CARL FRIEDRICH GAUSS

WERKE

NACHTRAG ZUM ERSTEN ABDRUCK

DES ZWEITEN BANDES

HERAUSGEGEBEN

VON DER

KÖNIGLICHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU

GÖTTINGEN

1876.

[Zu den auf den Seiten 199 bis 495 dieses Bandes enthaltenen Theilen des Handschriftlichen Nachlasses sind bei dem zweiten Abdrucke noch die auf den Seiten 497 bis 518 abgedruckten Tabellen, Bruchstücke und Briefe hinzugekommen. Vergl. die Bemerkungen am Schlusse des Bandes.]

I. Acotg. 5 = (2)—(13).

26684971	0210071265	7279572373	8848455203	4183360499	1499728341	833
	364	7220869565	2173913043	4782608695	6521739130	434
		4977954329	5694145758	6618876941	4575866188	769
		(43)	204560302	8420465116	2790697674	418
		(47)	299441	4645858042	5531914893	617
		(51)	441	5293752324	0156862745	098
			(55)	6550690367	0843578181	818
			(59)	9770521	2254817540	338
			(63)	14640	2730743726	600
			(67)	22	0259630730	860
				(71)	332561019	920
				(75)	503719	091
				(79)	765	142
				(83)	1	165
					(87)	1
26684971	0210071630	9478396268	6921374192	0505397169	7498644659	104
0,2000640569	5190437336	8654456654	4566544566	5445665445	6654456654	456
	7710131	0688316235	2941176470	5882352941	1764705882	352
		185127900	6896551724	1379310344	8275862068	965
		260673	0412205651	4831745270	7696610135	634
			7830238	1276333963	9002267573	696
			(53) 16	9947155749	8300377358	490
			(57)	252833663	2909752140	350
			(61)	378007	0506907695	003
			(65)	567	5921253449	092
			(69)		8555011744	329
				(73)	12937990	364
				(77)	19625	419
				(81)	29	850
				(85)		45
0,2000640569	5198147467	9528161463	4824308667	9015775954	9600162348	045
26684971	0210071630	9478396268	6921374192	0505397169	7498644659	104
0,1973955598	4988075837	0049765194	7902934475	8510378785	2101517688	941

II. Acotg. 70 = 2(2) — 2(13) — (29)

0,0142857142	8571428571	4285714285	7142857142	8571428571	4285714285	714
3) 29154	5189504373	1778425655	9766763848	3965014577	2594752186	588
5) 5	9499018266	1986077229	7257095257	9282441839	7096447908	609
7)	12142656	7890201240	2509644305	1546792335	0693284989	369
	9) 2478	0932222490	0490308090	6745213631	0887896588	773
	11)	5057333106	6306222511	8552396982	3736915897	263
		13) 1032108	7972715555	6146643346	3229334064	468
		15) 210	6344484227	6644111559	8665965170	217
		17)	429866221	2709519206	4407891013	300
			19) 87727	8002593779	4298858753	268
			21) 17	9036327059	9549856909	949
			23)	36538025	9306030583	042
				25) 7456	7399858373	588
				27) 1	5217836705	790
				29)	3105680	960
					31) 633	812
					33)	128
9718	1729834791	0592808551	9922254616	1321671525	7531584062	196
	1734665	2555743034	3215663472	1649541762	1527612141	338
		459757555	1482383864	7141126998	3976083263	387
		14	0422965615	1776274103	9911064344	681
			4617	2526452304	1805203092	277
				1588609	8230696981	871
					563623581	695
					20	447
9718	1731569456	3608309155	5043272185	4416655304	3545867487	890
0,0142857142	8571428571	4285714285	7142857142	8571428571	4285714285	714
1	1899803653	2397215445	9451419051	5856488367	9419289581	721
	275	3436913610	0054478676	7416134847	8987544065	419
		79392	9844055042	7395895642	0248410312	651
			25286248	3100559953	3200464177	252
				8525539383	8073802709	997
				298	2695994334	943
					107092	446
						3
0,0142857144	0471232500	0119922734	6518096163	0866047064	6911326560	146
9718	1731569456	3608309155	5043272185	4416655304	3545867487	890
0,0142847425	8739663043	6511613579	1474823977	6449391760	3365459072	256

III. Acotg. $99 = -(2) + 2(13) - (29)$.

	0,0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	010
3)	10306	1015212836	4555667892	0621375472	9212335579	0328548210	397
5)	·1	0515357128	1335022514	8344109925	0559046254	0127571528	232
7)		1072886	1471414653	8633643925	1020361090	3228255032	295
9)		109	4670081768	6617552662	3737477845	2290911973	781
11)			111689631	8506950061	4898861083	3430495960	817
13)			11395	7383788077	7534424942	4633550708	689
15)			1	1627118027	5561425816	2373699984	767
17)				1186319	5620402145	2725474308	742
19)				121	0406654464	0491044329	589
21)					123498281	2431434654	048
23)					12600	5796595391	761
25)					1	2856422466	625
27)						1311745	991
29)						133	837
31)							13
	3435	3671737612	1518555964	0207125157	6404111859	6776182736	799
		153269	4495916379	1233377703	5860051584	3318322147	470
			10153602	8955177278	3172623734	8493681450	983
				775141201	8370761721	0824913332	317
				6	3705613392	8446897069	978
					547	8512895451	815
						48583	184
	3435	3671890881	6024625946	1170821347	7513162840	6372940772	546
	0,0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	0101010101	010
		2103071425	6267004502	9668821985	0111809250	8025514305	646
		12	1630009085	4068616962	4859719760	5810101330	420
			876	5952599082	9041109610	9587196208	360
				69783	5036494243	8395616135	808
					5880870	5353877840	668
						514256898	665
						4	615
	0,0101010101	2204081538	7998024565	9791117914	9156023837	7787572825	192
	3435	3671890881	6024625946	1170821347	7513162840	6372940772	546
	0,0101006665	8532190657	1973398619	8620296567	1642860997	1414632052	646

IV. Acotg 307 $= -3(2)+3(5)+(13)+(29)$.

	0,0032573289	9022801302	9315960912	0521172638	4364820846	9055374592	833
3)	345	6088648397	3443000095	0769987174	1094169326	1556823471	597
5)		36669764	6489336152	1087234559	3817877050	8899421286	416
7)		389	0732490417	2580304164	8671007839	6274855960	501
9)			41281419	3298311709	4522474201	4009658191	131
11)			438	0037913381	6985798496	2620441698	672
13)				46473043	8878046300	7405517516	808
15)				493	0879254719	3742187243	551
17)					52317576	3638805103	367
19)					555	0995380734	067
21)						58897127	616
23)						624	909

115	2029549465	7814333365	0256662391	3698056442	0518941157	199
	55	5818927202	4654329166	4095858262	8039265137	214
		39	8185264852	8816890772	3874585608	970
			32	8725283647	9582812482	903
				29	2157651617	582
					27	169

115	2029549521	3633260607	3096256443	5336089154	4173256031	037

0,0032573289	9022801302	9315960912	0521172638	4364820846	9055374592	833
	7333952	9297867230	4217446911	8763575410	1779884257	283
		4586824	3699812412	1613608244	6001073132	347
			3574849	5298311253	9031193655	139
				3077504	4919929711	962
					2804625	124

0,0032573289	9030135255	8618414966	8442006812	0043393260	0790259974	688
115	2029549521	3633260607	3096256443	5336089154	4173256031	037

0,0032573174	7000585734	4985154359	5345750368	4707304105	6617003943	651

TABULA ARCUUM TANGENTIBUS PRIMIS DATIS RESPONDENTIUM IN PARTIBUS RADII AD 110 FIGURAS.

2	0,7853981633	9744830961	5660845819	8757210492	9234984377	6455243736	1480769541	
5	0,4636476090	0080611621	4256231461	2144020285	3705428612	0263810933	0887201978	6
13	0,5880026035	4756755124	5611080625	0854276017	0724605592	4353726047	2072	
17	0,2449786631	2686415417	2082481211					
29	0,3805063771	1236486630	3587916810	4331044974	0571365810	0837576305	623	
37	0,1651486774	1462683827	9128289643	9435540983	8			

ZUR BERECHNUNG DER GEMEINEN LOGARITHMEN.

Man suche die Logarithmen von

$$\log\frac{1025}{*} = a$$
$$\log\frac{1024^2}{*} = b$$
$$\log\frac{81^2}{*} = c$$
$$\log\frac{125^2}{*} = d$$
$$\log\frac{99^2}{*} = e$$

(* zeigt einen um 1 kleinern Nenner als Zähler an) so ist, wovon man sich leicht überzeugen kann:

$$\log 2 = \frac{14\frac{3}{4} + \frac{5}{4}a + 2b - \frac{3}{4}c - 2d + e}{49} = f$$

Noch kann man leicht herleiten

$$\log 41 = a + 12f - 2 = g$$
$$\log 3 = \frac{1 + c + 4f + g}{8}$$

$\log 11.31$ und $\log\frac{11}{7}$ und also auch $\log 7.31$

$\frac{7}{23.73}$	$\frac{1680^2}{*}$	
$\frac{17}{23.73}$	$\frac{136000}{*}$	aus diesen $\frac{7}{23}$ — hieraus 73 [und $\frac{7}{23}$, $\frac{7}{17}$]
$\frac{7.73}{17}$	$\frac{511^2}{*}$	
$7.7.43$	$\frac{512001}{*}$	$\frac{7.7}{17}$ hieraus und $\frac{7}{17}$ [und $\frac{7}{23}$] wird 7, 17, 23, 43
17.43	$\frac{730^2}{*}$	

a, $\frac{81}{8}$	$\frac{81}{80}$	*i*, 73	$\frac{511^2}{510.512}$	$\frac{730^2}{729.731}$	*r*, 53	$\frac{788800}{788799}$	
b, $\frac{41}{4}$	$\frac{6561}{6560}$	*k*, 13	$\frac{729^2}{728.730}$		*s*, 67	$\frac{274700}{274699}$	$\frac{3751^2}{*}$
c, 2	$\frac{1025}{1024}$	*l*, 19	$\frac{512^2}{511.513}$		*t*, 37	$\frac{1000000}{999999}$	$\frac{1331^2}{1330.1332}$
d, 7	$\frac{2401}{2400}$	*m*, 47	$\frac{2116^2}{2115.2117}$		*u*, 59	$\frac{3481^2}{3480.3482}$	
e, 29	$\frac{1681^2}{1680.1682}$	*n*, 61	$\frac{2500^2}{2499.2501}$		*v*, 89	$\frac{4095^2}{4094.4096}$	
f, 43	$\frac{512001}{512000}$	*o*, 31	$\frac{17081^2}{17080.17082}$		*w*, 83	$\frac{6889^2}{6888.6890}$	
g, 23.73	$\frac{1680^2}{1679.1681}$	*p*, 11	$\frac{1024^2}{1023.1025}$	$\frac{2001^2}{2000.2002}$	*x*, 79	$\frac{3879^2}{3880.3882}$	
h, 17	$\frac{136000}{135999}$	*q*, 71	$\frac{10935^2}{10934.10936}$		*y*, 97	$\frac{13871^2}{13870.13872}$	$\frac{46656^2}{46655.46657}$

[Die Anwendung dieser Brüche zur Bestimmung der Logarithmen der nebenstehenden kleinen Primzahlen mit Hülfe der nach wachsenden Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitenden sehr rasch convergirenden Reihen für $\log\frac{x}{x-1}$ ergibt sich unmittelbar aus dem zu Anfang ausgeführten Beispiel.

