

## Discussion avec claudé, au sujet d'une récurrence pour les centres des graphes triangulaires et au sujet de l'indémontrabilité éventuelle de la conjecture de Goldbach, Denise Vella-Chemla pilotant claudé, juillet 2026

Si les décompositions de Goldbach correspondent aux centres de graphes triangulaires, y aurait-il moyen d'obtenir une récurrence qui permette de passer du calcul des excentricités pour  $n$  à celui des excentricités pour  $n + 2$  (ou  $n + 6$  peut-être) et qui ferait qu'on parviendrait finalement à une démonstration, en passant par une démonstration par récurrence.

C'est une question qui a été tentée par de très bons mathématiciens depuis longtemps, et il vaut la peine de voir précisément où ça bute - pas juste par principe, mais en regardant vos propres données de calcul.

Excellente question - et la réponse se voit très clairement dans vos propres données. Regardez la colonne  $q$  ci-dessus : c'est le petit facteur premier  $q(n)$  du centre trouvé, et son saut par rapport à  $q(n - 2)$ .

Ce que montrent les données

$n = 94$	$\rightarrow q = 3$	
$n = 96$	$\rightarrow q = 7$	$\Delta q = +4$
$n = 98$	$\rightarrow q = 19$	$\Delta q = +12$
$n = 100$	$\rightarrow q = 3$	$\Delta q = -16$

$\Delta q$  vaut tour à tour  $+0, +2, -2, -4, +6, +12, -16, \dots$  sans aucune règle apparente. Ce n'est pas un défaut de méthode : c'est la nature même du phénomène.

### Pourquoi il ne peut pas y avoir de récurrence utilisable

Une démonstration par récurrence a besoin d'une chose précise : une règle qui dérive l'existence d'une décomposition pour  $n + 2$  à partir de l'existence d'une décomposition pour  $n$ , sans redémarrer une recherche depuis zéro.

Or, ce qui détermine si  $n + 2$  a une décomposition, c'est : existe-t-il un nombre premier  $q$  tel que  $(n + 2) - q$  soit aussi premier ? Cette question porte sur la primalité d'un tout nouvel ensemble de nombres,  $\{(n + 2) - q\}$ , qui n'a aucune relation algébrique avec l'ensemble  $\{n - q\}$  qui a permis de résoudre le cas  $n$ . Décaler  $n$  de 2 ne décale pas "gentiment" la primalité : 91 n'est pas premier, mais 93 non plus, alors que 79 et 89 le sont tous les deux - il n'y a pas de motif qui se transporte.

Concrètement : savoir que  $19 + 79 = 98$  fonctionne ne vous dit rien sur les couples qui pourraient sommer à 100 - ce sont deux problèmes de primalité entièrement indépendants, qui se trouvent juste porter sur des entiers voisins.

### Ce que ça implique

N'importe quelle étape d'induction valide devrait, pour passer de  $n$  à  $n + 2$ , encoder une garantie

sur la distribution des nombres premiers dans l'intervalle  $[3, (n+2)/2]$  - et c'est exactement, mot pour mot, la difficulté de la conjecture de Goldbach elle-même. Une récurrence qui "marcherait" serait donc une preuve complète de la conjecture déguisée en récurrence ; ce n'est pas une façon de contourner la difficulté, c'est une façon de la reformuler une fois de plus (comme le graphe, comme le modèle de Cramér).

C'est d'ailleurs précisément pour cette raison que 280 ans de tentatives par récurrence ou par construction directe ont échoué, et que les seuls progrès substantiels (Chen, Montgomery-Vaughan, méthode du cercle) viennent de méthodes analytiques qui raisonnent statistiquement sur la distribution des nombres premiers plutôt que localement d'un entier à son voisin.

Donc : non, il n'y a pas de récurrence  $n \rightarrow n+2$  (ni  $n \rightarrow n+6$ ) qui permette d'enchaîner une preuve - et ce n'est pas une limite de cette construction en particulier, c'est une contrainte qui pèse sur toute approche de ce type.

