Pierre Cartier : un mathématicien visionnaire

Alain Connes* **et Joseph Kouneiher**†

Résumé : cet article revient sur la vie et les contributions mathématiques de Pierre Cartier, un personnage exceptionnel des mathématiques du XXe et du XXIe siècle. Comme membre clé du collectif Bourbaki, Cartier a joué un rôle central dans la formalisation et la modernisation des mathématiques. Son travail couvre une large étendue de domaines tels que la géométrie algébrique, la théorie des représentations, la physique mathématique, et la théorie des catégories, en laissant une marque indélébile sur la discipline. Au-delà de ses prouesses techniques, on se souviendra de Cartier pour sa générosité intellectuelle et son approche humaniste de la science, façonnant non seulement sa pensée mathématique, mais également sa compréhension culturelle étendue du domaine.

Introduction

Pierre Cartier est décédé le 17 août 2024, laissant derrière lui un héritage intellectuellement riche et profondément humain. Le premier mot qui vient à l'esprit quand on pense à Pierre, c'est "universalité". Il a été un mathématicien extraordinaire, et son intuition remarquable a impressionné beaucoup d'entre nous. Alexander Grothendieck, lui-même une légende des mathématiques, reconnaît dans *Récoltes et semailles*, l'intuition sans égale de Cartier, capable de pénétrer les sujets les plus variés avec une clarté et une profondeur remarquables.

Pierre a dédié sa vie aux mathématiques, auxquelles il a apporté un vaste trésor, à la fois à travers ses propres découvertes, mais également à travers les idées qu'il partageait généreusement avec la communauté.

Pierre Cartier est né le 10 juin 1932, à Sedan, en France. Après ses études secondaires à Sedan, et ses classes préparatoires au Lycée Saint-Louis à Paris, il est admis en 1950 au concours de l'École normale supérieure et il soutient sa thèse en 1958 sous la direction d'Henri Cartan.

Officiellement, son directeur de thèse était Roger Godement. Mais Cartier se sentit plus inspiré par le travail de Cartan, et particulièrement par celui d'André Weil, il changea donc de sujet de thèse ("Dérivations et diviseurs en géométrie algébrique").

> Le meilleur résultat de ma thèse, la dualité des variétés abéliennes, était un problème posé par André Weil dans son livre sur les variétés abéliennes et les courbes algébriques.

Il devint membre de Bourbaki en 1955, à l'âge de 23 ans et le resta jusqu'en 1983. Après avoir obtenu un poste de Professeur à Strasbourg dans les années 1960, il fut nommé Directeur de recherches au CNRS. Il fut visiteur permanent à l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) à Bures-sur-Yvette où il laissa une empreinte durable, et fut Professeur invité à Princeton, à l'École Polytechnique et dans diverses autres institutions. De 1988 à 2002, il fut professeur à l'École Normale Supérieure. Il est surtout connu pour ses travaux en géométrie algébrique, en théorie des représentations, en algèbre homologique et en théorie des catégories. Son intérêt pour les

*Collège de France.
†Université Côte d'Azur.

mathématiques a émergé très tôt, notamment après avoir lu à l'âge de 18 ans le travail d'Hermann Weyl sur la théorie des groupes et la mécanique quantique :

> C'est sans doute la lecture, à l'âge de dix-huit ans, de l'ouvrage classique d'Hermann Weyl sur la théorie des groupes et la mécanique quantique qui a eu la plus grande influence sur le cours de mes recherches mathématiques ultérieures. J'y ai découvert comment la beauté d'une théorie mathématique pleinement développée peut se combiner à une profonde nécessité physique et à l'importance des liens établis entre des domaines apparemment sans rapport.
>
> Au contact d'éminents savants qui enseignaient les mathématiques à l'École Normale Supérieure, puis de Nicolas Bourbaki, je me suis définitivement orienté vers les mathématiques "pures", sans méconnaître la valeur des analogies tirées des sciences physiques, l'importance des applications, ni l'aide que peut apporter une intuition bien contrôlée.
>
> Si la liste de mes publications donne l'impression d'un vagabondage incessant de la géométrie algébrique à la théorie des probabilités, de l'algèbre à la mécanique quantique, de la théorie des groupes à l'analyse numérique, ou de la théorie des nombres à la combinatoire, c'est que je me suis efforcé de percevoir les conséquences multiples de quelques idées générales que j'ai constamment revisitées. Je me suis davantage intéressé à la découverte de vérités nouvelles qu'à la culture minutieuse d'un domaine déjà bien exploré ([1], p. 1).

Pierre Cartier a été pendant des années un pilier du collectif Bourbaki, jouant un rôle clé dans la transformation des mathématiques du XX^e siècle et contribuant à la propagation du langage et des méthodes qui sont devenus la norme dans la recherche mathématique moderne. Il était l'un des rares individus à maîtriser l'intégralité de l'œuvre de Bourbaki, ce qui reflète sa croyance profonde dans le pouvoir de la structure et de la généralité de la pensée mathématique. Cartier a consacré une part importante (un tiers, selon lui) de son activité mathématique à la rédaction des livres de Bourbaki. Par exemple, les chapitres 4 à 6 des célèbres livres sur les groupes de Lie et les algèbres de Lie ont bénéficié de l'idée de Cartier de baser tout ce qui concerne les systèmes de racines, les groupes de Weyl, etc., sur les symétries par rapport aux hyperplans dans un espace vectoriel. Il a également donné une quarantaine de séminaires Bourbaki, reflétant son engagement envers le collectif et la transmission des connaissances.