Es lassen sich übrigens zur Bestimmung der Logarithmen der kleinsten Primzahlen 2, 3, 7 noch vortheilhaftere Reihen aufstellen, wenn man diese Gaussischen Zahlen auf geeignete Weise mit den von Huyghens (Hugenii Opera varia, Lugduni 1724 pag. 457) angegebenen verbindet:

2	1000	11	$9800 = 100.2.7^2$	19	$28899 = 3^2.13^2.19$
	$1024 = 2^{10}$		$9801 = 3^4.11^2$		$28900 = 100.17^2$
3	$32805 = 3^8.5$	13	$123200 = 100.2^4.7.11$	23	$25920 = 10.2^5.3^4$
	$32768 = 2^{15}$		$123201 = 3^6.13^2$		$25921 = 7^2.23^2$
7	$2400 = 100.2^8.3$	17	$2600 = 100.2.13$	29	$613088 = 2^5.7^2.17.23$
	$2401 = 7^4$		$2601 = 3^2.17^2$		$613089 = 3^6.29^2$

31	$116280 = 10 . 2^2 . 3^2 . 17 . 19$	53	$3059000 = 100 . 7 . 19 . 23$	73	$5116643 = 7 . 17 . 19 . 31 . 73$
	$116281 = 11^2 . 31^2$		$3059001 = 3^2 . 11^2 . 53^2$		$5116644 = 2^2 . 3^2 . 13^2 . 29^2$
37	$165648 = 2^4 . 3 . 7 . 17 . 29$	59	$5851560 = 10 . 2^2 . 3 . 11^2 . 13 . 31$	79	$5997600 = 100 . 2^3 . 3^2 . 7^2 . 17$
	$165649 = 11^2 . 37^2$		$5851561 = 41^2 . 59^2$		$5997601 = 31^2 . 79^2$
41	$1413720 = 10 . 2^2 . 3^3 . 7 . 11 . 17$	61	$3575880 = 10 . 2^2 . 3^3 . 7 . 11 . 43$	83	$1164240 = 10 . 2^3 . 3^3 . 7^2 . 11$
	$1413721 = 29^2 . 41^2$		$3575881 = 31^2 . 61^2$		$1164241 = 13^2 . 83^2$
43	$978120 = 10 . 2^2 . 3^2 . 11 . 13 . 19$	67	$1620528 = 2^4 . 3 . 7^2 . 13$	89	$2859480 = 10 . 2^2 . 3^2 . 13^2 . 47$
	$978121 = 23^2 . 43^2$		$1620529 = 19^2 . 67^2$		$2859481 = 19^2 . 89^2$
47	$664848 = 2^5 . 3^6 . 7 . 13$	71	$2016399 = 3 . 7^2 . 11 . 29 . 43$	97	$1138488 = 2^3 . 3 . 13 . 41 . 89$
	$664849 = 31^2 . 47^2$		$2016400 = 100 . 2^2 . 71^2$		$1138489 = 11^2 . 97^2$

Zur Bestimmung der Logarithmen für alle die Primzahlen, welche kleiner als 200 sind, kann man mit Vortheil die in den Tabellen für Cyklotechnie gefundenen Zerlegungen von $aa+1$, $a+2$, . . $aa+81$ benutzen, wenn man sich auf diejenigen Zahlen a beschränkt, welche selbst nur Primzahlen unter 200 als Theiler enthalten. Die übrigen a lassen sich dann zur Bestimmung der Logarithmen der darin vorkommenden grösseren Primtheiler verwerthen.]

	10	20	30	40	50	60	70	80	90		11	21	31	41	51	61	71	81	91	
00	1000	4000	9000	16000	25000	36000	49000	64000	81000	000	1210	4410	9610	16810	26010	37210	50410	65610	82810	000
1	02	04	06	08	10	12	14	16	18	001	12	14	16	18	20	22	24	26	28	201
2	04	08	12	16	20	24	28	32	36	004	14	18	22	26	30	34	38	42	46	404
3	06	12	18	24	30	36	42	48	54	009	16	22	28	34	40	46	52	58	64	609
4	08	16	24	32	40	48	56	64	72	016	18	26	34	42	50	58	66	74	82882	816
5	10	20	30	40	50	60	70	80	81090	025	21	31	41	51	61	71	81	65691	82901	025
6	12	24	36	48	60	72	84	64096	81108	036	23	35	47	59	71	83	50495	65707	19	236
7	14	28	42	56	70	84	49098	64112	26	049	25	39	53	67	81	37295	50509	23	37	449
8	16	32	48	64	80	36096	49112	28	44	064	27	43	59	75	26091	37307	23	39	55	664
09	18	36	54	72	25090	36108	26	44	62	081	29	47	65	83	26101	19	37	55	73	881
10	20	40	60	80	25100	20	40	60	80	100	32	52	72	16892	12	32	52	72	82992	100
1	22	44	66	88	10	32	54	76	81198	121	34	56	78	16900	22	44	66	65788	83010	321
2	24	48	72	16096	20	44	68	64192	81216	144	36	60	84	08	32	56	80	65804	28	544
3	26	52	78	16104	30	56	82	64208	34	169	38	64	90	16	42	68	50594	20	46	769
4	28	56	84	12	40	68	49196	24	52	196	40	68	9696	24	52	80	50608	36	64	996
5	30	60	90	20	50	80	49210	40	70	225	43	73	9703	33	63	37393	23	53	83083	225
6	32	64	9096	28	60	36192	24	56	81288	256	45	77	09	41	73	37405	37	69	83101	456
7	34	68	9102	36	70	36204	38	72	81306	289	47	81	15	49	83	17	51	65885	19	689
8	36	72	08	44	80	16	52	64288	24	324	49	85	21	57	26193	29	65	65901	37	924
19	38	76	14	52	25190	28	66	64304	42	361	52	90	28	66	26204	42	80	18	56	161
20	40	80	20	60	25200	40	80	20	60	400	1254	94	34	74	14	54	50694	34	74	400
1	42	84	26	68	10	52	49294	36	78	441	56	4498	40	82	24	66	50708	50	83192	641
2	44	88	32	76	20	64	49308	52	81396	484	58	4502	46	90	34	78	22	66	83210	884
3	46	92	38	84	30	76	22	68	81414	529	61	07	53	16999	45	37491	37	83	29	129
4	1048	4096	44	16192	40	36288	36	64384	32	576	63	11	59	17007	55	37503	51	65999	47	376
5	50	4100	50	16200	50	36300	50	64400	50	625	65	15	65	15	65	15	65	66015	65	625
6	52	04	56	08	60	12	64	16	68	676	67	19	71	23	75	27	79	31	83283	876
7	54	08	62	16	70	24	78	32	81486	729	70	24	78	32	86	40	50794	48	83302	129
8	56	12	68	24	80	36	49392	48	81504	784	72	28	84	40	26296	52	50808	64	20	384
29	58	16	74	32	25290	48	49406	64	22	841	74	32	90	48	26306	64	22	80	38	641
30	60	20	80	40	25300	60	20	80	40	900	76	36	9796	56	16	76	36	66096	56	900
1	62	24	86	48	10	72	34	64496	58	961	79	41	9803	65	27	37589	51	66113	75	161
2	65	29	93	57	21	85	49	64513	77	024	81	45	09	73	37	37601	65	29	83393	424
3	67	33	9199	65	31	36397	63	29	81595	089	83	49	15	81	47	13	79	45	83411	689
4	69	37	9205	73	41	36409	77	45	81613	156	85	53	21	89	57	25	50893	61	29	956
5	71	41	11	81	51	21	49491	61	31	225	88	58	28	17098	68	38	50908	78	48	225
6	73	45	17	89	61	33	49505	77	49	296	90	62	34	17106	78	50	22	66194	66	496
7	75	49	23	16297	71	45	19	64593	67	369	92	66	40	14	88	62	36	66210	83484	769
8	77	53	29	16305	81	57	33	64609	81685	444	95	71	47	23	26399	75	51	27	83503	044
39	79	57	35	13	25391	69	47	25	81703	521	1297	75	53	31	26409	87	65	43	21	321
40	81	61	41	21	25401	81	61	41	21	600	1299	79	59	39	19	37699	79	59	39	600
1	83	65	47	29	11	36493	75	57	39	681	1301	83	65	47	29	37711	50993	75	57	881
2	85	69	53	37	21	36505	49589	73	57	764	04	88	72	56	40	24	51008	66292	76	164
3	87	73	59	45	31	17	49603	64689	75	849	06	92	78	64	50	36	22	66308	83594	449
4	89	77	65	53	41	29	17	64705	81793	936	08	4596	84	72	60	48	36	24	83612	736
5	92	82	72	62	52	42	32	22	81812	025	11	4601	91	81	71	61	51	41	31	025
6	94	86	78	70	62	54	46	38	30	116	13	05	9897	89	81	73	65	57	49	316
7	96	90	84	78	72	66	60	54	48	209	15	09	9903	17197	26491	85	79	73	67	609
8	1098	94	90	86	82	78	74	70	66	304	17	13	09	17205	26501	37797	51093	66389	83685	904
49	1100	4198	9296	16394	25492	36590	49688	64786	81884	401	1320	4618	9916	17214	26512	37810	51108	66406	83704	201

QUADRATORUM MYRIAS PRIMA.

