente un processus gaussien stationnaire; quand $\psi(t) = t$, c'est l'hélice brownienne, qui représente le mouvement brownien; sur l'hélice brownienne, trois points quelconques forment toujours un triangle quelconque.

27. 1968.1, 1961.3, 1968.1

28. 1958.7, 1971.2, 1969.1, 1976.4

Naturellement, il n'existe pas d'hélice brownienne dans un espace euclidien E_N de dimension finie ; mais j'ai donné un procédé de construction de courbes dans E_N qui, lorsque la dimension N est grande, sont de bonnes approximations de l'hélice brownienne. Le sujet des quasi-hélices en général est à peu près vierge ; il se relie aux "plongements lipschitziens" au sens de P. Assouad. C'est un lien naturel entre les "courbes étranges" du début du siècle (courbes de Peano, Von Koch, Cesaro, Paul Lévy), les théorèmes de prolongements (Whitney) et le mouvement brownien.

L'étude des hélices est équivalente à celle des fonctions de type négatif, où mes contributions au départ ont été des réponses à des questions que m'avait posées Jacques Deny (1978). Le calcul symbolique individuel admet dans ce cadre une solution très forte : il existe une fonction de type négatif sur la droite, ψ_0 , telle que si une fonction F opère sur ψ_0 au sens que $F(\psi_0)$ est de type négatif, F opère aussi sur toutes les fonctions ψ de type négatif.

Le point de vue de Baire.²⁹

À propos des séries de Paley-Zygmund et des ensembles de Salem, nous avons considéré des séries aléatoires $\sum \pm f_n$, où les f_n sont des fonctions données et les signes $+$ et $-$ sont aléatoires ; des ensembles $F(E)$, où E est un ensemble donné, et F une fonction aléatoire ; et encore d'autres objets aléatoires qui peuvent s'écrire $G(\omega)$, où ω appartient à Ω , l'espace de probabilité.

Souvent, l'espace de probabilité considéré a aussi une structure topologique naturelle (c'est le cas, par exemple, pour les suites de signes $+$ et $-$), et c'est un espace de Baire. Dans un tel espace, le rôle des ensembles négligeables est tenu par les ensembles "maigres", dont les complémentaires sont les ensembles qui contiennent une intersection dénombrable d'ouverts denses. Les propriétés presque-sûres d'un objet $G(\omega)$ ont lieu, par définition, hors d'un ensemble négligeable de valeurs de ω ; les propriétés "quasi-sûres" (ou "génériques") hors d'un ensemble maigre.

Il est facile de se convaincre que les propriétés presque-sûres et les propriétés quasi-sûres de séries de Dirichlet³⁰

$$\sum \pm n^{-s}$$

sont très différentes. Partant de cette observation, H. Queffelec a mené une étude exhaustive des propriétés presque-sûres et quasi-sûres de telles séries, et de produits infinis analogues.

Il est plus intéressant de voir que, si E est un ensemble de Cantor, l'ensemble $F(E)$ est du type U (dans un sens très fort) pour quasi toute fonction continue F à valeurs réelles définie sur E . Avec quelques précautions, le résultat vaut encore si, au lieu de fonctions continues F , on prend des fonctions continûment dérivables. Cette observation importante est due à R. Kaufman, et je l'ai exploitée et présentée sous diverses formes. L'idée sous-jacente est celle-ci. Lorsque l'on modifie la construction d'un ensemble de Cantor par une déformation de la droite qui le supporte, on tend à augmenter les phénomènes de résonances. Le point de vue de Baire tend donc à produire des ensembles arithmétiquement indépendants, des ensembles de type U , des ensembles de Helson. Au contraire, le point de vue probabiliste tend à brouiller les fréquences, à favoriser la dépendance

29. 1982.2, 1973.4

30. 1980.2

arithmétique et à produire des ensembles du type M . Dans les deux cas, une construction explicite est remplacée par un théorème d'existence.

