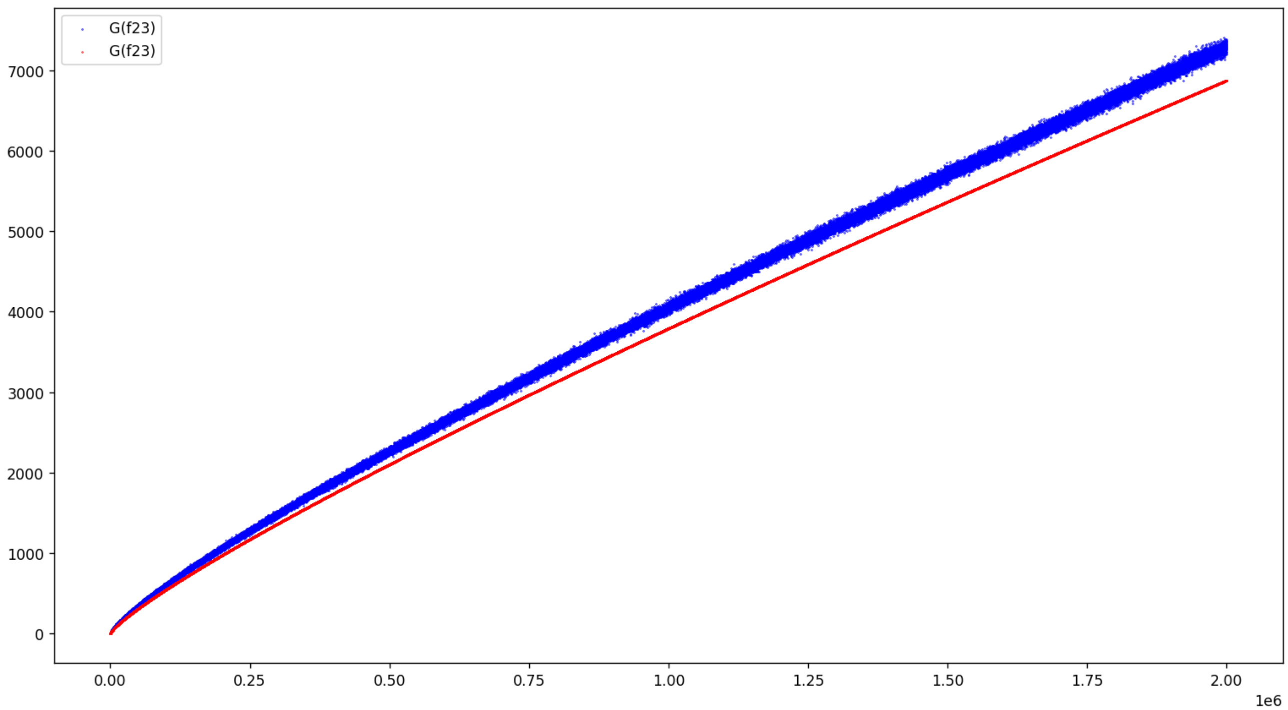
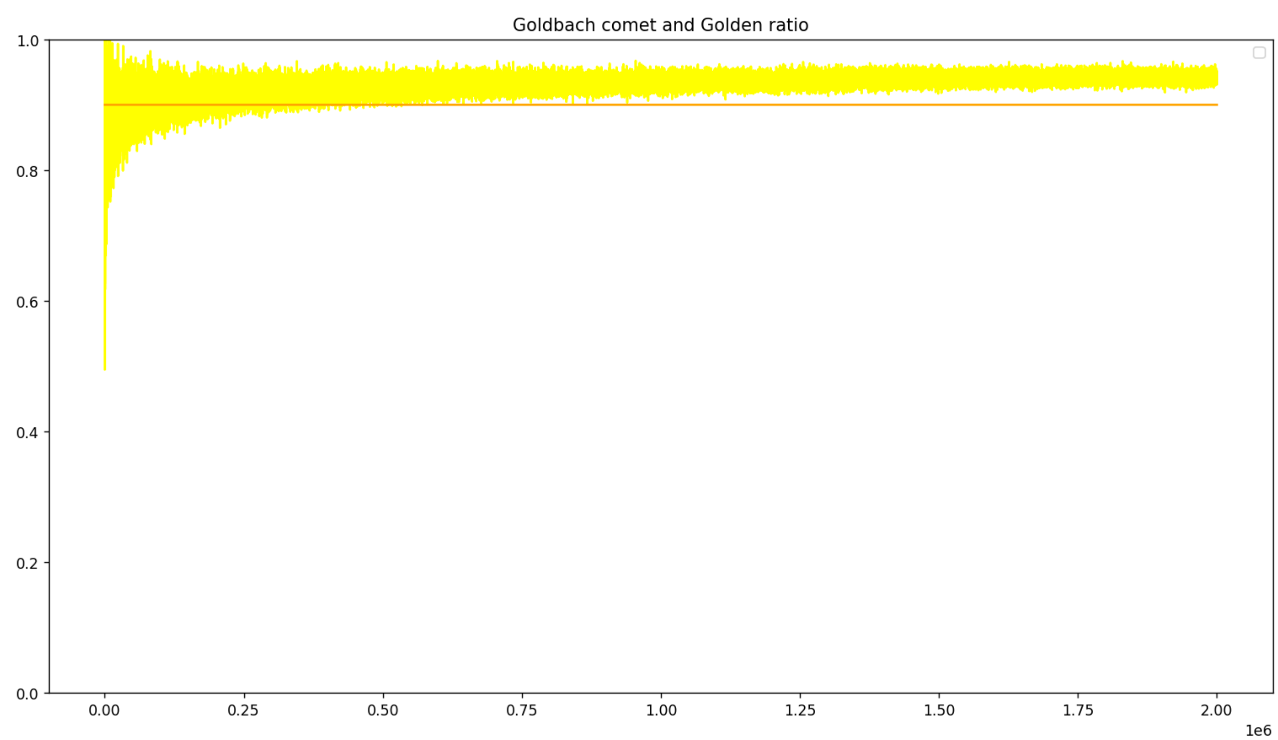
Comète de Goldbach et Golden ratio (nombre d'or), Denise Vella-Chemla, 25.12.2022