	10	20	30	40	50	60	70	80	90		11	21	31	41	51	61	71	81	91	
50	1102	4202	9302	16402	25502	36602	49702	64802	81902	500	1322	4622	9922	17222	26522	37822	51122	66422	83722	500
1	04	06	08	10	12	14	16	18	20	601	24	26	28	30	32	34	36	38	40	801
2	06	10	14	18	22	26	30	34	38	704	27	31	35	39	43	47	51	55	59	104
3	08	14	20	26	32	38	44	50	56	809	29	35	41	47	53	59	65	71	77	409
4	10	18	26	34	42	50	58	66	74	916	31	39	47	55	63	71	79	66487	83795	716
5	13	23	33	43	53	63	73	83	81993	025	34	44	54	64	74	84	51194	66504	83814	025
6	15	27	39	51	63	75	49787	64899	82011	136	36	48	60	72	84	37896	51208	20	32	336
7	17	31	45	59	73	87	49801	64915	29	249	38	52	66	80	26594	37908	22	36	50	649
8	19	35	51	67	83	36699	15	31	47	364	40	56	72	88	26604	20	36	52	68	964
59	21	39	57	75	25593	36711	29	47	65	481	43	61	79	17297	15	33	51	69	83887	281
60	23	43	63	83	25603	23	43	63	82083	600	45	65	85	17305	25	45	65	66585	83905	600
1	25	47	69	91	13	35	57	79	82101	721	47	69	91	13	35	57	79	66601	23	921
2	27	51	75	16499	23	47	71	64995	19	844	50	74	9998	22	46	70	51294	18	42	244
3	29	55	81	16507	33	59	49885	65011	37	969	52	78	10004	30	56	82	51308	34	60	569
4	32	60	88	16	44	72	49900	28	56	096	54	82	10	38	66	37994	22	50	78	896
5	34	64	9394	24	54	84	14	44	74	225	57	87	17	47	77	38007	37	67	83997	225
6	36	68	9400	32	64	36796	28	60	82192	356	1359	91	23	55	87	19	51	83	84015	556
7	38	72	06	40	74	36808	42	76	82210	489	1361	4695	29	63	26697	31	65	66699		889
8	40	76	12	48	84	20	56	65092	28	624	64	4700	36	72	26708	44	80	66716		224
69	42	80	18	56	25694	32	70	65108	46	761	66	04	42	80	18	56	51394	32		561
70	1144	84	24	64	25704	44	84	24	64	900	68	08	48	88	28	68	51408			900
1	47	89	31	73	15	57	49999	41	82283	041	71	13	55	17397	39	81	23			241
2	49	93	37	81	25	69	50013	57	82301	184	73	17	61	17405	49	38093	37			584
3	51	4297	43	89	35	81	27	73	19	329	75	21	67	13	59	38105	51			929
4	53	4301	49	16597	45	36893	41	65189	37	476	78	26	74	22	70	18	66			276
5	55	05	55	16605	55	36905	55	65205	55	625	80	30	80	30	80	30	80			625
6	57	09	61	13	65	17	69	21	73	776	82	34	86	38	26790	42	51494			976
7	59	13	67	21	75	29	83	37	82391	929	85	39	93	47	26801	55	51509			329
8	62	18	74	30	86	42	50098	53	82409	084	87	43	10099	55	11	67	23			684
79	64	22	80	38	25796	54	50112	70	28	241	90	48	10106	64	22	80	38			041
80	66	26	86	46	25806	66	26	65286	46	400	92	52	12	72	32	38192	52			400
1	68	30	92	54	16	78	40	65302	64	561	94	56	18	80	42	38204	66			761
2	70	34	9498	62	26	36990	54	18	82482	724	97	61	25	89	53	17	81			124
3	72	38	9504	70	36	37002	68	34	82500	889	1399	65	31	17497	63	29	51595			489
4	75	43	11	79	47	15	83	51	19	056	1401	69	37	17505	73	41	51609			856
5	77	47	17	87	57	27	50197	67	37	225	04	74	44	14	84	54	24			225
6	79	51	23	16695	67	39	50211	83	55	396	06	78	50	22	26894	66	38			596
7	81	55	29	16703	77	51	25	65399	73	569	08	82	56	30	26904	78	52			969
8	83	59	35	11	87	63	39	65415	82591	744	11	87	63	39	15	38291	67			344
89	85	63	41	19	25897	75	53	31	82609	921	13	91	69	47	25	38303	81			721
90	88	68	48	28	25908	37088	68	48	28	100	16	4796	76	56	36	16	51696			100
1	90	72	54	36	18	37100	82	64	46	281	18	4800	82	64	46	28	51710			481
2	92	76	60	44	28	12	50296	80	64	464	20	04	88	72	56	40	24			864
3	94	80	66	52	38	24	50310	65496	82682	649	23	09	10195	81	67	53	39			249
4	96	84	72	60	48	36	24	65512	82700	836	25	13	10201	89	77	65	53			636
5	1199	89	79	69	59	49	39	29	19	025	28	18	08	17598	88	78	68			025
6	1201	93	85	77	69	61	53	45	37	216	30	22	14	17606	26998	38390	82			416
7	03	4397	91	85	79	73	67	61	55	409	32	26	20	14	27008	38402	51796			809
8	05	4401	9597	16793	89	85	81	77	73	604	35	31	27	23	19	15	51811			204
9	1207	4405	9603	16801	25999	37197	50395	65693	82791	801	1437	4835	10233	17631	27029	38427	51825			601

NACHLASS INDICES DER PRIMZAHLEN IM HÖHERN ZAHLENREICHE.

	−1+2i	−1−2i	−3	3+2i	3−2i	1+4i	1−4i	−5+2i	−5−2i	−1+6i	−1−6i	5+4i	5−4i	−7	7+2i	7−2i	−5+6i	−5−6i	−3+8i	−3−8i	5+8i	5−8i	9+4i	9−4i
	i	i	1−i	−1−i	+1−i	+1−2i	+1−2i	+1+i	−1+i	+1+i	−1−i	+2−i	+1−2i	+1−2i	−1+i	1+i	1−i	i	1+i	i	i	i	1+i	1+4i
i	1	1	2	3	3	4	4	7	7	9	9	10	10	12	13	13	15	15	18	18	22	22	24	24
1+i	2	3	3	7	4	7	5	1	22	1	28	32	2	46	40	1	16	31	1	37	23	23	1	7
1−i	1	2	1	4	1	3	1	22	15	28	19	22	32	34	27	40	1	16	55	19	1	1	73	79
−1+2i	×	3	7	4	5	9	2	18	12	13	6	27	21	25	19	10	35	9	68	65	10	40	20	63
−1−2i	1	*	5	11	4	14	15	12	18	6	31	31	17	31	10	45	39	5	11	68	40	54	81	44
−3	3	1	*	2	2	3	5	17	3	16	16	25	35	16	21	47	12	12	6	42	51	29	14	50
3−2i	2	1	6	*	1	13	9	13	23	14	35	26	33	3	4	44	28	52	9	44	79	38	36	23
3−2i	3	2	2	7	*	15	11	9	27	17	14	3	6	21	44	4	52	28	44	27	82	57	89	60
1+4i	1	2	3	9	7	*	6	15	20	21	2	8	9	29	22	24	38	11	23	52	27	81	78	1
1−4i	2	3	1	1	3	10	*	20	1	2	3	19	8	11	24	22	41	38	52	5	15	5	79	18
−5+2i	0	2	1	3	11	11	12	*	25	5	28	29	24	30	51	41	19	36	71	66	8	75	91	58
−5−2i	2	0	3	5	9	4	13	11	*	28	23	24	39	18	15	25	36	49	30	53	53	8	70	85
−1+6i	3	0	4	8	3	5	10	19	22	*	29	33	5	22	27	33	34	59	39	67	65	12	39	32
−1−6i	0	1	4	9	8	6	3	22	5	11	*	15	3	10	7	1	29	34	49	21	12	87	32	9
5+4i	3	3	5	6	11	4	3	5	16	25	15	*	32	9	16	9	46	32	69	13	26	55	4	43
5−4i	1	1	7	5	6	5	12	16	19	33	7	32	*	15	35	16	32	46	31	15	33	70	37	28
−7	1	3	4	7	1	1	7	10	10	10	10	1	11	*	28	28	23	53	51	33	83	61	11	5
7+2i	1	0	1	10	12	2	8	21	9	1	25	36	7	44	*	43	55	26	37	10	87	85	27	89
7−2i	0	3	3	2	10	8	14	23	7	7	19	37	36	20	17	*	26	25	46	55	19	65	23	21
−5−6i	1	1	0	6	10	10	1	25	6	4	27	2	4	43	37	8	*	31	21	43	85	2	45	29
−5−6i	3	3	0	10	6	7	6	6	11	9	4	4	22	13	8	11	1	*	25	39	46	19	83	3
−3+8i	0	3	6	5	4	15	18	7	26	3	33	9	31	23	1	6	33	13	*	26	28	24	73	13
−3−8i	1	0	2	4	11	8	19	26	21	15	21	21	19	17	6	27	43	3	62	[illegible]	24	28	67	7
5+8i	2	0	7	7	10	11	15	4	5	9	8	38	13	19	39	7	25	2	24	56	*	30	77	79
5−8i	0	2	5	10	1	9	13	19	4	8	27	23	18	37	33	13	2	55	56	24	74	*	1	35
9+4i	0	1	2	8	5	14	7	11	14	35	4	28	25	39	3	39	21	7	1	11	49	1	*	90
9−4i	3	0	6	11	8	1	2	14	25	4	17	35	28	33	13	29	37	51	65	19	23	71	6	*
−1+10i	2	2	5	2	0	7	7	16	17	31	17	21	10	5	46	35	50	45	39	34	57	42	10	54
−1−10i	2	2	7	0	2	1	1	3	16	35	13	30	31	35	9	46	15	50	70	21	86	79	42	22
3+10i	1	3	2	0	9	6	5	14	24	23	24	17	18	38	49	50	54	56	14	2	69	51	65	31
3−10i	1	3	6	3	0	3	10	24	14	24	5	38	27	26	50	23	56	54	38	50	29	3	49	47
−7+8i	3	2	7	1	9	14	9	22	9	7	22	7	15	12	5	23	48	6	4	47	11	68	58	82
−7−8i	2	1	5	3	7	15	2	23	22	22	25	5	37	36	49	31	6	48	29	4	68	77	46	70
−11	2	2	0	11	5	5	3	1	15	24	24	37	7	40	12	12	15	45	61	7	16	16	94	34
−11+4i	0	1	3	4	3	7	15	14	27	29	13	36	29	26	32	21	57	29	54	30	41	18	9	38
−11−4i	3	0	1	9	4	9	1	13	14	31	11	39	36	38	47	32	59	27	66	18	62	63	26	39
7+10i	3	1	3	3	4	12	0	3	1	26	10	23	20	4	6	12	44	22	29	31	47	14	12	75
7−10i	3	1	1	4	9	0	4	15	17	10	26	20	13	28	12	6	22	44	13	47	58	25	69	84
11+6i	2	3	4	11	7	0	12	17	4	20	12	[illegible]	14	17	18	49	8	29	43	18	13	11	75	20
11−6i	1	2	4	1	5	4	0	4	3	12	20	34	37	23	23	18	59	8	54	25	77	35	44	69
−23+2i	1	0	7	2	8	15	4	27	1	20	18	18	32	7	33	36	24	7	26	28	72	66	38	77
−23−2i	0	3	5	8	2	12	9	15	13	18	20	32	38	1	36	7	37	24	28	62	22	72	35	26
−9+20i	0	0	2	11	1	3	6	8	16	19	3	20	37	15	42	37	5	42	53	59	39	56	61	16
−9−10i	0	0	6	7	5	10	5	16	8	21	1	7	20	9	11	42	42	35	41	[illegible]	56	17	16	19
−7+12i	2	1	4	0	11	9	4	12	13	1	14	11	22	20	30	5	42	19	59	50	81	64	87	87

HÜLFSTAFEL

BEI AUFLÖSUNG DER UNBESTIMMTEN GLEICHUNG

$$A = fxx + gyy$$

VERMITTELST DER AUSSCHLIESSUNGSMETHODE.

Es wird vorausgesetzt, dass man zum Excludens eine Primzahl p gewählt habe, durch welche keine der Zahlen A, f, g theilbar ist. Auch beschränkt sich die Tafel auf die zwei Fälle, da der Werth des Ausdrucks $\frac{A}{f}(\text{mod.}\,p)$ entweder ein bestimmter quadratischer Rest (allemal 1), oder ein bestimmter quadratischer Nichtrest des Modulus p ist. Endlich hat man sich begnügt, die Tafel nur für den Fall einzurichten, wo fg ein quadratischer Rest von p ist, und den entgegengesetzten ganz übergangen. Der sechste Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* gibt hinlängliche Belehrung, wie man das, was die Tafel nicht unmittelbar enthält, leicht aus derselben ableiten könne.