Les contributions de Pierre Cartier sont aussi vastes que variées, couvrant des domaines tels que la géométrie algébrique, la théorie des nombres, la théorie des catégories, la théorie des distributions et la physique mathématique. Grâce aux concepts qu'il a créés, dont beaucoup portent son nom, comme les diviseurs de Cartier en géométrie algébrique, il a fourni le cadre conceptuel correct pour comprendre les notions clés. Par exemple, dans le cas des diviseurs, son idée dérivée des travaux d'Henri Cartan en géométrie analytique d'un faisceau local - la formulation théorique s'applique même dans des situations* qui seraient inaccessibles à une notion plus naïve de diviseurs. Il a été le premier à découvrir les propriétés spéciales du complexe de de Rham en caractéristique finie,

*par exemple en géométrie tropicale.

offrant des perspectives révolutionnaires sur son comportement dans ce contexte, et il a introduit l'opération de Cartier dans le calcul différentiel des variétés algébriques à caractéristique positive. Cela a révélé un scénario radicalement différent par rapport à la caractéristique zéro.

Les travaux de Cartier sur la théorie des groupes formels commutatifs représentent une contribution fondamentale à la géométrie algébrique et à la théorie des nombres. Son introduction aux groupes formels de Cartier a fourni un cadre profond et flexible pour l'étude des courbes algébriques, des schémas de groupes et de leur théorie de déformation associée. En substance, les *groupes formels de Cartier* offrent un langage pour comprendre le comportement infinitésimal des variétés et des schémas sur les corps, les anneaux et des bases plus générales.

À propos de son implication dans l'œuvre de Grothendieck, Cartier écrit :

> Tous ces concepts tels que *les diviseurs de Cartier, l'opération de Cartier sur les formes différentielles* [a]*, la dualité de Cartier* des schémas de groupes avec des schémas de groupes finis, et en particulier la *descente inséparable* se traduisent parfaitement dans la nouvelle théorie des schémas de Gothendieck. En combinant ses méthodes avec les miennes, Grothendieck a obtenu une preuve très simple du théorème de complétude pour les systèmes linéaires de diviseurs ([1], p.9).
>
> [a] Cette opération permit à Ogus de résoudre la conjecture de Katz dans le cas général, en prédisant certaines inégalités sur les valuations p-adiques de Frobenius. La construction, connue aujourd'hui sous le nom d'isomorphisme de Cartier, est une reformulation par Katz du travail de Cartier publié dans une note de 1957 aux Comptes Rendus. Cet isomorphisme, qui relie les composantes et les groupes de cohomologie du complexe de Rham d'une variété lisse en caractéristique positive, allait dominer tout le calcul différentiel en caractéristique p ou en caractéristique mixte pendant des années.

et il ajoute :

> En 1966, j'ai entrevu la possibilité d'étendre les théorèmes de structure de Dieudonné à ce nouveau cadre. Mon but était dans un premier temps de généraliser la construction des groupes formels unidimensionnels introduite par Lubin et Tate, et de l'exprimer indépendamment du choix d'une coordonnée. J'ai d'abord démontré que la propriété essentielle était l'existence d'un relèvement de l'opérateur de Frobenius, et j'ai pu obtenir une description complète en termes de modules pour la classe de groupes formels correspondante. Grâce à ces résultats, j'ai pu résoudre complètement une série de problèmes formulés par Grothendieck[a] en lien avec sa théorie des cristaux.
>
> [a] Dans son article *Sur quelques points de l'algèbre homologique* (Tohôku), après avoir constaté l'absence d'une théorie satisfaisante des structures multiplicatives en algèbre homologique qui réponde au niveau de généralité et de simplicité nécessaire, Grothendieck ajoute une note de bas de page reconnaissant la contribution de Pierre Cartier : "M. P. Cartier vient de trouver une formulation généralement satisfaisante des structures multiplicatives en algèbre homologique".

1. Algèbres de Hopf, théorie des groupes

Le travail de Cartier suivait un fil conducteur qui tournait autour des groupes et des algèbres de Hopf. Il considérait les algèbres de Hopf comme un outil puissant pour comprendre divers phénomènes algébriques. Ses recherches portaient principalement sur leurs applications en topologie algébrique, en théorie des représentations et en physique mathématique. La dualité des algèbres de Hopf, où chaque structure algébrique possède une structure de co-algèbre correspondante, faisait écho à la philosophie mathématique plus large de Cartier, qui mettait l'accent sur l'interdépendance des différents domaines des mathématiques.

> Je n'ai jamais abandonné la théorie des groupes : elle reste pour moi le point central de tout ce que j'ai fait. À mon avis, le livre que tout le monde aurait dû lire est *Théorie des groupes et mécanique quantique* d'Hermann Weyl. C'est un texte que je lis encore aujourd'hui avec le même intérêt. La théorie des groupes a l'avantage de permettre de faire de la physique à la manière que Weyl propose, c'est donc un outil important en physique. C'est aussi un outil important en géométrie, bien sûr, après les travaux d'Elie Cartan (le père d'Henri Cartan), et même avant. C'est un outil crucial en arithmétique, comme l'a démontré André Weil. Pour moi, c'est comme si j'avais une forteresse, la forteresse des groupes : je peux explorer ici et là, entrer par une autre porte, mais à la fin, je reviens toujours à ma forteresse [a].
>
> [a]communication personnelle.

Ses premiers intérêts et résultats originaux se sont concentrés sur la caractérisation de l'algèbre enveloppante des algèbres de Lie à travers les propriétés de sa filtration et de son coproduit, établissant ainsi la base algébrique de la théorie locale des groupes de Lie et de son extension aux groupes formels. Une autre idée centrale est sa théorie géométrique des groupes de Weyl. Sa perspective est que la théorie classique doit être comprise comme l'étude des groupes engendrés par des symétries relatives aux variétés linéaires. Lors d'un congrès Bourbaki à Pelvoux [†], Pierre Cartier a introduit les axiomes des systèmes de racines, qui jouent un rôle clé dans les chapitres sur les groupes de Lie et les algèbres de Lie.