On présente ici deux graphiques :





- le premier présente pour les seuls nombres pairs inférieurs à 2.10^6 de la forme $2p$ avec p un nombre premier (ces nombres pairs vérifient trivialement la conjecture de Goldbach car

$2p = p + p$) leur nombre de décomposants de Goldbach (qu'on notera $G(2p)$) en bleu ; on imagine, sans l'avoir démontré, que les $2p$ (p premier) ont leur nombre de décompositions de Goldbach "en bas de" (i.e. qui minore localement) ce qu'on appelle communément la comète de Goldbach.

En rouge sur ce premier graphique, on a représenté la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{(1+\sqrt{5})x}{2\sqrt{5}.\ln\, x.\ln\, x}$$

On constate sur ce premier graphique que la fonction en rouge semble minorer le bas de la comète ;

- le second graphique présente en jaune le ratio $\frac{f(x)}{G(x)}$; on a noté en rouge la droite $y = 0.9$ pour référence. Le ratio semble petit à petit passer au-dessus de la droite de référence.

Si l'on démontrait que les pairs de la forme $2p$ minorent localement la comète, puis que la fonction f minore le nombre de décompositions de Goldbach pour tout pair de la forme $2p$, on aurait une démonstration de la conjecture de Goldbach.

Ce qui serait excitant dans une telle démonstration, ce serait d'utiliser le Golden ratio pour démontrer la conjecture de Goldbach, que d'or, que d'or...