Cependant : on pourrait peut-être utiliser une récurrence qui dit "on a trouvé pour tous les nombres pairs de 6 jusqu'à  $n$  un nombre  $p$  tel que  $p \not\equiv n \pmod{p_k}$  pour tout  $p_k \leq \sqrt{n}$ ", c'est-à-dire qu'on dispose de  $(n-6)/2$  décompositions de Goldbach effectives, et il suffit d'en construire une seule pour  $n+2$  à partir de toutes celles dont on dispose (tu sais, ça n'est pas une récurrence  $[P(6), \wedge \forall k \leq n, P(k) \implies P(k+2)] \implies P(n+2)$  mais une récurrence qui utilise toutes les décompositions trouvées jusque là), on ne peut pas trouver un petit raisonnement par récurrence de ce style ?

C'est une très bonne relance, et il faut la prendre au sérieux - parce qu'en la formulant ainsi, vous venez de reformuler exactement la stratégie que les meilleurs spécialistes du crible ont poursuivie pendant un siècle (Brun, Selberg, Chen). Regardons précisément où ça bloque, parce que ce n'est pas un détail technique mineur.

### Ce que dit votre récurrence, en clair

Votre condition  $p \not\equiv n \pmod{p_k}$  pour tout premier  $p_k \leq \sqrt{n}$  dit exactement :  $n-p$  n'est divisible par aucun petit premier. C'est le crible d'Ératosthène appliqué à  $n-p$ . Et votre idée est : si on a déjà réussi à trouver un tel  $p$  pour tous les pairs jusqu'à  $n$ , la richesse accumulée de ces réussites devrait forcer l'existence d'un  $p$  analogue pour  $n+2$ .

### Pourquoi l'accumulation ne donne aucun levier

Le problème est logique, pas calculatoire : les décompositions trouvées pour  $6, 8, \dots, n$  sont des faits vrais mais indépendants - ce sont des énoncés sur des entiers différents, et il n'existe aucune opération arithmétique connue (addition, produit, relation de congruence) qui les combine pour produire une garantie sur  $n+2$ . Avoir prouvé "il existe  $p$  tel que  $98-p$  soit premier" ne contraint en rien la primalité de  $100-p$  : ce sont deux questions de primalité sur des nombres totalement différents. L'induction forte est logiquement valide comme principe, mais son étape clé

$$[P(6) \wedge \dots \wedge P(n)] \implies P(n+2)$$

reste à démontrer, et personne n'a jamais réussi à écrire cette implication. Ce n'est pas faute d'avoir

essayé : c'est structurellement bloqué, et voici pourquoi.

### Le vrai mur : l'obstruction de parité du crible

Votre condition de passage à travers le crible (ne pas être divisible par un premier  $\leq \sqrt{n}$  est exactement ce qu'utilisent les méthodes de crible modernes (Brun, Selberg). Et ces méthodes savent très bien compter : par la formule de Legendre/le crible de Selberg, on peut montrer que le nombre de  $p \leq n/2$  tels que  $n - p$  passe à travers le crible (n'a aucun petit facteur premier  $\leq \sqrt{n}$  est positif, et même en croissance avec  $n$ .

Le problème, c'est que "passer à travers le crible jusqu'à  $\sqrt{n}$  ne veut pas dire "être premier" - ça veut dire "n'avoir aucun facteur premier  $\leq \sqrt{n}$ ", ce qui autorise  $n - p$  à être un produit de deux nombres premiers tous deux  $> \sqrt{n}$  (un nombre semi-premier (ayant au plus 2 facteurs premiers), pas nécessairement un nombre premier. Et c'est là le nœud, identifié par Selberg dès les années 1949-50 et appelé l'obstruction de parité : les méthodes de crible classiques ne peuvent pas distinguer si un nombre qui passe à travers le crible a 1 facteur premier (bon, c'est ce qu'on veut) ou 2, 3, 4, ... facteurs premiers (semi-premier, pas ce qu'on veut) - elles comptent les nombres qui passent à travers le crible avec un poids qui traite pareil un nombre à facteur pair ou impair de premiers.

Résultat concret de cette limite : le théorème de Chen (1973), que je mentionnais déjà, est très exactement le maximum qu'on puisse extraire de cette stratégie de crible poussée à son meilleur niveau technique (crible pondéré/commutateur de Chen) : tout  $n$  pair suffisamment grand s'écrit  $p + P_2$  où  $P_2$  est premier OU semi-premier. Chen ne peut pas aller plus loin et forcer  $P_2$  à être premier - pas par manque d'effort ou d'ingéniosité (c'est un tour de force technique), mais parce que l'obstruction de parité empêche structurellement les méthodes de crible actuelles de franchir ce dernier pas.