L'un des thèmes récurrents de ses recherches fut la relation entre les représentations d'un groupe de Lie et celles de son algèbre de Lie, en particulier le problème des représentations unitaires de dimension infinie. Avec Dixmier [3], il étendit les résultats de Harish-Chandra au cas des groupes de Lie arbitraires dans un espace de Banach. Ces résultats attirèrent l'attention des physiciens mathématiciens qui, suivant les traces d'Hermann Weyl et de von Neumann, analysèrent les relations de commutation en mécanique quantique. Cartier introduisit les vecteurs de distribution pour les représentations de dimension infinie, qui furent ensuite utilisés en analyse fonctionnelle et en théorie quantique des champs. En fait, Ed Nelson put, en 1959, supprimer une hypothèse inutile de [3] en utilisant des méthodes entièrement nouvelles dans la théorie des processus : les temps d'arrêt et la propriété de Markov forte. Cela déclencha l'intérêt de Pierre pour la théorie des probabilités. En 1964, il rendit compte des premiers travaux de l'école russe (Gelfand, Milnos) sur les processus stochastiques dans les espaces vectoriels de dimension infinie. Il introduisit dans la théorie la classe des "espaces standards", dans laquelle la théorie de la mesure ne présente pas les "monstruosités" qui avaient tant entravé le développement de la théorie des processus. Son élève, Fernique, prouva dans sa thèse que "tous" les espaces fonctionnels sont standards. Cartier observa

[†]Les congrès Bourbaki sont des rencontres des membres du groupe Bourbaki durant lesquelles les participants discutent des écrits par l'un d'eux sur des sujets sélectionnés ; ces écrits lus à haute voix, après de nombreuses versions, deviendront les livres de Bourbaki.

que ces espaces standards n'étaient autres que des espaces de Lusin non métrisables et que toute la théorie classique de Lusin et Souslin ne reposait jamais sur l'hypothèse de mesurabilité, comme on le supposait initialement. Sa collaboration durant cette période avec P. A. Meyer et L. Schwartz culmina dans le volume de Bourbaki qui concluait la série sur l'intégration et la théorie de la mesure.

Cartier s'est ensuite intéressé aux propriétés markoviennes des fonctions (ou distributions) aléatoires à paramètres multiples. Son travail a résolu la controverse entre Paul Lévy et McKean, en faveur de ce dernier, et a mis au jour la faille dans le raisonnement de Paul Lévy. Ces mêmes distributions aléatoires ont trouvé des applications dans la théorie constructive des champs quantiques, suivant les travaux de Nelson et de Cartier lui-même. Dans ses travaux sur la formulation intégrale de chemin de la mécanique quantique et de la physique quantique, en collaboration avec Cécile Dewitt, Cartier a cherché à asseoir ce concept crucial sur une base mathématique solide. En intégrant des méthodes issues de l'algèbre, de la géométrie et de l'analyse, Cartier a contribué à clarifier l'utilisation de l'intégrale de chemin et ses liens avec d'autres domaines des mathématiques, tels que les processus stochastiques et l'intégration fonctionnelle.

Nous reviendrons dans la section 1.3 sur une autre contribution majeure de Pierre à la physique mathématique, à savoir son groupe de Galois cosmique en théorie de la renormalisation.

1.1. Sur la théorie des groupes formels

Parmi les contributions originales de Cartier à la théorie des groupes figurent ses résultats relatifs aux groupes formels, faisant suite aux publications de Dieudonné en 1954 et 1959, qui ont établi la théorie des groupes formels. Ces travaux marquent un retour aux sources de la théorie de Lie en étudiant les séries entières qui expriment la multiplication près de l'origine d'un groupe de Lie. Dieudonné, notamment dans le cas des groupes commutatifs, obtint une série de nouveaux résultats.

L'objectif de Cartier, en s'appuyant sur les résultats de H. Cartan en topologie algébrique, était de reformuler la théorie de Dieudonné en termes de dualité linéaire. Cartier a souligné l'importance du coproduit dans l'"hyperalgèbre" de Dieudonné, fournissant une formulation intrinsèque de la notion de groupe formel, établissant son équivalence avec celle des bialgèbres filtrées, et une extension du cadre pour obtenir les noyaux d'homomorphismes.

S'appuyant sur les travaux de Dieudonné, Cartier a observé que les matrices p-adiques étaient ce qui manquait à Weil pour compléter la théorie des variétés abéliennes.

> En lisant les manuscrits inédits sur les groupes formels que Dieudonné m'avait fait partager, j'eus soudain l'intuition que ses matrices p-adiques étaient précisément ce qui manquait à Weil pour compléter la théorie des variétés abéliennes qu'il venait de développer. Au même moment, Grothendieck commençait à révolutionner complètement la géométrie algébrique (voir [1], p.1).

Sous la direction de Jean-Pierre Serre, Cartier a résolu tous les problèmes laissés en suspens par Weil, incluant la bidualité des variétés abéliennes, l'absence de torsion dans le groupe de classes de diviseurs (également résolue par Barsotti) et la représentation des homomorphismes des variétés abéliennes, tout en utilisant la technique d'étude des isogénies, en particulier dans le cas inséparable.

Ces travaux n'ont cependant pris toute leur importance qu'après l'introduction des schémas de groupes par Grothendieck. Au cours de cette période, Cartier a introduit plusieurs concepts clés : les diviseurs de Cartier, l'opération de Cartier sur les formes différentielles, la dualité de Cartier des schémas de groupes finis et, plus particulièrement, la descente inséparable. Tous ces concepts ont été intégrés de manière transparente dans la nouvelle théorie des schémas de Grothendieck. En combinant ses méthodes avec celles de Cartier, Grothendieck a fourni la preuve du théorème de complétude pour les systèmes linéaires de diviseurs.