Beispiele. Es sei die aufzulösende Gleichung $21680143 = xx + 78yy$

1) Excludens $= 5$ $\quad fg = \text{N}, \quad \frac{A}{f} \equiv 3 \equiv 2.2^2$

Ex tabula 1,4 pro $fg = R$ adeoque 0,2,3 pro $fg = \text{N}$,

et pro cas upr. 0,1,4 sive excl. $5n \pm 2$

2) Excludens $= 7$ $\quad fg = \text{R}, \quad \frac{A}{f} \equiv 2 \equiv 1,3^2$

Ex tabula 0, 1, 2, 5, 6 Pro casu praes. 0, 3, 6, 1, 4 et excl. $7n \pm 2$

3) Excludens $= 11$ $\quad fg = \text{R}, \quad \frac{A}{f} \equiv 1$

habentur itaque 0, 1, 3, 5, 6, 8, 10 excl. $11n \pm 2, 4$

4) Excludens $= 17$ $\quad fg = \text{N}, \quad \frac{A}{f} \equiv 9 \equiv 1.3^1$

0. 1. 3. 4. 6

0. 3. 8. 5. 1

0, 2, 3, 4, 6, 7

Excludens $\pm 1, 5, 8$

p	Werth von $\frac{A}{f}$ (mod. p)	Zahlen denen positiv oder negativ genommen x nach dem Modulus p congruent sein muss.
3	1	0, 1
	2	1
5	1	0, 1
	2	1
7	1	0, 1, 2
	6	2, 3
11	1	0, 1, 3, 5
	10	1, 3, 4
13	1	0, 1, 2, 6
	2	1, 4, 5
17	1	0, 1, 3, 4, 6
	3	1, 2, 4, 6
19	1	0, 1, 2, 3, 4, 7
	18	1, 3, 6, 7, 8
23	1	0, 1, 4, 8, 9, 10, 11
	22	1, 2, 3, 4, 6, 8
29	1	0, 1, 5, 6, 8, 9, 11, 13
	2	1, 3, 5, 6, 8, 13, 14
31	1	0, 1, 2, 4, 5, 7, 10, 11, 13
	30	4, 5, 6, 8, 11, 12, 13, 14
37	1	0, 1, 2, 7, 8, 10, 11, 14, 16. 18
	2	1, 3, 6, 7, 8, 14, 15, 17, 18
41	1	0, 1. 3, 9, 12, 13, 14. 16, 17, 18. 19
	3	1, 2, 6, 7. 8, 9, 11, 12, 13, 17
43	1	0, 1, 2, 3, 7, 8, 9, 11, 13, 17, 18, 20
	42	1. 2, 5, 6, 7, 8, 9, 16, 17, 19, 21
47	1	0, 1, 4, 6, 9, 10, 11, 16, 18, 19. 20, 22, 23
	46	2, 3, 5. 9, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 22, 23
53	1	0, 1, 4, 5, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 20, 21, 22
	2	1, 3, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 18, 21. 24, 25, 26
59	1	0, 1, 3, 5, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19. 22, 23, 24, 25, 29
	58	1, 3, 6

Excludens p	$\frac{A}{f}$	$\frac{f}{A}$	$fg\mathrm{R}p$ Admittuntur		$fg\mathrm{R}p$ Excluduntur
3	1	1	0	1. 2	
	2	2	1.2		0
	1	1	0	1. 4	2.3
	2	3	1.4		0.2.3
5	3	2	2.3		0.1.4
	4	4	0	2. 3	1.4
	1	1	0 2.5	1. 6	3.4
	2	4	0.1.6	3. 4	2.5
	3	5	1.3.4.6		0 2.5
7	4	2	0.3.4	2. 5	1.6
	5	3	1.2.5.6		0.3.4
	6	6	2.3.4.5		0.1.6
	1	1	0.3 5.6.8	1. 10	2.4.7.9
	2	6	1.2.3.8.9.10		0.4.5.6.7
	3	4	0.3.4.7.8	5. 6	1.2.9.10
	4	3	0 1.5.6.10	2. 9	3.4.7.8
	5	9	0 1.2.9.10	4. 7	3.5.6.8
11	6	2	1.4 5.6 7.10		0.2.3.8.9
	7	8	2.3.5.6.8.9		0.1.4.7.10
	8	7	2.4 5.6.7.9		0.1.3.8.10
	9	5	0 2.4.7.9	3. 8	1.5.6.10
	10	10	1.3.4.7.8.10		0.2 5.6.9
	1	1	0.2.6.7 11	1. 12	3.4.5.8.9.10
	2	7	1.4.5.8.9.12		0.2.3 6.7.10.11
	3	9	0.2.5.8.11	4. 9	1.3.6.7.10.12
	4	10	0.1.4.9.12	2. 11	3.5.6.7.8.10
	5	8	1 2.3.10.11.12		0.4 5.6 7.8.9
	6	11	3 4.6.7.9.10		0.1.2 5.8.11.12
13	7	2	2 4.6.7 9.11		0.1.3.5.8 10.12
	8	5	2.3.5.8.10.11		0.1.4.6.7 9.12
	9	3	0.5.6.7 8	3. 10	1.2.4.9.11.12
	10	4	0.1.3.10.12	6. 7	2.4.5.8.9.11
	11	6	1.5 6.7.8.12		0.2.3.4.9.10.11
	12	12	0.3.4.9.10	5. 8	1.2.6.7.11.12
	1	1	0.3.4.6.11.13.14	1. 16	2.5.7.8.9.10.12.15
	2	9	0.1.2.7.10.15.16	6. 11	3.4.5.8.9.12.13.14
	3	6	1.2.4.6.11.13.15.16		0.3.5.7.8.9.10.12.14
	4	13	0.5.6.8.9.11.12	2. 15	1.3.4.7.10.13.14.16
	5	7	1.2 3.8.9.14 15.16		0.4.5.6.7.10.11.12.13
	6	3	2.5.6.7.10.11.12.15		0.1.3.4.8.9.13.14.16
	7	5	3.4.5.7.10.12.13.14		0.1.2.6.8.9.11.15.16
	8	15	0.2.3.4.13.14.15	5. 12	1.6.7.8.9 10 11.16
17	9	2	0.1.5.8 9.12 16	3. 14	2.4.6 7.10.11.13.15
	10	12	1.3.5.6 11.12.14.16		0.2 4.7 8.9.10.13.15
	11	14	3 6.7.8.9.10.11.14		0 1.2.4.5.12.13 15.16
	12	10	2.4 5.8.9.12.13.15		0.1.3 6.7.10.11.14.16
	13	4	0.2.3.7.10.14.15	8. 9	1 4.5.6.11.12 13.16
	14	11	1.4.7.8.9 10.13.16		0.2.3 5.6.11.12.14.15
	15	8	0.4.6.8.9.11.13	7. 10	1.2.3.5.12.14.15.16
	16	16	0.1.5.7.10.12.16	4. 13	2.3.6 8.9.11.14.15
p	$\frac{A}{f}$	$\frac{f}{A}$	Excluduntur $fg\mathrm{N}p$		Admittuntur $fg\mathrm{N}p$

NACHLASS. HÜLFSTAFEL ZUR AUFLÖSUNG DER GLEICHUNG $A = fxx + gyy$.

Excludens p	$\frac{A}{f}$	$\frac{f}{A}$	$fg\mathrm{R}p$ Admittuntur		$fg\mathrm{R}p$ Excluduntur
	1	1	0.2.3.4.7.12.15.16.17	1.18	5.6.8.9.10.11.13.14
	2	10	1.2.4.6.9.10.13.15.17.18		0 3 5.7.8.11.12.14.16
	3	13	4 5.6.7.9.10.12.13.14.15		0.1.2.3.8.11.16.17.18
	4	5	0.4.5.6.8.11.13.14.15	2.17	1 3.7.9.10.12.16 18
	5	4	0.1.2.6.8.11.13.17.18	9.10	3.4.5.7.12.14.15.16
	6	16	0.1.3.4.9.10.15.16.18	5.14	2.6 7.8.11.12.13.17
	7	11	0.1.3.5.6.13.14.16.18	8.11	2.4.7.9.10.12.15.17
	8	12	1.2 4.7.8.11.12.15.17.18		0.3.5.6.9.10.13.14.16
19	9	17	0.2.6.7.9.10.12 13.17	3.16	1.4.5.8.11.14.15.18
	10	2	1.2.3.5.9.10.14.16.17.18		0.4.6.7.8.11.12.13.15
	11	7	0.2.5.8.9.10.11.14.17	7.12	1.3.4.6.13.15.16.18
	12	8	1.5 7.8.9.10.11.12.14.18		0.2.3.4.6.13.15.16.17
	13	3	2.3.4.5 8.11.14.15.16.17		0.1.6.7.9.10.12.13 18
	14	15	3.4.6.8.9.10.11.13 15.16		0.1.2.5.7.12.14.17.18
	15	14	2.3 5.6.7.12.13 14.16.17		0.1.4.8.9.10.11.15.18
	16	6	0 3.7.8.9.10.11.12.16	4.15	1.2.5.6.13.14.17.18
	17	9	0.1.4.5.7.12.14.15.18	6.13	2.3.8.9.10.11 16.17
	18	18	1.3.6.7.8.11.12.13.16.18		0.2.4 5.9.10.14.15.17
	1	1	0.4.8.9.10.11.12.13.14.15.19	1.22	2.3.5.6.7.16.17.18.20.21
	2	12	0.1.3.4.6.9.14.17.19.20.22	5.18	2.7.8.10.11.12.13.15.16.21
	3	8	0.1.5.6.8.10.13.15.17.18.22	7.16	2.3.4.9 11.12.14.19.20 21
	4	6	0.1.3.5.7.8.15.16.18.20.22	2.21	4.6.9.10.11.12.13.14.17.19
	5	14	1.2.4.5.7.9.14.16.18.19.21.22		0.3.6.8.10.11.12.13.15.17.20
	6	4	0.2.4.5.6.7.16.17.18.19.21	11.12	1.3.8.9.10.13.14.15.20.22
	7	10	1.2 7.8.9.11.12.14.15.16.21.22		0.3.4.5.6.10.13.17.18.19.20
	8	3	0.2.5.6.8.11.12.15.17.18.21	10.13	1.3.4.7.9.14.16.19.20.22
	9	18	0.1.4.7.10.11.12.13.16.19.22	3.20	2.5.6.8 9.14.15.17.18.21
	10	7	1.2.3.5.10.11.12.13.18.20.21.22		0.4.6.7.8.9.14.15.16.17.19
23	11	21	3 4.5.7.8.10.13.15.16.18.19.20		0.1.2.6.9.11.12.14 17.21.22
	12	2	0.2.3.7.10.11.12.13.16.20.21	9.14	1.4.5.6 8.15.17.18.19.22
	13	16	0.1.2.3.8 9.14.15.20.21.22	6.17	4.5.7.10.11.12.13 16 18.19
	14	5	1.5.6.9.10.11.12.13.14.17 18.22		0.2.3.4.7.8.15.16.19.20.21
	15	20	3.5.6.7 9.11.12 14.16.17.18.20		0.1.2.4.8.10.13.15.19.21.22
	16	13	0.2.6.7.9.10.13.14.16.17.21	4.19	1.3.5.8.11.12.15.18.20.22
	17	19	1.2.3.4.6.10.13.17.19.20.21.22		0.5.7.8.9.11.12.14.15.16.18
	18	9	0.3.4.5.9.11.12.14.18.19.20	8.15	1.2.6.7.10.13.16.17.21.22
	19	17	1.4.6.7.8 11.12.15.16.17.19.22		0.2.3.5.9.10.13.14 18.20.21
	20	15	2.4.5.8.9.10.13.14.15.18.19.21		0.1.3 6.7.11.12.16.17.20.22
	21	11	3.6.7.8.9.10.13.14.15.16.17.20		0.1.2.4.5.11.12.18.19.21.22
	22	22	2.3.4.6.8.11.12.15.17.19.20.21		0.1.5.7.9.10.13.14.16 18.22
p	$\frac{A}{f}$	$\frac{f}{A}$	Excluduntur $fg\mathrm{N}p$		Admittuntur $fg\mathrm{N}p$

SECTIO OCTAVA.

QUARUNDAM DISQUISITIONUM AD CIRCULI SECTIONEM PERTINENTIUM UBERIOR CONSIDERATIO.

367.

Quae in posteriore Sectionis septimae parte inde ab art. 355 tradidimus, gravia utique specimina exhibent de magna theoriae sectionis circuli fertilitate, nec non de nexu miro, qui hanc disciplinam cum variis disquisitionibus *arithmeticis* iungit. Illic vero, spatii temporisque angustia nimis coarctati, leviter tantum huncce campum stringere potuimus, qui quo ulterius in eo progredimur, eo largiore messe conatus nostros remuneratur. Propositum itaque nobis est, unam alteramve quaestionum ibi inceptarum hic denuo resumere copiosiusque pertractare: certoque lectores non sine magna admiratione plurium problematum arithmeticorum, quae toto hinc coelo dissita esse quisque expectavisset, solutionem huic fundamento inniti videbunt.