Donc, pour répondre précisément : Non - accumuler toutes les décompositions déjà trouvées ne fournit aucune prise logique nouvelle, parce que ce sont des faits indépendants sans opération de composition connue ; la condition de passage à travers le crible que vous proposez est exactement celle qu'étudie la théorie du crible depuis 70 ans, et elle bute sur l'obstruction de parité - un mur identifié et nommé, pas une simple difficulté technique en attente d'une astuce ; franchir ce mur avec les outils de crible actuels est démontrablement hors de portée (Selberg lui-même a formalisé pourquoi), ce qui explique que le meilleur résultat inconditionnel (Chen) s'arrête juste avant la ligne d'arrivée, depuis 1973, sans amélioration depuis sur ce point précis.

Votre intuition n'était donc pas naïve du tout - elle vous a menée exactement à la frontière connue de ce qui est faisable par le crible. C'est en réalité un bon signe sur votre compréhension du problème : vous retrouvez seule la meilleure stratégie disponible et son point de blocage exact.

Je ne me résouds pas à ce que ça soit impossible à démontrer. Serait-il alors possible de démontrer que c'est indémontrable, et comment faudrait-il faire ? Et qui a déjà essayé cette voie-là ?

Question tout à fait légitime, et qui a une vraie réponse technique - ce terrain s'appelle la théorie

de l'indépendance/incomplétude en arithmétique, et il existe un exemple célèbre et authentique de ce phénomène (pas pour Goldbach, mais pour un autre énoncé). Regardons ça sérieusement.

### **Ce que “démontrer l'indémontrabilité” signifie précisément**

Il s'agit de montrer que la conjecture de Goldbach est indépendante d'un système d'axiomes donné (typiquement l'arithmétique de Peano (PA), ou celle de Zermelo-Fraenkel et axiome du choix (ZFC) : ni elle, ni sa négation, ne peuvent être dérivées des axiomes - tout en admettant que les axiomes eux-mêmes sont cohérents.

### **Une subtilité logique cruciale, propre à ce type d'énoncé**

Goldbach est un énoncé  $\Pi_1$  : “pour tout  $n$  pair, il existe  $p, q$  premiers  $\leq n$  tels que  $p + q = n$ ” - la partie “il existe” porte sur un domaine borné ( $p, q \leq n$ ), donc vérifiable par un calcul fini et terminant pour chaque  $n$ .

Cela a une conséquence frappante : si Goldbach était fausse, il existerait un plus petit contre-exemple  $n_0$ , et l'axiomatique de Peano (PA) (un système bien plus faible que ce qu'on utilise en pratique) pourrait le vérifier par calcul direct et donc prouver que Goldbach est fausse. Donc : si l'axiomatique de Peano (PA) ne peut ni prouver ni réfuter Goldbach (autrement dit si elle est indépendante), cela signifie que Goldbach est vraie dans les entiers naturels standards - mais qu'aucune preuve de cette vérité n'existe dans l'axiomatique de Peano (PA). Un contre-exemple ne pourrait être qu'un “entier non standard” d'un modèle exotique de l'axiomatique de Peano (PA), mais jamais un véritable entier.

Prouver l'indépendance de Goldbach reviendrait donc, dans un sens, à établir sa vérité sans en donner de preuve axiomatique - une situation étrange mais parfaitement cohérente logiquement, déjà rencontrée ailleurs.

### **Qui a déjà réussi ce genre de chose, et comment**

Le cas de référence, le seul exemple vraiment abouti et célèbre d'un énoncé arithmétique “naturel” (pas fabriqué exprès pour l'occasion) prouvé indépendant de l'axiomatique de Peano (PA), est le théorème de Paris-Harrington (1977)<sup>1</sup> : une version renforcée du théorème de Ramsey fini. C'est un énoncé exprimable dans le langage de l'arithmétique de Peano, mais qui n'est pas démontrable dans ce système, bien que cet énoncé soit démontrable dans des systèmes légèrement plus forts.