En 1966, Cartier reconnaît la possibilité d'étendre les théorèmes de structure de Dieudonné :

> Le progrès essentiel fut l'introduction des modules de courbes associés aux groupes formels et de la notion de courbe typique. Ce nouveau concept expliquait rétrospectivement les propriétés arithmétiques des séries exponentielles classiques et, en particulier, l'existence de l'exponentielle d'Artin-Hasse. Il offrait également une interprétation souple du module de Dieudonné et me permettait d'affiner des théorèmes connus sur les groupes de Witt. La courbe typique universelle dans un groupe de Witt joue un rôle central dans ces démonstrations.

La théorie des groupes formels commutatifs de Cartier et ses travaux sur la typification des courbes à travers l'introduction de ce que l'on appelle aujourd'hui les groupes formels de Cartier ont été déterminants [7, 9]. Ces résultats ont jeté les bases de la compréhension de la structure des groupes formels et de leur rôle dans la théorie des nombres et la topologie algébrique. Son introduction de la construction globale de Witt, une technique avancée qui a unifié diverses constructions locales dans un cadre global cohérent, reste une pierre angulaire dans l'étude des structures algébriques.

1.2. Groupes quantiques

Cartier s'intéressait particulièrement à la théorie des groupes quantiques, qui sont des déformations de groupes classiques pouvant être étudiées dans le cadre des algèbres de Hopf. Ces travaux ont non seulement élargi le paysage théorique de l'algèbre, mais ont également eu des implications importantes pour la physique mathématique, en particulier dans l'étude des symétries et des systèmes intégrables. Les groupes quantiques de Drinfeld, par exemple, sont essentiels pour comprendre comment les structures algébriques encapsulent les symétries quantiques.

Cartier a exprimé son profond attachement aux algèbres de Hopf en décrivant le moment scientifique le plus important de sa vie : la présentation qu'il a faite au Congrès international des mathématiciens en 1986 à Berkeley et les nouvelles voies de recherche qu'elle a ouvertes :

Au congrès, j'ai donné un exposé à la place de Drinfeld, qui avait été invité mais n'avait pas pu venir à cause du régime soviétique. Le premier jour, le président russe de l'Union mathématique internationale m'a remis le manuscrit anglais de Drinfeld, ne sachant pas trop quoi en faire. Il y avait aussi un texte de Manin, et il m'a demandé si je pouvais remplacer l'un d'eux. Après une brève réflexion, j'ai choisi celui de Drinfeld. Il m'a alors informé que la présentation était prévue pour l'après-midi. J'ai pris le manuscrit et j'ai dit : "Je vais essayer.".

J'ai expliqué la situation à Kaplansky, le président américain du Comité d'organisation, qui m'a aidé en m'enfermant dans une pièce avec des sandwichs et du café. J'avais six heures pour me préparer. Bien que je connaisse les algèbres de Hopf, le sujet était nouveau et au moment où j'ai donné ma conférence, 400 personnes s'étaient réunies pour écouter Drinfeld, c'est-à-dire moi. Les jours suivants, j'ai distribué autant de copies du texte que possible, réalisées en utilisant des méthodes simples.

À cette époque, j'approchais de la fin de mon programme de recherche mathématique et j'étais dans une période d'attente. Je me suis rendu compte que les groupes quantiques étaient quelque chose d'entièrement nouveau, qui pouvait être abordé avec des techniques que j'avais déjà utilisées (comme les groupes de Lie et la géométrie différentielle), que je connaissais bien. Il y avait aussi une motivation venue de la physique, même si elle n'était pas toujours apparente, qui a réorienté mes intérêts pendant une bonne dizaine d'années. D'ailleurs, j'organise toujours un séminaire à l'École Polytechnique intitulé "Groupes quantiques et géométrie de Poisson", qui poursuit ces travaux, vingt ans plus tard.

1.3. Le groupe de Galois cosmique

Dans le domaine de la physique mathématique, Pierre Cartier s'est intéressé de longue date à la théorie quantique des champs [8, 10, 13]. Il a proposé l'idée [11] d'un "groupe de Galois cosmique" sous-jacent aux symétries du processus de renormalisation, tandis que le groupe de renormalisation traditionnel pourrait être considéré comme un sous-groupe à un paramètre de ce groupe de Galois cosmique plus vaste. À propos de cette idée, il écrit :

Ma notion de "groupe de Galois cosmique" est née de mes réflexions sur la physique mathématique. Je me suis inspiré en particulier des travaux de [12], qui ont redéfini le processus de renormalisation, une technique d'élimination des infinis dans les intégrales divergentes liées aux diagrammes de Feynman. Ils ont introduit une nouvelle structure de groupe pour décrire les relations complexes dans ces calculs.

Parallèlement, mes recherches mathématiques se sont concentrées sur les séries et intégrales impliquant des nombres spéciaux, comme les puissances et les valeurs de la fonction zêta de Riemann [6]. Ces relations sont régies par un groupe de symétrie qui ressemble au groupe de Galois motivique de Grothendieck. J'ai commencé à voir une analogie frappante entre ce groupe et le groupe de Connes-Kreimer, suggérant qu'il pourrait s'agir de deux variantes du même groupe, influençant à la fois les aspects mathématiques et physiques du problème.