368.

Argumentum fertilissimum suppeditat disquisitio in art. 356 inchoata, ubi complexu radicum aequationis $x^n - 1 = 0$ (unitate exclusa) in duas classes discerpto, aggregatum in utraque classe definire docuimus, quae scilicet prodierunt $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{n}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ pro casu ubi n est formae $4n+1$, aut $= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-n}$ et $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-n}$ pro casu ubi n est formae $4n+3$. Attamen illic non solum limitationem ad casum ubi n est *numerus primus* nobis imposueramus, sed etiam, quod multo adhuc gravioris erat momenti, *signum* quantitatis radicalis indefinitum reliquimus, seu potius hanc determinationem paucis addigitatam demonstratione solida fulcire neglexim us. Hos itaque defectus ante omnia supplere oportebit.

369.

Jam sit itaque n numerus integer potitivus quicunque, R radix aequationis $x^n - 1 = 0$ talis, cuius nulla potestas inferior quam n^{ta} unitati aequalis fiat (V. art. 359, II.), designemusque per $[\lambda]$, ut in Sect. VII. potestatem R^λ, ita ut $[0] = 1, [1], [2], [3] \ldots [n-1]$ omnes radices aequationis $x^n - 1 = 0$ exhibeant. Porro denotemus aggregatum

$$[0] + [1] + [4] + [9] + \ldots + [(n-1)^2] \text{ per } \Sigma[\Omega]$$

et generalius

$$[0] + [\lambda] + [4\lambda] + [9\lambda] \ldots + [\lambda(n-1)^2] \text{ per } \Sigma[\Omega\lambda]$$

ita ut Ω indefinite quadrata numerorum $0, 1, 2, 3 \ldots n-1$ indicet. Patet igitur, sicut generaliter est $[\lambda] = [\mu]$, si λ, μ sunt integri quicunque (positivi seu negativi) secundum n congrui, ita etiam fore $\Sigma[\Omega\lambda] = \Sigma[\Omega\mu]$, si $\lambda \equiv \mu$. His ita praeparatis habemus sequens

370.

Problema. *Productum e duobus aggregatis $\Sigma[\Omega]$ et $\Sigma[-\Omega]$ assignare.*

Solutio. Quum sit $nn \equiv 0$, $(n+1)^2 \equiv 1$, $(n+2)^2 \equiv 4$ etc. (mod. n), facile patet fieri $\Sigma[\Omega]$

$$\begin{aligned}
&= [1] + [4] + [9] + [16] \ldots + [nn] \\
&= [4] + [9] + [16] + [25] \ldots + [(n+1)^2] \\
&= [9] + [16] + [25] + [36] \ldots + [(n+2)^2] \\
&\qquad\qquad \text{etc. aut generaliter} \\
&= [kk] + [(k+1)^2] + [(k+2)^2] + [(k+3)^2] \ldots + [(n+k-1)^2]
\end{aligned}$$

Hinc $[-kk] \times \Sigma[\Omega]$

$$= [0] + [2k+1] + [4k+4] + [6k+9] \ldots + [(n-1)^2 + 2(n-1)k]$$

Hinc evolvitur $\Sigma[-\Omega]\times\Sigma[\Omega]$ in

$$\begin{array}{l}
+[0]+[1]+[4]+[9]\ldots\ldots+[(n-1)^2]\\
+[0]+[3]+[8]+[15]\ldots\ldots+[nn-1]\\
+[0]+[5]+[12]+[21]\ldots\ldots+[nn+2n-3]\\
+[0]+[7]+[16]+[27]\ldots\ldots+[nn+4n-5]\\
+\text{ etc.}\\
+[0]+[2n-1]+[4n]+[6n+3]\ldots\ldots+[3nn-6n+3]
\end{array}$$

Quas partes *verticaliter* summando prodit

$$n[0]+[1]\times\frac{1-[2n]}{1-[2]}+[4]\frac{1-[4n]}{1-[4]}+[9]\frac{1-[6n]}{1-[6]}+\text{etc.}+[(n-1)^2]\times\frac{1-[2nn-2n]}{1-[2n-2]}$$

in qua expressione omnes partes praeter primam evanescent, quoties n est impar; tunc enim omnes $1-[2n]$, $1-[4n]$, $1-[6n]$ etc. fiunt $=0$, nullus vero denominatorum $1-[2]$, $1-[4]$, $1-[6]$, $1-[8]$ etc. usque ad $1-[2n-2]$. Quando vero n est par, etiam inter denominatores unus est $=0$ puta $1-[n]$, cui respondet terminus $[\frac{1}{4}nn]\times\frac{1-[nn]}{1-[n]}$; summa partium autem ex quibus hic ortus est fit $=n[\frac{1}{4}nn]$. Hic denuo duo casus sunt distinguendi. Quando n est pariter par, fit $\frac{1}{4}nn\equiv 0\,(\text{mod.}\,n)$ adeoque $[\frac{1}{4}nn]=1$; quando vero n est impariter par, fit $\frac{1}{4}nn\equiv\frac{1}{2}n\,(\text{mod.}\,n)$ adeoque necessario $[\frac{1}{4}nn]=-1$. Hinc denique colligitur

1) pro valore impari ipsius n fit productum quaesitum $=n$

2) pro valore pariter pari fit productum $=2n$

3) pro valore impariter pari fit $=0$. Q. E. I.

371.

Operae iam pretium erit, indolem aggregati $\Sigma[\Omega]$ propius considerare.

I. Quum pro quadratis $0, 1, 4, 9, 16$ etc. ipsorum residua minima secundum modulum n substituere liceat, patet si M designet indefinite residua quadratica numeri n a 0 usque ad $n-1$, atque m multitudinem radicum congruentiae $xx\equiv M(\text{mod.}\,m)$, fieri $\Sigma[\Omega]=\Sigma m[M]$. Numerum m in articulis 104, 105 determinare docuimus.

II. Si n est numerus primus (impar), erit pro $M\equiv 0$, $m=1$, pro quovis autem alio valore ipsius M, $m=2$. Si autem n est potestas numeri primi imparis $=p^\nu$, erit $m=2$ pro quovis valore ipsius M per p non divisibili —

— — — — — — — — — — — — — — — —

372.

Si n est numerus primus (impar), residua m consistent ex cifra, pro qua $M = 1$, et ex $\frac{1}{2}(n-1)$ aliis numeris, pro quibus $M = 2$. Designando haec residua (excluso residuo 0) indefinite per μ, erit progressio nostra $= 1 + 2\Sigma r^{\mu}$. Porro si per ν designantur indefinite omnes reliqui numeri infra n, quorum multitudo quoque erit $\frac{1}{2}(n-1)$ et qui omnia non-residua quadratica ipsius n infra n complectentur, manifesto erit

$$1 + \Sigma r^{\mu} + \Sigma r^{\nu} = 1 + r + rr + r^3 \ldots + r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r} = 0$$

Quare ponendo summam progressionis nostrae sive $1 + 2\Sigma r^{\mu} = A$, erit $1 + 2\Sigma r^{\nu} = -A$, nec non $\Sigma r^{\mu} - \Sigma r^{\nu} = A$.

Per art. 356 fit itaque $A = \pm\sqrt{n}$ vel $\pm\sqrt{-n}$, prout n est $\equiv 1$ vel $\equiv 3 \pmod{4}$. Sed signum radicis hinc nondum determinatur.

Si in progressione nostra, quam per Π designabimus, pro r substituitur alia similis radix aequationis $x^n - 1 = 0$, puta $r' = r^{\lambda}$, supponamus inde prodire Π'.

373.

Si n est quadratum altiorve potestas numeri primi, puta $= p^{\pi}$, residua m quaedam consistent e numeris per p non divisibilibus, alia erunt divisibilia per pp neque per altiorem potestatem ipsius p, alia per p^4 neque vero per p^5 dividi poterunt et sic porro usque ad ea quae per $p^{\pi-2}$ neque vero per $p^{\pi-1}$ divisibilia sunt, sive per $p^{\pi-1}$ neque vero per p^{π}, prout π par est sive impar; his denique accedit residuum 0, quod est unicum per p^{π} divisibile (conf. art. 102). Iam designando per μ indefinite residua quadratica numeri p infra p cifra exclusa (quorum multitudo $= \frac{1}{2}(p-1)$), illae diversae residuorum classes sequenti modo exhibebuntur. Prima, quae per p non sunt divisibilia, repraesentantur per $\mu + kp$, ubi pro k substituendi sunt omnes integri a 0 usque ad $p^{\pi-1}-1$, ita ut omnium residuorum in hac forma contentorum multitudo sit $= \frac{1}{2}(p-1)p^{\pi-1}$; pro his singulis fit $M = 2$. Summa autem omnium terminorum in Π his residuis respondentium erit

$$= 2\Sigma r^{\mu+kp} = 2\Sigma r^{\mu}.\Sigma r^{kp} = 2\Sigma r^{\mu}.\frac{r^{p^{\pi}}-1}{r^p-1} = 0$$

Secunda residuorum classis exhibebitur per $\mu pp + kp^3$ ubi pro k substituendi sunt omnes integri a 0 usque ad $p^{\pi-3}-1$ ita ut omnium residuorum in hac forma contentorum multitudo sit $= \frac{1}{2}(p-1)p^{\pi-3}$; pro singulis autem fit $M = 2p$. Summa terminorum in Π hinc oriundorum fit

$$= 2p\Sigma r^{\mu pp+kp^3} = 2p\Sigma r^{\mu pp}.\Sigma r^{kp^3} = 2p\Sigma r^{\mu pp}.\frac{r^{p^\pi}-1}{r^{p^3}-1} = 0$$

siquidem $\pi > 3$. Similiter classis tertia, quarta etc. exhibebitur per $\mu p^4 + kp^5$, $\mu p^6 + kp^7$ etc. ubi pro k omnes integri a 0 usque ad $p^{\pi-5}-1$, $p^{\pi-7}-1$ etc. accipi debent; pro his fit $M = 2pp$, $M = 2p^3$ etc. Et summa terminorum in Π e classe tertia, quarta etc. ortorum evanescet, siquidem $\pi > 5$, $\pi > 7$ etc. resp.

Hinc colligitur, pro casu ubi π par est, in Π eos tantummodo terminos remanere, qui residuo 0 respondent, qui sunt $= 1$; pro his vero fit $M = p^{\frac{1}{2}\pi}$, ita ut summa omnium terminorum in Π fiat $= p^{\frac{1}{2}\pi}$.

GAUSS AN DIRICHLET.

A Monsieur
Monsieur LEJEUNE DIRICHLET à Paris.

Schon früher würde ich Ihnen meinen Dank für die mir gütigst übersandte Abhandlung und das grosse Vergnügen welches Sie mir dadurch gemacht haben, bezeugt haben, wenn ich nicht gewünscht hätte, erst etwas von dem Erfolg dessen zu erfahren, was ich in Beziehung auf Ihre, und ich kann hinzusetzen meine eigenen Wünsche in Berlin zu thun versucht habe. Ich freue mich ungemein jetzt aus einem von dem Secretair der Akademie in Berlin erhaltenen Briefe zu sehen, dass wir hoffen können, dass man Ihnen bald im Vaterlande eine angemessene Fixirung zu verschaffen geneigt sein wird.