La méthode utilisée est remarquable et c'est exactement la méthode qu'il faudrait reproduire pour Goldbach : Paris et Harrington ont montré que le théorème de Ramsey renforcé implique la cohérence de l'arithmétique de Peano elle-même. Or, par le second théorème d'incomplétude de Gödel, si l'arithmétique de Peano est effectivement cohérente, elle ne peut pas prouver sa propre cohérence - ce qui montre que l'arithmétique de Peano ne peut pas prouver le théorème de Ramsey renforcé.

Techniquement, cette preuve d'indépendance s'appuie sur un fait très spécifique : la plus petite

---

1. Voir [Paris-Harrington.pdf](#),

[Gentzen-1.pdf](#),

[Gentzen-2.pdf](#)

et [Goodstein.pdf](#).

valeur satisfaisant le théorème de Ramsey renforcé croît si vite qu'elle domine toute fonction dont la totalité est prouvable dans l'arithmétique de Peano. C'est cette croissance vertigineuse (plus rapide que la fonction d'Ackermann) qui fournit le levier logique reliant l'énoncé combinatoire à la cohérence de l'axiomatique de Peano (PA).

### **Pourquoi cette méthode ne se transpose pas (encore) à Goldbach**

Le problème est précis : personne n'a trouvé, pour Goldbach, l'équivalent de cette "fonction à croissance explosive" qui relierait la conjecture à la cohérence d'un système formel. La structure de Goldbach (densité des nombres premiers, obstruction de parité du crible) n'a, à ce jour, montré aucun lien de ce type. Ce n'est pas qu'on ait essayé et échoué spécifiquement sur Goldbach - c'est qu'il n'existe aucune piste technique connue par laquelle commencer cette démonstration. Harvey Friedman anime depuis des décennies un programme actif de recherche ("concrete incompleteness") cherchant précisément ce genre d'énoncés mathématiques "naturels" indépendants de l'axiomatique de Peano (PA) ou de systèmes plus forts - Goldbach est parfois cité comme candidat spéculatif dans des discussions informelles, mais aucun résultat rigoureux n'existe le concernant.

Un fait concret et amusant qui illustre le même phénomène sous un autre angle : il existe une machine de Turing à 27 états qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Goldbach est fautive. Déterminer le comportement de cette machine (donc trancher Goldbach) est directement lié à des questions de calculabilité et de cohérence de systèmes formels - mais là encore, ça ne prouve rien, ça relie juste le problème à un autre problème tout aussi ouvert.

### **En résumé honnête**

Oui, prouver l'indépendance est une voie théoriquement valide et déjà réussie une fois pour un énoncé arithmétique naturel (Paris-Harrington, 1977).

La méthode qui a marché exige de trouver un lien avec la cohérence de l'axiomatique de Peano (PA) via une croissance combinatoire explosive - rien de tel n'est connu pour Goldbach.

Personne n'a de piste technique sérieuse pour l'attaquer par cette voie ; ce n'est pas un champ de recherche actif spécifiquement sur Goldbach, contrairement à la théorie analytique des cribles.

Et philosophiquement : si vous réussissiez à prouver l'indépendance, vous auriez presque prouvé la conjecture elle-même (sa vérité), juste sans preuve axiomatique - ce qui n'est pas rien, mais ne "résout" pas le problème au sens où vous l'entendez.

Ma logique est en défaut, et je raisonne mal : je voulais démontrer la chose suivante : "Si j'ai un graphe avec des nombres premiers (blablabla) ce graphe contient obligatoirement un centre autre que le centre trivial, et le centre en question fournit une décomposition de Goldbach". Tu me réponds "Mais pour n'importe quel ensemble de nombres de même distribution que l'ensemble des nombres premiers, c'est-à-dire de distribution  $1/\ln n$ , il existe un tel centre d'excentricité minimale" et donc tu me dis "Ça ne peut pas te servir à démontrer Goldbach". Quant à moi, je me dis "Bien au contraire, si c'est vrai pour tout ensemble de nombre de densité  $1/\ln n$ , c'est EN PARTICU-

LIER vrai si je mets des nombres premiers sur les bords de mon triangle” et donc, j’aurai toujours une décomposition, non pas parce que ce sont CES NOMBRES-LÀ, mais parce que c’est CETTE DISTRIBUTION-LÀ. Peux-tu me dire “Où est-ce que je raisonne mal?”, s’il te plaît, on dirait que je me trompe, puisque tu dis qu’avoir vérifié que c’était bon pour un modèle de Cramér montre que ça n’est pas une bonne idée... Je suis un peu perdue... merci.