> Le groupe de Galois motivique traite des automorphismes de certains nombres transcendants, qui sont similaires aux constantes apparaissant dans les calculs de diagrammes de Feynman. Cette observation m'a conduit à interpréter le groupe de [12] comme un groupe de symétrie régissant les constantes fondamentales de la physique. Dans le modèle standard, ces constantes sont souvent ajustées empiriquement, sans grande explication mathématique. Je crois que ce groupe pourrait exprimer de nouvelles symétries entre ces constantes, ce qui pourrait avoir des implications importantes pour la cosmologie. Mon rêve ultime est d'unir les idées de [12] avec le groupe de Galois motivique, même si, pour l'instant, il s'agit toujours d'un programme de recherche en cours [a] [11].
>
> [a]communication personnelle.

Il a fallu beaucoup de travail et de temps pour obtenir une réalisation concrète de l'idée de Pierre Cartier sur le Groupe de Galois cosmique ainsi que de son action sur les constantes de couplage des théories physiques renormalisables. La première étape, suite à l'introduction de l'algèbre de Hopf des graphes de Feynman, a été la réalisation que le processus de renormalisation est, en fait (dans le schéma de régularisation dimensionnelle), identique à la décomposition de Birkhoff en mathématiques pures, qui intervient dans la classification des fibrés vectoriels sur la sphère (voir [23]). Une fois ce résultat obtenu, il a fallu à nouveau du temps, en utilisant la correspondance de Riemann-Hilbert, pour réaliser ([24]) qu'il existe une algèbre de Hopf universelle $\mathcal{H}$ derrière tous ces calculs [‡]. C'est le dual gradué $\mathcal{H}$ de l'algèbre enveloppante universelle de l'algèbre de Lie classée libre engendrée par des éléments de degré n pour tout n positif. Soit $\mathbb{U}$ le schéma de groupe affine associé à $\mathcal{H}$ et soit $\mathcal{H}$ and $\mathbb{U}^* = \mathbb{U} \rtimes \mathbb{G}_m$ son produit semi-direct par l'action du groupe multiplicatif donné par le classement. Il en découle (voir [24], corollaire 1.107) que ce groupe agit sur les constantes de couplage de n'importe quelle théorie physique renormalisable, fournissant ainsi le meilleur modèle du groupe de Galois cosmique. Il donne une réalisation concrète du groupe de symétrie des théories physiques et présente une similitude fascinante avec le groupe de Galois motivique des motifs mixtes de Tate (voir [24], Corollaire 1.111).

2. Ses nombreuses idées clés offertes aux autres

L'influence de Pierre Cartier s'étend bien au-delà des concepts associés à son nom, car sa générosité intellectuelle a favorisé des collaborations importantes avec ses contemporains. Il a notamment fourni à André Weil des idées clés pour prouver des résultats fondamentaux en théorie des nombres en utilisant la compacité locale de l'anneau topologique des adèles. Les idées de Cartier ont certainement influencé Weil dans la rédaction de son livre, *Basic Number Theory*, sur la compacité locale de l'anneau des adèles, qui contient un corps global comme sous-corps discret et cocompact.

Cartier a également conseillé à Grothendieck d'utiliser des idéaux premiers au lieu d'idéaux maximaux pour définir le spectre d'un anneau en géométrie algébrique, car les idéaux premiers sont les seuls compatibles avec les morphismes. En géométrie algébrique classique, les points d'une variété algébrique correspondent aux idéaux maximaux de son anneau de coordonnées, tandis que les idéaux premiers correspondent aux sous-ensembles fermés irréductibles. Le spectre d'un anneau, Spec(A), comprend donc des points standards associés à des idéaux maximaux et des points

[‡]en introduisant la catégorie des "connexions plates équisingulières", dont on montre qu'elles constituent une catégorie tannakienne, ce qui est équivalent à la catégorie des modules sur un certain groupe pro-algébrique.

génériques liés à des sous-ensembles fermés irréductibles [§]. L'idée de considérer les sous-ensembles irréductibles d'une variété algébrique comme des "points" remonte aux géomètres algébriques italiens du début du XX[e] siècle.

Une autre précision apportée par Cartier aux travaux de Grothendieck concerne également le concept de schémas. En géométrie algébrique, les schémas sont des objets mathématiques qui généralisent les variétés algébriques. Grothendieck a introduit ce concept à la fin des années 1950, en définissant les schémas comme des entités qui codent des informations sur les solutions d'équations polynomiales au moyen d'anneaux commutatifs. Cependant, pour aborder la complexité de ces objets, Cartier a proposé une perspective plus abstraite et plus puissante : il a suggéré de considérer les schémas de Grothendieck comme des foncteurs de la catégorie des anneaux commutatifs vers la catégorie des ensembles. Cette perspective innovante a eu un impact significatif sur la géométrie algébrique en fournissant une compréhension plus abstraite et plus robuste des schémas.

L'intérêt de cette proposition réside dans son universalité et sa généralisation. Cette approche fonctorielle permet d'étendre le concept de schéma à des situations plus générales, facilitant ainsi l'étude des propriétés de ces objets dans des contextes variés. Cette perspective ouvre également la voie à des applications dans d'autres domaines des mathématiques, notamment la topologie, la théorie des nombres et même la physique théorique, où des constructions similaires s'avèrent souvent utiles. Il convient de noter que Chevalley avait déjà utilisé cette idée dans son article de 1956 sur les groupes de Lie finis, dans lequel il définissait un groupe algébrique comme un foncteur allant des anneaux vers les groupes.

L'introduction des variétés de groupes dans la théorie transcendantale des nombres par S. Lang a suivi une conjecture de Cartier, qui demandait s'il serait possible d'étendre le théorème d'Hermite-Lindemann du groupe multiplicatif à un groupe algébrique commutatif sur le corps des nombres algébriques. C'est le résultat que Lang a démontré en 1962. À cette époque, il existait quelques résultats de transcendance (par Siegel et Schneider) concernant les fonctions elliptiques et même les fonctions abéliennes. Cependant, l'introduction par Lang des groupes algébriques dans ce contexte a marqué le début de plusieurs développements importants dans le domaine.