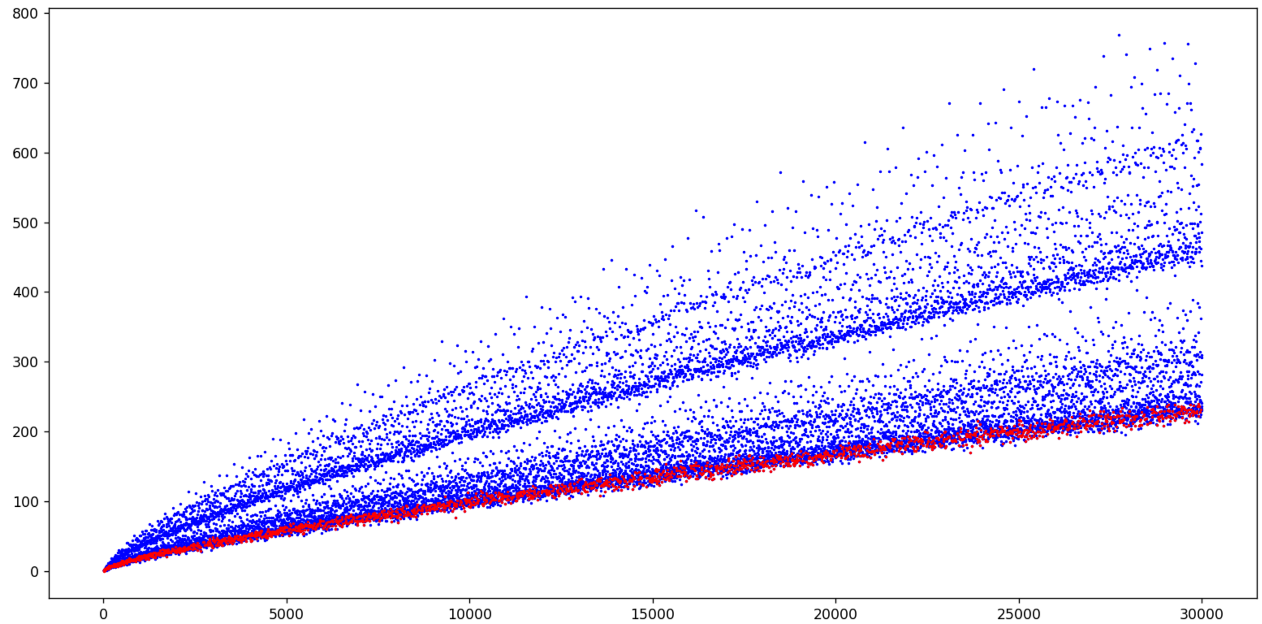
Et le plus extraordinaire encore serait de relier cette idée à un article de Moczurad, Tyszkiewicz et Zaionc [1][1] dans lequel la constante qui intervient ici $\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 0.7236...$ apparaît comme une limite.

Copions ici un extrait du résumé de leur article :

> "*On considère les types et le lambda-calcul typé sur un nombre fini de types de base. On va rechercher la valeur du ratio du nombre des types tautologiques d'une longueur donnée n rapporté au nombre de tous les types de longueur n. L'objectif de cet article est de trouver la limite de ce ratio lorsque $n \to \infty$. La réponse à cette question équivaut à trouver la "densité" des types tautologiques dans l'ensemble de tous les types, où la probabilité asymptotique, comme on l'appelle, de trouver un type tautologique dans l'ensemble de tous les types. Selon l'isomorphisme de Curry-Howard, cela signifie trouver la densité ou bien la probabilité asymptotique des formules propositionnelles intuitionnistes prouvables parmi l'ensemble de toutes les formules. Pour les types avec un type de base (les formules avec une seule variable propositionnelle), on démontre que la limite existe et qu'elle est égale à $1/2 + \sqrt{5}/10$, qui est approximativement égal à 72%. Cela signifie qu'un type aléatoire (en terme de formule) d'une grande taille a environ 72% de chance d'être une tautologie.*".

[1] Voir traduction ici : http://denise.vella.chemla.free.fr/trad-Prop-stat-tautologies.pdf.

Ci-dessous, voyons comme les nombres pairs doubles de nombres premiers ont leur nombre de décompositions de Goldbach qui semblent “minorer localement” la comète de Goldbach :



Références

[1] Malgorzata Moczurad, Jerzy Tyszkiewicz, Marek Zaionc, *Statistical properties of simple types.* Math. Struct. Comput. Sci. 10(5): 575-594 (2000).