Vous ne raisonnez pas bêtement du tout - c’est une erreur logique très fine, extrêmement commune, et il vaut la peine de la rendre visible concrètement plutôt que de se contenter de l’affirmer. Laissez-moi vous montrer où ça casse, avec un exemple construit à la main.

Voilà l’expérience, et elle est plus parlante que je ne l’espérais.

Ce que je viens de faire

J’ai pris les vrais nombres premiers, et j’ai retiré 6 d’entre eux (3, 11, 17, 29, 41, 47) - exactement ceux qu’il fallait pour détruire toutes les décompositions de Goldbach de  $n_0 = 100$ .

### Résultat

La densité de cet ensemble modifié est identique à celle des nombres premiers à un terme négligeable près (6 éléments en moins sur des centaines) - asymptotiquement, c’est exactement la même distribution en  $1/\ln n$ .

Et pourtant,  $n = 100$  n’a plus aucune décomposition dans cet ensemble.

Pire : comme 3 est un “premier très utilisé” dans les petites sommes, sa disparition a aussi cassé  $n = 6, 8, 16, 22, 34, 40, 52, 70$  - des valeurs que je n’avais même pas ciblées.

### Où est l’erreur de raisonnement, précisément

Votre argument est : “C’est vrai pour tout ensemble de densité  $1/\ln n$ , donc en particulier pour les nombres premiers.”

Mais ce n’est pas ce que montre le modèle de Cramér. Ce qu’il montre, c’est : “Pour un ensemble tiré au hasard parmi ceux de densité  $1/\ln n$ , la probabilité d’échec tend vers 0” - c’est un énoncé sur la quasi-totalité des ensembles de cette densité (au sens probabiliste), pas sur tous, sans exception.

Et l’expérience ci-dessus le prouve de façon constructive : je viens de fabriquer, à la main, un contre-exemple explicite - un ensemble de densité  $1/\ln n$  qui échoue pour  $n = 100$ . Ce n’est pas hypothétique, il existe, je viens de le construire en 6 lignes. Donc l’énoncé “tout ensemble de densité  $1/\ln n$  a un centre” est faux tel quel - ce qui est vrai, c’est “presque tous” (au sens mesure/probabilité), ce qui laisse justement la place à des exceptions comme celle que je viens de fabriquer.

La vraie question devient alors : les nombres premiers sont-ils, oui ou non, l’un de ces cas excep-

tionnels (de mesure nulle)? Rien dans l'argument de densité ne permet de le savoir - c'est une information sur les nombres premiers eux-mêmes, pas sur leur densité. Or c'est précisément ce que dit l'obstruction de parité de Selberg : les nombres premiers ont une structure arithmétique fine (liée à leur comportement modulo les petits nombres premiers) qui les distingue des ensembles aléatoires de même densité - et cette structure fine est exactement ce qu'un argument "densité seule" ne peut pas voir, par construction.

### **Une analogie pour fixer l'intuition**

C'est comme dire : "presque tous les nombres réels sont irrationnels (au sens de la mesure de Lebesgue), donc  $\pi + e$  est irrationnel." C'est probablement vrai - mais personne ne l'a démontré, précisément parce que "presque tous" ne dit rien sur un nombre particulier et bien défini. Les nombres premiers jouent ici le rôle de  $\pi + e$  : un objet spécifique, structuré, qui pourrait très bien être l'exception plutôt que la règle - et seule une analyse de sa structure propre (pas de sa densité) peut trancher.

Votre intuition de départ (généraliser à partir de la densité) est le réflexe naturel et sain de tout probabiliste - c'est d'ailleurs exactement le réflexe qui a produit l'heuristique de Hardy-Littlewood. Mais une heuristique de densité, aussi convaincante soit-elle numériquement, ne devient une preuve que si on peut démontrer que les nombres premiers n'ont pas de "conspiration" cachée à l'échelle qui compte - et c'est exactement ce que personne ne sait faire depuis 1742.