Plus précisément, dans [26], Lang a démontré la conjecture de Cartier, qui stipule que si G est un groupe algébrique sur un corps de nombres K et qu'un $\alpha \in \mathrm{Lie}(G)(K)$ est tel que $t \mapsto \exp_G(t\alpha)$ n'est pas une fonction algébrique, alors $\exp(\alpha)$ est transcendant sur K. Pour G comme groupe linéaire, cela se réduit au résultat classique concernant la fonction exponentielle. La nouveauté vient du cas non linéaire ; lorsque G est une variété abélienne, le résultat de Lang représente un résultat de transcendance pour les valeurs des fonctions thêta. Lang a dérivé ce théorème de son critère de transcendance, qui généralise la méthode de Gelfand et Schneider [27, 28].

[§]La théorie des schémas de Grothendieck s'appuie sur ces concepts, reliant la géométrie classique aux concepts spatiaux modernes. Une justification courante pour identifier les points d'un schéma affine avec des idéaux premiers (au lieu de simples idéaux maximaux) est qu'un homomorphisme d'anneau : $\phi : A \longrightarrow B$ n'induit pas toujours une application bien définie à partir de l'ensemble des idéaux maximaux de B à A ; cependant, l'image inverse d'un idéal premier sous un tel homomorphisme $\phi : A \longrightarrow B$ reste un idéal premier dans A.

Les autres facettes de Pierre Cartier

Au-delà de ses contributions techniques, Pierre Cartier était un fervent défenseur des aspects philosophiques et humanistes des mathématiques. Il reconnaissait que les mathématiques ne sont pas simplement une collection de théorèmes et de preuves, mais une entreprise humaine qui reflète la créativité, la beauté et la recherche de la vérité. Ses écrits et ses conférences exploraient souvent les implications plus larges des idées mathématiques, abordant leurs fondements philosophiques et leurs liens avec d'autres domaines, tels que la physique et la philosophie ¶.

Concernant son intérêt pour l'épistémologie et la philosophie des mathématiques, il a fait la remarque suivante :

> Ce qui m'attire dans l'épistémologie des mathématiques, c'est de comprendre comment les mathématiques sont intégrées à la civilisation. Je m'intéresse à la façon dont les concepts mathématiques émergent des préoccupations sociétales, reflétant l'esprit du temps. L'une de mes étudiantes s'est spécialisée dans l'histoire des mathématiques en Chine et a travaillé sur sa thèse avec moi et mon frère sinologue. André Weil a éveillé mon intérêt pour l'histoire des mathématiques, m'apprenant à considérer les mathématiciens du passé - comme Euclide, Archimède, Fermat, Euler et Gauss - comme des contemporains. Les écrits d'Hermann Weyl m'ont également influencé, suscitant chez moi le désir d'explorer la relation entre les concepts physiques et mathématiques d'un point de vue philosophique. Récemment, je me suis concentré sur l'histoire des catégories, en partie parce que j'ai contribué à leur développement et que je peux m'appuyer sur mes souvenirs. Ce domaine des mathématiques est étroitement lié aux questions philosophiques, que je trouve plus convaincantes que la logique formelle elle-même. La question centrale demeure : qu'est-ce qui garantit que les mathématiques transmettent la vérité, et comment le font-elles de manière cohérente [a] ? [29, 30].
>
> [a] communication personnelle.

Rencontrer Pierre Cartier, c'était rencontrer une personnalité qui combinait une rigueur intellectuelle avec une générosité humaine également exceptionnelle. Ses collègues se souviennent de lui comme d'un homme d'une grande simplicité, dont le pragmatisme altruiste était aussi impressionnant que ses vastes connaissances mathématiques. Les anecdotes abondent sur ses exploits cyclistes, démontrant une vitalité physique qui semblait défier le temps, et sur ses talents en astronomie, domaine dans lequel il partageait avec enthousiasme ses connaissances.

À propos de son approche de la recherche, il déclare :

¶ Son intérêt dans l'Histoire et la philosophie des mathématiques s'est illustrée par le séminaire qu'il a co-animé pendant plus de 30 ans.

> Feynman a dit un jour que pour être un génie, il suffit de garder dix problèmes en tête et de chercher constamment des solutions dans tout ce qui nous entoure. Mon approche est ancrée dans ma curiosité innée, nourrie par mes premières études en philosophie, physique et mathématiques. Je m'attaque toujours à plusieurs problèmes et méthodes simultanément, ce qui me permet d'établir des analogies entre différents sujets, un processus qui a souvent conduit à des découvertes importantes dans ma carrière.
>
> Mon caractère a été façonné par l'imagination débordante de mon père et le bon sens alsacien de ma grand-mère. Cette combinaison m'a inculqué une curiosité insatiable pour les gens, les voyages et la lecture sur des sujets très variés. Ma femme, qui avait des intérêts littéraires et musicaux, m'a également ouvert de nouvelles perspectives, comme la musique, que j'ai appris à apprécier grâce à elle.
>
> Aujourd'hui, je continue à cultiver cette curiosité, par exemple en collaborant avec des musiciens sur des projets inspirés des travaux classiques d'Euler sur la musique [29, 30].

L'héritage de Cartier comprend également son rôle de mentor et d'éducateur. Il a inspiré d'innombrables étudiants et collègues par son enthousiasme pour les mathématiques et son engagement envers la rigueur intellectuelle. Sa générosité dans le partage d'idées, son encouragement des jeunes mathématiciens et sa capacité à voir les liens entre divers domaines d'études ont laissé un impact durable sur la communauté mathématique.