Es ist mir eine um so erfreulichere Erscheinung, dass Sie mit grosser Neigung demjenigen Theile der Mathematik anhängen, der von jeher mein Lieblingsstudium gewesen ist, je seltener dieselbe ist. Ich wünsche Ihnen herzlich eine äussere Lage, wo Sie soviel als möglich Herr Ihrer Zeit und der Wahl Ihrer Arbeiten bleiben. Ich selbst wurde gleich nach dem Erscheinen meiner Disquisitiones durch andersartige Beschäftigungen, und später, durch meine äussern Verhältnisse sehr gehindert, meiner Neigung in dem Maasse nachzuhängen wie ich gewünscht hätte. Anstatt eines zweiten Theils jenes Werks, den ich früher beabsichtigte, werde ich mich aller Wahrscheinlichkeit nach darauf beschränken müssen, von Zeit zu Zeit ein Memoire über einen einzelnen Gegenstand zu liefern. Die drei Abhandlungen dieser Art, die bisher im 16. Band der hiesigen Commentationen, und im ersten und vierten der Commentationes recentiores erschienen sind, enthalten aber (einen Theil der zweiten abgerechnet) keine von den Gegenständen, die ich schon 1801 zur Fortsetzung im Auge hatte, sondern neue; und so beziehen sich auch meine spätern Arbeiten dieser Art gleichfalls auf einen neuen Gegenstand, namentlich die Theorie der Biquadratischen Reste, die ich etwa in drei Abhandlungen zu geben denke; die erste davon wird in kurzem für den sechsten Band der Comment. rec. gedruckt werden, und die Hauptmaterialien für das Uebrige sowie für die ähnliche Theorie der cubischen Reste, ist, obgleich noch wenig davon ordentlich zu Papier gebracht ist, im Wesentlichen als abgemacht zu betrachten.

Empfehlen Sie mich gefälligst dem Herrn von Humboldt, falls er noch in Paris ist, und entschuldigen mich, dass ich jetzt nicht an ihn selbst schreibe, mit der Besorgniss, dass mein Brief ihn nicht treffen möchte, da er, wie ich höre, Paris zu verlassen die Absicht hatte.

Mit aufrichtiger Hochschätzung

Ihr ergebenster

Göttingen den 13. September 1826. C. F. Gauss.

Für Ihr gütiges Schreiben, und die gefällige Uebersendung Ihrer beiden Abhandlungen statte ich Ihnen, mein hochgeschätzter Freund, meinen verbindlichsten Dank ab. Ich sehe mit Vergnügen das steigende Interesse, welches man gegenwärtig an den Untersuchungen der Höhern Arithmetik zu nehmen anfängt. Die glückliche Art, wie Sie das zweite auf die biquadratische Residualität der Zahl 2 aus dem ersten ableiten, hat mir sehr wohl gefallen.

Vermuthlich hat jetzt der 6. Band unsrer Commentationen seinen Weg nach Breslau gefunden, und meine Commentatio prima über die biquadratischen Reste wird Ihnen also wol gegenwärtig bekannt sein: wenn sich eine Gelegenheit darbieten sollte, würde ich auch mit Vergnügen Ihnen einen besondern Abdruck derselben übersenden. Ich hätte unter mehrern Beweisarten für das darin vorkommende Theorem wählen können; es wird Ihnen aber nicht entgehen, warum ich den daselbst ausgeführten hier vorgezogen habe, hauptsächlich nemlich, weil die Classification von 2 bei denjenigen Moduln, für welche es quadratischer Nichtrest ist (unter B oder D) als ein wesentlicher integrirender Theil des Theorems betrachtet werden muss, auf welchen die meisten andern Beweisarten nicht anwendbar scheinen.

Die ganze Untersuchung, deren Stoff ich schon seit 23 Jahren vollständig besitze, die Beweise der Hauptheoreme aber (zu welchen das in der ersten Commentation noch *nicht* zu rechnen ist) seit etwa 14 Jahren — (obwol ich wünsche und hoffe, an letztern, den Beweisen, noch einiges vereinfachen zu können) — habe ich auf ungefähr 3 Abhandlungen berechnet. Mit der Abfassung der zweiten habe ich bereits jetzt einen Anfang gemacht, und hoffe sie in nicht langer Zeit zu vollenden, falls nicht die neuerdings mir wieder aufgetragenen Messungsgeschäfte dabei noch einige Verzögerung verursachen.

Das Schlusstheorem $b \equiv \frac{1}{2}rr$ (mod. p) hatte ich schon vor drei Jahren in den hiesigen gel. Anzeigen mit bekannt, und auf den merkwürdigen dabei noch zu lösenden Knoten aufmerksam gemacht; ich habe aber bisher nicht gehört, dass jemand einen Versuch dazu gemacht hätte. Vor einigen Tagen ist es mir nun mit der *einen Hälfte* wirklich gelungen, und dieser Fund hat mir um so mehr Vergnügen gemacht, da er sich gar nicht auf Induction gründet — denn ich gestehe, dass ich gerade *diesen* Zusammenhang nicht erwartet hätte — sondern a priori auf die Combination anderweitiger *sehr verschlungener* und interessanter, schon 28 Jahr alter, aber noch gar nicht bekannt gemachter Untersuchungen, wovon eine leise Andeutung in der Schlussanmerkung der Disquis. Arithm. S. 668 [Gauss Werke B. I. S. 466] gegeben ist.

Es ist dies nemlich ein ausreichendes Criterium für den Fall, wo p von der Form $8n+5$ ist.

Es sei die Anzahl der Classen, welche die binären Formen in jeder der beiden Gattungen für den Determinant $-p$ bilden $=k$. Der Anfang einer von mir bis zu dem Determinant -3000 construirten Tafel steht Disquis. Arithm. p. 520. [art. 303.] Auch ist noch zu bemerken, dass für ein p von der angenommenen Form, allemahl $k = 2m+1$ wird, wenn m die Anzahl der Zerlegungen von p in drei positive Quadrate bedeutet (ich sage positiver, um 0 auszuschliessen), wie Legendre durch Induction gefunden, und in den Disquis. Arithm. zuerst aus der Theorie der *ter*nären Formen bewiesen ist. Man hat z. B.

für $p=5$,	13,	29,	37,	53,	61,	101,	109,	149,	157	u. s. w.
$k=1$,	1,	3,	1,	3,	3,	7,	3,	7,	3	
$m=0$,	0,	1,	0,	1,	1,	3,	1,	3,	1	
		4		1	9	1 4 16	9	1 4 36	4	
		9		16	16	36 16 36	36	4 64 64	9	
		16		36	36	64 81 49	64	144 81 49	144	

Dies vorausgesetzt, ist allemahl derjenige Werth von b, welcher $\equiv \frac{1}{2}rr \pmod{p}$ ist,

$$\equiv 2k+a-1 \equiv 4m+a+1 \pmod{8}$$

wodurch das Zeichen von b vollkommen bestimmt ist. Sehen Sie hier 22 Beispiele, indem ich die Ausdehnung der am Schluss der Abhandlung gegebenen Tafel verdopple.

p	k	a	b	p	k	a	b
5	1	+1	+2	181	5	+9	+10
13	1	−3	−2	197	5	+1	−14
29	3	+5	+2	229	5	−15	+2
37	1	+1	−6	269	11	+13	+10
53	3	−7	−2	277	3	+9	+14
61	3	+5	−6	293	9	+17	+2
101	7	+1	−10	317	5	−11	+14
109	3	−3	+10	349	7	+5	+18
149	7	−7	−10	373	5	−7	+18
157	3	−11	−6	389	11	+17	−10
173	7	+13	+2	397	3	−19	−6

Man kann die Vorschrift also auch so ausdrücken, (immer voraussetzend $p \equiv 5 \pmod{8}$)

Es ist $b \equiv a+1 \pmod{8}$, wenn m gerade

$b \equiv a+5$ wenn m ungerade.

Ich wage noch keine Vermuthung, ob ein noch einfacheres Criterium möglich ist, woran man den Fall des geraden m von dem des ungeraden *im Voraus* unterscheiden könnte, d. i. ohne den Werth von m selbst zu kennen, da, wie ich schon oben bemerkt habe, dies Rapprochement noch ganz neu ist.

Für den Fall $p \equiv 1 \pmod{8}$, bleibt zwar obige Congruenz $b \equiv 2k+a-1 \pmod{8}$ richtig, entscheidet aber nicht mehr über das Zeichen von b, da sie dem positiven und negativen Werthe von b zugleich genug thut. Es ist hier nemlich k immer gerade, $= 2m$ (wenn die Bedeutung von m eben so ausgesprochen wird wie oben) oder $= 2m+2$, wenn man unter m die Anzahl der Zerlegungen von p in 3 positive *ungleiche* Quadrate versteht, und $b \equiv 0 \pmod{4}$, oder $b \equiv -b \pmod{8}$. Ich vermuthe dass der Fall $p \equiv 1 \pmod{8}$ oder $b \equiv 0 \pmod{4}$ altioris indaginis ist und vielleicht wieder

$b \equiv 4 \pmod{8}$ leichter als $b \equiv 0 \pmod{8}$

$b \equiv 8 \pmod{16}$ leichter als $b \equiv 0 \pmod{16}$

u. s. w.

Mit ausgezeichneter Hochachtung beharre ich

Ihr freundschaftlich ergebenster

Göttingen den 30. Mai 1828. C. F. Gauss.

BEMERKUNGEN.

Diesem zweiten Bande von Gauss Werken habe ich alle Abhandlungen, Aufsatze und Tafeln aus dem Gebiete der Hoheren Arithmetik, soweit die sieben Sectionen der *Disqu. Arithm.* sie nicht schon umfassen, einverleibt, und zwar die in den '*Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis*' (in Quart) veroffentlichten fünf Abhandlungen, die in den '*Göttingischen Gelehrten Anzeigen*' (in Octav) erschienenen (von Gauss nicht unterzeichneten, aber durch die Acten der Gottinger Universitäts-Bibliothek in Betreff der Autorschaft verificirten) Anzeigen sowohl dieser eignen als auch einiger anderer nichteigner Schriften, und eine Auswahl aus dem Handschriftlichen Nachlasse.

Beim zweiten Abdruck habe ich noch die Tabellen 'Circuli quadratura nova' 'Zur Berechnung der Logarithmen' 'Quadratorum myrias prima' 'Indices der Primzahlen im hohern Zahlenreiche' 'Hulfstafel zur Auflosung der unbestimmten Gleichung $A = fxx + gyy$ vermittelst der Ausschliessungsmethode' ferner 'Sectio octava', so weit sie aufgeschrieben ist und endlich zwei Briefe von Gauss an Dirichlet als wesentliche Stücke der Geschichte der Hoheren Arithmetik hinzugefugt.

Zur bessern Uebersicht der Gegenstände in einem so umfangreichen Bande sind die Lehrsätze auf gleiche Weise durch den Druck ausgezeichnet. Zum leichtern Gebrauch sowohl der ältern Ausgaben wie der vorliegenden ist bei den Verweisungen auf die Disq. Arithm. statt der Nummer der Seite die der Artikel gesetzt, so wie bei den Angaben von Abhandlungen statt des Orts ihrer Veroffentlichung deren eigner Titel. Die Note, die dem Art. 2 der Abhandlung '*Theorematis arithmetici demonstratio nova*' ursprunglich beigegeben war und die eine Berichtigung des Art. 139 Disqu. Arithm. enthielt, ist dort der betreffenden Stelle eingefugt. Die Note auf Seite 91 ist einer handschriftlichen Notiz entlehnt. Ausserdem unterscheidet sich die vorliegende Ausgabe von den früheren nur durch die Berichtigung einiger Druckfehler. Die von mir hinzugefugten Einschaltungen sind durch eckige Klammern [ ] kenntlich gemacht.