Voici un exemple d'application du point de vue de Baire. Hilbert, en 1900, avait annoncé qu'il savait construire une fonction analytique $f(x, y, z)$ qu'on ne pouvait pas obtenir en composant un nombre fini de fois des fonctions d'une ou de deux variables. Au contraire, Arnold et Kolmogorov (1957) ont montré que *toute* fonction continue $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ peut s'obtenir en composant un nombre fini de fois des fonctions continues d'une ou de deux variables; le "théorème de superposition" de Kolmogorov dit que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{2n+1} g_j \left(\sum_{k=1}^n \varphi_{jk}(x_k) \right)$$

les φ_{jk} étant des fonctions continues croissantes ne dépendant pas de f , et les g_j des fonctions continues (dépendant de f , naturellement); ainsi toute fonction continue $f(x_1, \dots, x_n)$ s'obtient en superposant des fonctions d'une variable, et des additions. En apparence, les deux énoncés se contredisent; en fait, le contexte montre qu'Hilbert se cantonnait à des fonctions analytiques. En apparence encore, les deux énoncés font apparaître des fonctions bizarres la fonction $f(x, y, z)$ de Hilbert, les fonctions φ_{jk} . J'ai observé que dans les deux cas les théorèmes sont génériques, c'est-à-dire que "quasi toute" fonction analytique $f(x, y, z)$ a la propriété de Hilbert, et "quasi toute" suite φ_{jk} de fonctions continues croissantes a la propriété de Kolmogorov (le spécialiste mondial de la superposition, Vituškin, appelle cette observation sur la construction de Kolmogorov "théorème de Kahane"). J'ai aussi montré, par un argument géométrique très simple, que l'on peut choisir les φ_{jk} lipschitziennes, et, par des arguments d'analyse assez élaborés, qu'on peut choisir les g_j dans des classes liées aux séries de Fourier. L'origine de mon intérêt pour la question est le cas $n = 1$, où l'on peut choisir les g_j dans la classe A de Wiener; ainsi la courbe croissante générique décrite par le point $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) est un ensemble de Helson dans $A(\mathbb{R}^3)$ - on a un résultat analogue dans $A(\mathbb{R}^2)$ -, que j'ai déjà indiqué p. 22³¹ à propos du problème de Lusin. Après l'exposé de Vituškin dans l'"Enseignement mathématique" (1977), j'ai précisé l'aspect géométrique du théorème de Kolmogorov générique et son lien avec l'analyse harmonique dans le cas $n > 1$, il est faux qu'on puisse choisir les g_j dans la classe A, et j'ai obtenu la condition nécessaire et suffisante sur h , homéomorphisme de \mathbb{R} , pour qu'on puisse choisir $g_j = \gamma_j(h)$ avec γ_j dans A; c'est que, sur aucun intervalle, h ne coïncide avec un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$. J'ai aussi montré que, dans le théorème de Kolmogorov générique, on ne peut pas remplacer, dans la première somme, $2n + 1$ par $2n$. Tout ce sujet, qui part du treizième problème de Hilbert et tourne autour du théorème de Kolmogorov, constitue un carrefour intéressant de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie³².

Je terminerai là l'analyse de mes travaux, quoiqu'elle soit incomplète; elle suffit à donner une idée de mes tendances et de ce que j'ai fait. Je n'ai pas cru bon de présenter, sauf lorsqu'ils se rappor-

31. à modifier en fonction de la nouvelle pagination.

32. 1968.8, 1975.1, 1980.1, 1982.3.

taient directement aux miens, les travaux et orientations de mes élèves : c'est qu'en règle générale ils se sont dirigés tout seuls, dans des directions assez variées, et que mon principal mérite à leur égard est de les avoir laissés très libres. J'ai conscience - sans regret - de ne pas leur avoir ouvert de larges avenues. Dans la forêt mathématique, il m'est arrivé de frayer certains passages ou de raccourcir certains chemins. Cependant, mes goûts et mes capacités m'ont porté vers les plantes rares et les formes étranges plus que vers les alignements majestueux. S'il fallait m'en justifier, il me suffirait de rappeler que, parmi les objets mathématiques les plus usuels aujourd'hui, beaucoup ont été, en leur temps, irrationnels, imaginaires, singuliers, exotiques, etc... Les courbes bizarres, les ensembles tordus suivront peut-être la même voie, s'il est vrai qu'avant de germer dans notre esprit, ils aient été dans la nature. Et n'y-a-t-il pas quelque raison de penser qu'il en est ainsi? Perrin, Denjoy et d'autres ont écrit là-dessus des choses admirables, que je ne résiste pas au plaisir de citer en guise de conclusion.

“Einstein et Smoluckowski ont caractérisé de la même façon l'activité du mouvement brownien. Jusqu'alors on s'était efforcé de définir une “vitesse moyenne d'agitation” en suivant aussi exactement que possible le trajet d'un grain. Les évaluations ainsi obtenues étaient toujours de quelques microns par seconde pour des grains de l'ordre du micron.