Son influence s'étend bien au-delà de ses publications. Il était connu pour sa capacité à poser des questions profondes et approfondies qui ont souvent conduit à de nouvelles pistes de recherche. Ses réflexions, qu'elles soient partagées par écrit ou lors de conversations, ont suscité des idées et des collaborations qui continuent de porter leurs fruits dans les sciences mathématiques.

À l'Institut des Hautes Études Scientifiques (IHES) de Bures-sur-Yvette, Pierre Cartier était plus qu'un simple chercheur ; il était un pilier de l'institution, contribuant largement à son rayonnement. Pour ceux qui ont eu le privilège de le connaître, il était plus qu'un collègue, il était un mentor, un guide, toujours prêt à éclairer les sentiers les plus sombres de la recherche, à répondre aux questions les plus complexes ou à replacer un problème dans son contexte conceptuel.

Sa passion pour le partage allait au-delà de la théorie. Pierre Cartier était un voyageur infatigable [‖], mettant en pratique ses idées généreuses en enseignant dans le monde entier, notamment au Vietnam, où il se rendait fréquemment pour transmettre son savoir [31]. Il aimait aussi les discussions politiques, notamment avec Laurent Lafforgue, et même si leurs opinions divergeaient souvent, ils trouvaient un plaisir mutuel à ces échanges, reflétant l'ouverture d'esprit et la vitalité intellectuelle

[‖] Parmi ses voyages, il a effectué cinq missions de formation au Vietnam, chacune d'une durée d'un à deux mois, en 1976, 1980, 1984, 1988 et 2007. Il a également visité l'Amérique latine, notamment le Chili et l'Argentine, en 1986, 1988, 1995, 1996, et 1997. Ses voyages l'ont conduit en République tchèque en janvier 1991, 1992 et 1993, ainsi qu'en septembre 1987. En septembre 1987, il se rend également en Roumanie, puis en Ukraine en septembre 1993. Entre octobre et en décembre 1993, il a visité l'Inde, tandis que le Japon faisait partie de son itinéraire en avril 1976 et à nouveau d'octobre à Décembre 1990. Il a séjourné au Québec en septembre et octobre 1992 à Montréal, et en mars 1996, il a visité Munich, en Allemagne. Il s'est également rendu à Vienne, en Autriche, en mars 1993, et en mai 1994, il a effectué un voyage à Saint-Pétersbourg, en Russie.

de Pierre.

En effet, Pierre a conservé toute sa vie son ouverture d'esprit et son dévouement à s'engager et à partager des idées au sein de la communauté mathématique. En janvier 2020, Pierre a donné sa dernière conférence, qui a eu lieu à l'IHES. À cette époque, il préférait ne pas donner de cours debout pendant de longues périodes, nous avons donc adapté le format pour le rendre plus confortable pour lui. Pour soutenir cela, nous avons préparé des diapositives basées sur une vidéo d'une conférence similaire qu'il avait donnée en 2018. L'idée était de diffuser la vidéo en parallèle des diapositives, permettant à Pierre de la mettre en pause à tout moment pour fournir des informations et des explications supplémentaires. Le sujet était fascinant, explorant un article de Hiroshi Umemura et une idée de Yuri Manin sur la dérivation des groupes quantiques à partir de la théorie de Galois, formulés de telle manière que le groupe de Galois se manifesterait naturellement comme un groupe quantique. La conférence s'est déroulée à merveille. Pierre a répondu aux questions, a participé aux discussions et a fait des pauses si nécessaire pour approfondir le sujet. Cette dernière conférence en janvier 2020 a témoigné de sa passion et de son enthousiasme durables, et il a continué à apprécier de faire partie de la communauté de l'IHES.

En repensant à la carrière extraordinaire de Pierre Cartier, nous célébrons non seulement ses réalisations mathématiques, mais aussi l'esprit avec lequel il a abordé son travail. Ses contributions ont non seulement repoussé les frontières de la connaissance, mais ont également incarné l'essence même de ce que signifie être un mathématicien : curieux, rigoureux, créatif et profondément connecté au paysage intellectuel plus large.

Sa vie fut entièrement consacrée à la quête du savoir, à l'exploration des mystères mathématiques et au service de la communauté scientifique. Son influence fut considérable et son héritage continuera de vivre à travers ses contributions, ses écrits et l'inspiration qu'il a transmise à tant d'entre nous. Même face à la maladie, il a fait preuve d'un courage exemplaire, ne laissant jamais sa condition physique diminuer sa vitalité intellectuelle.

Son exemple nous encourage à poursuivre la recherche et la diffusion du savoir avec la même passion et le même dévouement qu'il a incarné tout au long de sa vie. Comme l'écrivait Jean Cocteau : "Le véritable tombeau des morts est le cœur des vivants.". Pierre restera toujours avec nous, dans nos cœurs et nos esprits, nous inspirant à jamais par son immense contribution au monde des mathématiques.

Pierre Cartier avait un grand penchant pour les métaphores. Il est intéressant de noter que ses citations, décrivant son parcours et son amour du voyage pour enseigner les mathématiques "ailleurs", pas forcément ses propres mathématiques, mais les mathématiques en général, servent de métaphores à son mode de vie et à sa joie de partager sa passion pour le sujet :

Je pourrais me décrire comme un mathématicien sans frontières, pour reprendre une expression bien connue. J'entends par là que je ne connais pas les frontières, ce qui m'a permis de faire des mathématiques dans des pays assez remarquables : le Vietnam, l'Irak, le Kurdistan et d'autres. Enseigner les mathématiques dans de tels endroits valait la peine.

Pourquoi est-il intéressant de traverser les frontières ? Parce que de l'autre côté, les choses sont différentes. C'est toujours passionnant de s'aventurer de l'autre côté de la barrière, de voir ce qui se cache derrière. Ce qui peut paraître inintéressant d'un côté peut être un trésor de l'autre, offrant une perspective nouvelle. Ce qui peut paraître anodin ici peut être important là-bas.