Die *Tafel des quadratischen Characters der Primzahlen* ist nach der Weise der in Art. 99 beschriebenen und (in Art. 331) zur Zerlegung der Zahlen vorzugsweise angewandten Tabula II der Disqu. Arithm. gedruckt. Die Handschrift unter dem Titel '*Quadratorum numeris primis divisorum residua lateralia*' hat in den Schriftzügen am meisten Aehnlichkeit mit der des zweiten Theiles der Tafel zur Verwandlung gemeiner Bruche in Decimalbruche, sie enthält an der Stelle der den Quadratischen Rest anzeigenden horizontalen Striche kleine Kreise, von denen immer diejenigen durch Linien verbunden sind, die in benachbarten horizontalen oder verticalen Reihen vorkommen. Bei der Correctur wurde ich auf mehrere Fehler aufmerksam, habe dann bei einer einmaligen Vergleichung mit JACOBI's *Canon Arithmeticus* 190 Abweichungen in den Angaben der Charactere und nach directer Bestimmung diese in Uebereinstimmung mit jenen gedruckten Tafeln gefunden, dem entsprechend ist hier die Ausgabe berichtigt.

Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabula III. der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenzen p^{π}, welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2)..(0) der Decimalbrüche von $\frac{10.r}{p^{\pi}}$, $\frac{10.rr}{p^{\pi}}$..$\frac{10}{p^{\pi}}$, worin r die Einheit bedeutet, also (1) = (2) = ..(0) wird, wenn 10 Primitivwurzel von p^{π} ist, sonst aber r die kleinste unter denjenigen Primitivwurzeln von p^{t} bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von r habe ich zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 420 der Tafel beigefugt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verschiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voraufzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^{π} zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbruche von $\frac{100}{p^{\pi}}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October* 14. 1795. Im Drucke habe ich beim Theiler 191 Periode (1) die 71ste Ziffer hinzugefugt und beim Theiler 829 eine zwischen der 151 und 152sten Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Die von GAUSS selbst in einem Briefe (Seite 444) erläuterte *Tafel der Frequenz der Primzahlen* besteht fur ihren ersten Theil, welche die Anzahl der Primzahlen in jedem der 1000 ersten Chiliaden gibt in einer Handschrift von GAUSS, es finden sich im Nachlass aber nicht die in dem Briefe angedeuteten Abzählungen der der ersten Million angehörenden Hunderte, die eine bestimmte Anzahl von Primzahlen enthalten. Der andere Theil der Tafel nemlich fur die zweite und dritte Million ist einer von GOLDSCHMIDT allein herrührenden Handschrift entlehnt. Herr MEISSEL hat durch Abzählung und durch seine Formel die folgenden Berichtigungen zu Seite 436 und 437 gefunden:

Chilias	Gauss	Wahrer Werth	Chilias	Gauss	Wahrer Werth
20	102	104	546	68	69
159	87	77	601	75	76
199	96	86	625	68	78
206	85	83	668	73	74
245	78	88	675	69	73
289	85	77	784	74	75
290	84	85	800	81	71
334	80	81	879	68	78
352	80	81	985	74	70
501	78	79			

Die in dem Briefe von Gauss an Encke erwähnte Formel Encke's scheint die folgende

$$\frac{n}{\log n}\sqrt[2\log n]{10}$$

zu sein, welche Encke in einem Briefe an Gauss vom 4. Dec. 1849 mittheilt.

Die *Tafel der Anzahl der Classen binärer quadratischer Formen* gibt die Anzahl der Genera und Classen so wie den Index der Irregularität für die negativen Determinanten in den Hunderten 1 bis 30, 43, 51, 61, 62, 63, 91 bis 100, 117 bis 120, dann noch in einer besondern Zusammenstellung für die des 1. 3. und 10ten Tausend, für die 800 ersten von der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$, sowie für einige sehr grosse Determinanten, ferner für die positiven Determinanten des 1. 2. 3. 9. 10ten Hundert und für einige andere. Die Handschrift besteht aus einzelnen Zetteln, auf denen die Tafeln verschiedenartig eingerichtet sind, z. B. ist bei den ältern das Wort Ordo statt Genus gebraucht, so bei den einzelnen Centaden mit Ausnahme der 9. und 10. positiver Determinanten, dann aber auch bei einzelnen vorläufigen Zusammenstellungen in Chiliaden. Zur leichtern Uebersicht ist hier überall die Bezeichnung der Disqu. Arithm. gewählt, auch die grössten und kleinsten Quotienten aus der Anzahl der Classen dividirt durch den Determinanten, sowie die Anzahl der Determinanten, für welche der Quotient innerhalb gewisser Grenzen fällt, sind wegen Mangel an Raum nicht unter die einzelnen Centaden gesetzt sondern am Ende der Tafel für die negativen Determinanten zusammengestellt. Aus einigen übrig gebliebenen Aufzeichnungen scheint hervorzugehen, dass Gauss zuerst die Classen für die Determinanten berechnet hat, die demselben Hundert und demselben Reste bei dem Theiler 15 angehören. Die Determinanten dieser Abtheilungen sind dann nach der Anzahl der Genera und Classen und zuletzt alle die demselben Hundert angehörigen auf die hier wiedergegebene Weise geordnet. Den Tafeln der einzelnen Centaden sind manche spätere Berichtigungen eingefügt, nicht aber den Zusammenstellungen in Tausenden. Zeitbestimmungen enthalten nur die beiden Tafeln mit den Determinanten der Form $-(15n+7)$ und $-(15n+13)$ nemlich resp. '*Expl. In. Febr. 1801*' und '*Expl. 27 Febr. 1807.*'

In diesen Tafeln habe ich unter anderen die folgenden Fehler bemerkt, denen ich hier zur leichtern Controle die Periodenzahlen der Fundamentalclassen wie z. B. 4. 4. 2 bei dem Determinanten

— 11713 und die durch Formen der resp. Fundamentalclassen dargestellten Zahlen wie 31. 37. 2 beifuge, indem, wie in meiner Abhandlung Band 14 der Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen, als Fundamentalclassen solche Classen genommen werden, die in Vereinigung mit den Classen ihrer Perioden durch Composition jede eigentlich primitive Classe des Determinanten einmal und nur einmal hervorbringen.

Es sind schon die Angaben fortgelassen: und hinzugefugt:

Centas	9	G. IV . . .	3 . ,	— 827[21::3]	Centas 9	G. IV . . .	3 . .	— 828[6.2::31.23]
	26	IV	14	— 2587[24::11]	26	IV	14	— 2586[28.2::7.2]
	26	VIII	6	— 2564[56::3]	26	VIII	6	— 2565[12.2.2::7.2.5]
	91	I	111	— 9059[117::5]	91	I	117	— 9059[117::5]
	120	IV	32	— 11956*2*[36.2::11.49]	120	IV	32	— 11966*2*[32.4::5.83]
	1	I	2	+ 37[3::3]	1	I	3	+ 37[3::3]
	2	I	2	+ 101[3::4]	2	I	3	+ 101[3::4]

Bei der Tafel für Centas 3 und der letzten auf Seite 476, welche in der Handschrift mit einer von der hier abgedruckten äusserlich verschiedenen Aufzeichnung der Centas 1 und 2 vereinigt vorkommen, sind die zwolf Abtheilungen statt mit I Ordo unicus. 1: I. O. 2; I. O. 3; I. O. 4; II. Ordines duo. 1. 1; II. O. 1. 2; II. O 2. 2; II. O. 3. 3; III. Ordines quatuor. 1. 1. 1. 1; III. O. 1. 1. 2. 2; III. O. 2. 2. 2. 2; IV. Ordines octo 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1; hier auf die sonst angewandte Weise mit G. I. 1; G. I. 3; G. I. 5; G. I. 7; G. II. 1; G. II. 2; G. II. 3; G. II. 5; G. IV. 1; G. IV. 2; G. IV. 3; G. VIII. 1; bezeichnet. Die Rechnung ergibt nemlich z. B. 269. I. 3 [3::4]; 235. IV. 3 [6. 2::3. 5]; 401. I. 5 [5::9]; 577. I. 7 [7::3]; 727. II. 5 [10::3]. (Genera I statt Genus I auf Seite 469 ist ein Druckfehler).

In Folge von Druckfehlern ist auszulassen: und hinzuzufügen:

Centas	27.	G. IV. . . .	16 . . .	— 2624*3*	Centas 27.	G. IV. . . .	16 . . .	— 2624*2*[16. 4::3. 16]
	93	IV	16	— 9216	93	IV	16	— 9216*2*[16. 4::5. 9]
	118	VIII	4	— 11713*3*	118	VIII	4	— 11713*2*[4. 4. 2::31. 37. 2]

Nach meiner Berechnung ist noch auszulassen: und hinzuzufügen:

Centas	10.	G. II. . . .	9 . . .	— 972[6. 3::7. 13]	Centas 10.	G. II. . . .	9	— 972*3*[6. 3::7. 13]
	17	IV	4	— 1660[10.2::11. 5]	17	IV	12	— 1700[24 2::3. 17]
	20	IV	12	— 1982[24::3]	20	IV	12	— 1937[24. 2::. 7. 2]
	21	IV	6	— 2096[30 2::3. 4]	21	IV	6	— 2097[12. 2::47. 2]
	23	IV	9	— 2221[18::10]	23	IV	9	— 2224[18. 2::5. 16]
	24	IV	12	— 2376[12. 2. 2::5. 8. 8]	24	IV	12	— 2366[24. 2::3. 2]
	29	IV	9	— 2887[25::8]	29	IV	9	— 2885[18. 2::3. 5]
	61	IV	7	— 6028[12. 2::13. 4]	61	IV	6	— 6028[12. 2::13. 4]
	96	VIII	13	— 9594[20. 2. 2::31. 2. 13]	96	VIII	13	— 9546[26. 2. 2::5. 3. 37]
	118	IV	25	— 11780[16. 4. 2::3. 8. 19]	118	IV	25	— 11750[50. 2::3. 47]
	118	VIII	16	— 11780[16. 4. 2::3. 8. 19]	118	VIII	16	— 11780*2*[16. 4. 2::3. 8. 19]
	119	VIII	16	— 11840[24. 2. 2::5. 9. 7]	119	VIII	16	— 11840*2*[16. 4. 2::3. 16. 5]

Millias I	G. II...	3...	—	541[10::11]	Millias I.	G. II....	5...	—	415[10::13]
I	II	4	—	415[10::13]	I	II	5	—	541[10::11]
I	II	8	—	527[18::3]	I	II	9	—	459*3*[6.3::5 9]
I	II	8	—	722[18::3]	I	II	9	—	527[18::3]
I	II	9	—	194[20::5]	I	II	9	—	722[18::3]
I	II	9	—	459[6 3::5.9]	I	II	9	—	972*3*[6.3::7.13]
I	II	9	—	972[6.3::7.13]	I	II	10	—	194[20::5]
I	II	11	—	842[26::13]	I	II	13	—	842[26::13]
I	IV	3	—	784[8.2::5.4]	I	IV	2	—	532[4.2::13.7]
I	IV	4	—	532[4.2::13.7]	I	IV	4	—	784[8.2::5.4]
I	IV	5	—	425[12.2::3.17]	I	IV	6	—	425[12.2::3.17]
I	IV	5	—	608[12.2::13.27]	I	IV	6	—	608[12.2::13.27]
I	IV	5	—	629[18.2::5.2]	I	IV	9	—	629[18.2::5.2]
III	II	15	—	2578[16::13]	III	II	15	—	2518[30::19]
X	I	111	—	9059[117::5]	X	I	117	—	9059[117::5]
formae—$(15n+13)$	IV	4	—	2788*2*[8.2::19.17]	formae—$(15n+13)$	IV	4	—	2788[8.2::19.17]

Die Tafeln *zur Cyklotechnie* geben für 2452 Zahlen von der Form $aa+1$, $aa+4$, $aa+9$, ... $aa+81$ die sämmtlichen ungeraden Primtheiler p neben den zugehörigen a und zwar in solchen Fällen, wo die Primtheiler alle unter 200 liegen, nur dann werden $aa+1$ u. s. f. zerlegbar genannt.