Mais de telles évaluations sont grossièrement fausses. L'enchevêtrement de la trajectoire est tel que la trajectoire notée est toujours infiniment plus simple et plus courte que la trajectoire réelle. En particulier, quand la durée qui sépare deux pointés d'un même grain décroît, la vitesse moyenne de ce grain pendant cette durée, loin de tendre vers une limite, grandit sans cesse, et varie follement en direction, comme on le voit de façon simple, en notant les positions d'un grain à la chambre claire de minute en minute, puis, par exemple, de 5 en 5 secondes, et mieux encore en les photographiant de vingtaine en vingtaine de seconde, comme ont fait Victor Henri, Comandon ou M. de Broglie, pour cinématographier le mouvement. On voit du même coup que l'on ne peut fixer une tangente en aucun point de la trajectoire, et c'est un cas où il est vraiment naturel de penser à ces fonctions continues sans dérivées que les mathématiciens ont imaginées, et que l'on regardait à tort comme de simples curiosités mathématiques, puisque l'expérience peut les suggérer...”.

J. Perrin Atomes (1912 et 1935), pp. 138-139.

“Parmi les notions étranges dues à Cantor, la plus utilement applicable aux besoins de l'analyse classique est certainement celle de l'ensemble parfait totalement discontinu...”

...Le lecteur désirera peut-être savoir ce que sont ces ensembles parfaits. Qu'il imagine une barre rectiligne de section idéalement fine. On ouvre en elle, vers le milieu, une brèche, qui laisse subsister deux fragments de la barre. On suppose que la position de ceux-ci est restée invariable pendant l'opération. Dans chacun des deux fragments, aux environs de leur milieu, on ouvre une nouvelle brèche. On obtient quatre fragments conservant exactement leur position primitive. Et l'on recommence sans trêve. La barre est indéfiniment rompue. Mais, et c'est là le prodige de Cantor, elle ne disparaît pas toute. Ce qui reste est un ensemble parfait totalement discontinu.

Ou encore, dans un bloc solide, on pratique une ou plusieurs fissures que l'on vide de leur substance. Il reste plusieurs solides distincts, deux à deux sans contact mutuel mais dont la position

est supposée inchangée, identique à celle qu'ils occupaient dans le solide initial. Sur chacun de ces solides subdivisionnaires, on répète le fissurage, et ainsi indéfiniment. Il reste un ensemble parfait, totalement discontinu moyennant certaines précautions dans le tracé des fissures. De loin, c'est un bloc, d'un peu plus près, ce sont plusieurs blocs au fur et à mesure que l'on s'en approche davantage, c'est un nombre croissant de blocs distincts. En réalité, c'est une poussière. Mais cette poussière, si on la tassait, pourrait remplir un volume et avoir la masse d'une matière dense continue.

Cette sorte de configuration jouit de beaucoup de propriétés de la substance continue. Elle paraît correspondre à de très profondes réalités."

A. Denjoy Eloge de Fainlevé (1934), Hommes, forme et le nombre, pp. 86-87.

"Length is a discontinuous functional. This means in plain words that we can trace in the vicinity of any rectifiable arc A another arc A' whose length exceeds an arbitrary, previously prescribed limit, or even is infinite. This fact is something more than a mathematical curiosity : it has practical consequences. When measuring the left bank of the Vistula on a school map of Poland, we get a length which is appreciably smaller than that read on a map 1 :200 000. When comparing the length of the present frontiers of Poland with their length in the year 963 we cannot use maps drawn with the same accuracy for both cases because of the lack of information about the precise course of our frontiers a thousand years ago. The same difficulty arises when measuring such objects as contours of leaves or perimeters of plane sections of trees : the result depends appreciably on the precision of the instruments employed.

This paradox of length is not to be confused with the fact that every measurement of physical quantities, such as areas, volumes, masses or forces, is liable to errors : when measuring an area we can fit the accuracy of instruments to the postulate of an error of less than 1% ; we can, if needed, increase this accuracy to meet the demand of reducing the error beneath 1/3%. In most cases, it is impossible to apply such procedure to lengths. The left bank of the Vistula, when measured with increased precision would furnish lengths ten, hundred and even thousand times as great as the length read off the school map. A statement nearly adequate to reality would be to call most arcs encountered in nature not rectifiable. This statement is contrary to the belief that not rectifiable arcs are an inventions of mathematicians and that natural arcs are rectifiable : it is the opposite that is true."

H. Steinhaus Length, shape and area. Coll. Math. 3 (1954), p. 8.