Alors oui, j'en sais beaucoup sur le dépassement des limites ! Elles sont faites pour être dépassées ! D'un point de vue scientifique, le début de ma carrière m'a fait franchir de nombreuses frontières : j'ai commencé comme radioastronome et, après quelques détours par la philosophie, j'ai fini mathématicien.

Pour faire de la bonne science, il faut cela : une imagination constante, aucun préjugé et, comme je l'ai appris par expérience, aucune crainte que vos idées ne soient ridicules.

Références

[1] Cartier P., Notice sur les travaux scientifiques de Pierre Cartier des années 1970– 1990.

[2] Cartier P. (1958), Dualité des variétés abéliennes (séminaire bourbaki, 1958), par Pierre Cartier. http://www.numdam.org/item/SB_1956-1958__4__379_0.pdf.

[3] Cartier P., Dixmier J., Vecteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie. Amer. J. Math., 80 (1958), 131-145.

[4] Cartier P. (1957), A new operation on differential forms par Pierre Cartier, note présentée par J. Hadamard, Comptes rendus de l'Acad. des Sc. Une nouvelle opération sur les formes différentielles. C. R. Acad. Sci. Paris, 244 (1957), 426-428. https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k31965/f426.item et https://www.math.stonybrook.edu/~jiahao/Notes/cartier.pdf.

[5] Cartier P. (1958), Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique (1958). http://www.numdam.org/item/10.24033/bsmf.1503.pdf.

[6] Cartier P. (1966). "Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes prounipotents." Séminaire Bourbaki, no. 885.

[7] Cartier P. (1969). "Groupes formels, fonctions automorphes et représentations galoisiennes." Séminaire Bourbaki, vol. 1968/69, exp. no. 347, 97–127.

[8] Cartier P. (1971), Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs, Séminaire N. Bourbaki, 1971, exp. no 388, p. 107-122.

[9] Cartier P. (1972). "Groupes algébriques et groupes formels." Séminaire de l'Institut des Hautes Études Scientifiques.

[10] Cartier P. (1974), Problèmes mathématiques de la théorie quantique des champs II : prolongement analytique Séminaire N. Bourbaki, 1974, exp. no 418, p. 1-33.

[11] Cartier P. (2003). "A mad day's work: from Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry." Bulletin of the American Mathematical Society, 38 (4), 389-408.

[12] Connes A., Kreimer D., Hopf algebras, renormalization and non-commutative geometry, Comm. Math. Phys., 199 (1998), 203-242.

[13] Cartier P. and DeWitt-Morette C. (2004), Functional Integration : Action and Symmetries. (Cambridge University Press, 2004).

[14] Cartier P. (2006), A Primer of Hopf algebra, sept. 2006, IHES. https://people.math.osu.edu/kerler.2/VIGRE/InvResPres-Sp07/Cartier-IHES.pdf.

[15] Cartier, P. (1963). A Generalization of the Notion of Distribution. In Séminaire Schwartz 1962/63 Exposé No. 7. Paris: école Normale Supérieure.

[16] Cartier, P. (1966). Une Nouvelle Définition des Distributions. In Séminaire Schwartz 1965/66 Exposé No. 17. Paris: école Normale Supérieure.

[17] Cartier, P., Schwartz, L. (1967). Théorie des Distributions et Développement Asymptotique. In Annales de l'Institut Fourier, 17(1), 293-364.

[18] Cartier, P. (1967). Fonctions génératrices, distributions et transformations de Fourier. In Séminaire de Théorie des Nombres (1965/1966), 109-141. Paris: école Normale Supérieure.

[19] Cartier, P. (1968). Integration Over Finite and Infinite-Dimensional Spaces. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Moscow), 421-436.

[20] Cartier, P., Schwartz, L. (1971). Théorie des Distributions. In Séminaire Bourbaki, 23e année (1970/1971), Exp. No. 399. Paris: Société Mathématique de France.

[21] Cartier, P. (1980). On the Structure of Distributions and Their Applications. In Lecture Notes in Mathematics, Vol. 755, pp. 38-55. Berlin, Heidelberg: Springer.

[22] Cartier, P. (1983). Distribution Theory and Probability Theory: An Analytical Approach. In Séminaire de Probabilités XVII 1981/82, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 986, pp. 23-47. Berlin, Heidelberg: Springer.

[23] A. Connes, D. Kreimer, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem. Comm. Math. Phys. 210 (2000), no. 1, 249–273.

[24] A. Connes, M. Marcolli, Noncommutative Geometry, Quantum Fields, and Motives, Colloquium Publications, Vol.55, American Mathematical Society, 2008.

[25] Kitchloo N. and Morava J., The Stable Symplectic category and a conjecture of Kontsevich, 2012. (https://arxiv.org/pdf/1212.6905).

[26] Lang S. (1962), Transcendental points on group varieties, Topology, 1 (1962), p. 13-318.

[27] Lang S. (1965), Algebraic values of meromorphic functions, Topology 3 (1965), p. 183-191.

[28] Lang S. (1966), Algebraic values of meromorphic functions, II, Topology 5 (1966), p. 363-370.

[29] Fresan J. (2009), The Castle of Groups http://javier.fresan.perso.math.cnrs.fr/castle-of-groups.pdf.

[30] Cartier P. (2007), L'universalisme mathématique, Diogène 3 no 219, pp. 82-94.

[31] Cartier P. (2008), Solidarité dans les mathématiques, Les Déchiffreurs, eds. Jean-François Dars J.F., Lesne A. and Papillault A.

[32] Cartier P., Connes A., Lafforgue L. & al. (2021), Lectures grothendieckiennes, hors collection SMF.