Zur leichtern Uebersicht beim Gebrauche hat GAUSS für jede Tafel, aus der sich die vollständigen Zerlegungen von Zahlen einer der besonderen Formen bestimmen lassen, eine Hülfstafel aufgestellt, die neben jeder Primzahl p solche Zahlen a enthält, deren um 1 oder 4... vermehrtes Quadrat die Zahl p zum grössten Primtheiler hat.

Der Hauptzweck der Tafeln ist die Erleichterung, die sie für die genaue Berechnung der Bogen gewähren, deren Cotangenten gegebene rationale Zahlen sind. Zunächst können nemlich mit ihrer Hülfe die Bogen für kleine Cotangenten aus den Bogen für grosse Cotangenten zusammengesetzt und dadurch die noch erforderlichen Berechnungen der Reihen, welche die Bögen in ihren Cotangenten ausdrücken, auf ein sehr geringes Maass beschränkt werden. Die hierauf hinzielenden Entwickelungen, die sich in dem handschriftlichen Nachlass finden, sind wenig ausgedehnt, die folgende ist die am weitesten fortgeführte. Es bezeichnen darin

$$[2]\ [5]\ [13]\ [17]\ [29]\ [37]\ [41]\ [53]\ [61]\ldots[197]\ (18)\ (57)\ (239)\ \left(\tfrac{79}{3}\right)\ldots$$

die Bogen der Cotangenten

$$1 \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad 4 \quad \frac{5}{2} \quad 6 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{2} \quad \frac{6}{5} \ldots 14 \quad 18 \quad 57 \quad 239 \quad \frac{79}{3} \ldots$$

Mit Hülfe der Tafeln ist durch Zerlegung von $18+i$, $57+i$, $239+i$ in ihre complexe Primfactoren

$$(18) = 2[2]-2[5]-[13]$$
$$(57) = -[2]+3[5]-[13]$$
$$(239) = 3[2]\qquad -4[13]$$

gefunden und hieraus

$$\begin{aligned}[2] &= 12(18)+8(57)-5(239)\\ [5] &= 7(18)+5(57)-3(239)\\ [13] &= 9(18)+6(57)-4(239)\end{aligned}$$

ferner mit Hulfe der Tafeln

$$\begin{aligned}(268) &= -2[5]+2[13]-[17]\\ (38) &= -[5] \qquad\qquad +2[17]\end{aligned}$$

und hieraus durch Elimination von [17] und Einsetzen der zuvor erhaltenen Werthe von [5], [13]

$$(38)+2(268) = (18)-(57)-(239)$$

Die Elimination von (18) hat dann die neue Bestimmung ergeben

$$\begin{aligned}[2] &= 12(38)+20(57)+7(239)+24(268)\\ [5] &= 7(38)+12(57)-4(239)-14(268)\\ [13] &= 9(38)+15(57)+5(239)+18(268)\\ [17] &= 4(38)+6(57)+2(239)+7(268)\end{aligned}$$

Nach folgeweiser Anwendung der Cotangenten 117, 327, 882, 18543, 307, 278, 378, 829, 993, 2943, 447, 606, 931, 1143, 1772, 6118, 34208, 44179, 85353, 485298, 17772, 9466, 330182, 5257, 114669, 12943 sind endlich [2][5]...[61] durch (5257), (9466)...(485298) ausgedruckt und deren Coëfficienten in den folgenden Spalten zusammengestellt:

	5257	9466	12943	34208	44179	85353	114669	330182	485298
2	+ 2805	− 398	+ 1950	+ 1850	+ 2021	+ 2097	+ 1484	+ 1389	+ 808
5	+ 1656	− 235	+ 1151	+ 1092	+ 1193	+ 1238	+ 876	+ 820	+ 477
13	+ 2100	− 298	+ 1460	+ 1385	+ 1513	+ 1570	+ 1111	+ 1040	+ 605
17	+ 875	− 124	+ 608	+ 577	+ 630	+ 654	+ 463	+ 433	+ 252
29	+ 1359	− 193	+ 945	+ 896	+ 979	+ 1016	+ 719	+ 673	+ 391
37	+ 590	− 184	+ 410	+ 389	+ 425	+ 441	+ 312	+ 292	+ 170
41	+ 2410	− 342	+ 1675	+ 1589	+ 1736	− 1802	+ 1275	+ 1193	+ 694
53	+ 994	− 141	+ 691	+ 655	+ 716	− 743	+ 526	+ 492	+ 286
61	+ 2481	− 352	+ 1725	+ 1637	+ 1788	+ 1855	+ 1313	+ 1229	+ 715

Von der Richtigkeit dieser Gleichungen, welche zur Bestimmung von [2][5]....[61] dienen können, überzeugt man sich unmittelbar durch die aus obigen Tafeln sich ergebenden Zerlegungen

$$\begin{array}{rcllllllllll}
(5257) &=& [2] & +2[5] & -[13] & +[17] & \cdot & \cdot & -[41] & \cdot & -[61] \\
(9466) &=& 2[2] & \cdot & \cdot & \cdot & -[29] & -3[37] & \cdot & \cdot & -[61] \\
(12943) &=& [2] & -4[5] & +3[13] & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -[61] \\
(34208) &=& 2[2] & -[5] & -2[13] & +[17] & +[29] & \cdot & \cdot & -2[53] & \cdot \\
(44179) &=& 3[2] & \cdot & -3[13] & -2[17] & -[29] & \cdot & \cdot & +[53] & \cdot \\
(85353) &=& -[2] & -[5] & +[13] & -[17] & \cdot & -[37] & +2[41] & -[53] & \cdot \\
(114669) &=& -3[2] & \cdot & \cdot & +[17] & \cdot & +[37] & \cdot & +2[53] & +2[61] \\
(330182) &=& -4[2] & +5[5] & +[13] & \cdot & +[29] & -[37] & -[41] & \cdot & +[61] \\
(485298) &=& -2[2] & -[5] & +4[13] & \cdot & -2[29] & +[37] & \cdot & +[53] & \cdot
\end{array}$$

Die von den Rechnern bis jetzt angewandten Arten zur Bestimmung von $\frac{\pi}{4} = (1)$ stellt GAUSS in der folgenden Uebersicht zusammen

MACHIN	$(1) = 4(5) - (239)$ auch CLAUSEN
EULER	$= (2) + (3)$ (EULER à GOLDBACH 1746 Mai 28)
VEGA	$= 5(7) + 2(\frac{79}{3})$ (VEGA Thesaurus logar. p. 633)
VEGA	$= 2(3) + (7)$ auch CLAUSEN (Astr. Nachr. B. 25. S. 209)
RUTHERFORD	$= 4(5) - (70) + (99)$ (Philos. Trans. 1841. p. 283)
DASE	$= (2) + (5) + (8)$ (CRELLE Journal. B. 27. S. 198)
GAUSS. 1.	$= 12(18) + 8(57) - 5(239)$
GAUSS. 2.	$= 12(38) + 20(57) + 7(239) + 24(268)$

Die ersten Rechnungen fur die Tafeln gehoren der Zeit der Ausarbeitung der *Disquiss. Arr.* an, sie sind dann besonders in den Jahren 1846 und 47 gefordert. Am 21. Juli 1847 waren 2283 Zerlegungen nach der hier wiedergegebenen Ordnung in Tafeln gebracht, die übrigen 169 sind später berechnet, und ich habe sie diesem Abdruck (der sich vom Original in der Einrichtung nur durch die des leichtern Satzes wegen statt der Potenzen angewandte Schreibweise der Wiederholung der Factoren unterscheidet) mit eingeordnet.

Die Manuscripte mit diesen letzten Rechnungen scheinen die Resultate in der Form zu enthalten, wie sie unmittelbar gefunden wurden. Die Reihenfolge, in welcher dabei die Zahlen a auftreten, lässt vermuthen, dass nur fur die kleinern die Theiler von $aa+1$ u.s.f. aufgesucht wurden, und dass die grössern Zahlen sich aus diesen durch Anwendung besonderer Kunstgriffe ergeben haben. Aufgezeichnet ist aber nur folgende Regel: *Aus drei Zahlen a, $2a-n$, $2a+n$ findet sich eine vierte*

$$\frac{4a^3 - (nn-3)a}{nn+1}$$

Diese ist immer eine ganze Zahl für $n = 0$ und $n = 1$, sonst nur

$$\textit{für } a \equiv 0 \textit{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \bmod (nn+1) \textit{ wenn } n \textit{ gerade}$$
$$\textit{und für } a \equiv 0 \textit{ und } \equiv \pm\sqrt{-1} \bmod \frac{nn+1}{2} \textit{ wenn } n \textit{ ungerade}$$

Beispiele	$a = 253,\ n = 6,$	1750507
	$a = 294,\ n = 11,$	832902
	$a = 119,\ n = 1,$	3370437
	$a = 57,\ n = 3,$	74043
	$a = 123,\ n = 9,$	90657

Zu der vierten Zahl gehören nemlich keine andern Primtheiler als zu den ersten dreien und davon sind auch nur diejenigen ungeraden Primtheiler ausgeschlossen, welche der Zahl n zugehören.

Die Tabelle '*Quadratorum myrias prima*' enthalt in der Zeile der Überschrift die Tausende und Hunderte, in der ersten senkrechten Spalte die Zehner und Einer der Grundzahl ferner in der letzten senkrechten Spalte jeder einzelnen Tabelle die drei niedrigsten Ziffern des Quadrates und in dem Innern die vier oder fünf höheren Ziffern des Quadrates.

Die Tabelle '*Indices der Primzahlen im Höhern Zahlenreiche*' enthalt in der obersten horizontalen Reihe den jedesmaligen Modulus, in der zweiten Reihe die zur Anwendung gekommene Basis, in der ersten senkrechten Spalte die Restzahlen und im Innern die Indices. Die Sterne * bezeichnen die Reste Null.

Die Handschrift des Bruchstuckes der '*Sectio octava. Quarundam disquisitionum ad circuli sectionem pertinentium uberior consideratio*' scheint der Zeit der Umarbeitung der 'Analysis residuorum' in die 'Disquisitiones arithmeticae' anzugehören. Die Briefe von GAUSS an DIRICHLET bestätigen die Ansicht, dass GAUSS auch in der höheren Arithmetik erheblich mehr entdeckt hat als im Nachlasse sich findet.

SCHERING.

INHALT.

GAUSS WERKE BAND II. HÖHERE ARITHMETIK.

GÖTTINGEN,

DRUCK DER DIETERICHSCHEN UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI.

W. FR. KAESTNER.

BERICHTIGUNG.

Zum ersten Abdrucke von Band II. pag. 452 Centas 12. G. IV. 5
Man lese 1137 statt 1237.

Zu Band II. pag. 508 Man rucke den Strich zwischen den beiden Worten 'Excluduntur' und 'Admittuntur' im *unteren* Eingange der Tabelle (rechts unten auf der Seite) sieben Millimeter weiter nach links. (Vergl. den unteren Eingang der Tabelle auf pag. 509.)

Zum ersten Abdrucke von Band III. pag. 130 und 133.
Zufolge einer von Herrn H. E. HEINE gemachten Bemerkung ist auf Seite 130 Art. 7. Gleichung [4] $+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1)$ statt $+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma+1)$, in Gleichung [11] $+(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\,x\,F(\alpha,\beta,\gamma+1)$ statt $-(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)F(\alpha,\beta,\gamma-1)$ und auf Seite 133 Art. 11. in Gleichung [23] $F(\alpha,\beta+1,\gamma)-F(\alpha+1,\beta,\gamma)$ statt $F(\alpha-1,\beta+1,\gamma)-F(\alpha-1,\beta-1,\gamma)$ zu setzen.