Séminaire de topologie et géométrie différentielle

Jacques Feldbau

Sur la loi de composition entre éléments des groupes d'homotopie

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 2 (1958-1960), exp. n° 11, p. 0-17
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1958-1960__2__A11_0>

SEMINAIRE DE TOPOLOGIE
ET DE GEOMETRIE DIFFERENTIELLE
C. EHRESMANN
1960

SUR LA LOI DE COMPOSITION ENTRE ELEMENTS DES GROUPES D'HOMOTOPIE

par Jacques FELDBAU

PREFACE

par C. EHRESMANN

Ce mémoire a été rédigé par Jacques Feldbau en 1942. L'auteur l'a exposé dans mon Séminaire hebdomadaire de Topologie à l'Université de Strasbourg, repliée à Clermont-Ferrand pendant la guerre 1939-1945. Il pensait l'incorporer dans la Thèse de Doctorat qu'il était en train de préparer sur la Théorie des espaces fibrés et les problèmes d'homotopie. Il se proposait d'y développer aussi les résultats publiés d'une façon provisoire dans les articles suivants : J. Feldbau, Sur la classification des espaces fibrés, Comptes Rendus, 208, p. 1621, 1939. En collaboration avec C. Ehresmann : Sur les propriétés d'homotopie des espaces fibrés, Comptes Rendus, 212, p. 945-948, 1941. J. Feldbau (sous le nom de J. Laboureur) : Les structures fibrées sur la sphère et le problème du parallèlisme, Bull. Soc. Math. de France, 70, p. 181-186, 1941. J. Feldbau (sous le nom de J. Laboureur) : Propriétés Topologiques du groupe des automorphismes de la sphère S_n, Bull. Soc. Math. de France, 71, p. 206-211, 1943.

J. Feldbau a laissé son travail inachevé : en 1943, il a été arrêté et déporté en Allemagne où il est mort d'épuisement peu avant la fin de la guerre.

Le manuscrit du mémoire publié ici a été retrouvé en 1945 et j'ai eu l'occasion de le montrer en 1946 à J.H.C.Whitehead, qui avait publié en 1941 un article sur le même sujet, publication inaccessible à Clermont-Ferrand pendant la guerre. L'idée de la loi de composition, introduite par J.H.C.Whitehead, a été indiquée sommairement à J. Feldbau par A.Weil.

La plupart des résultats du mémoire de Feldbau se trouvent dans d'autres publications parues depuis 1941. Mais ce mémoire méritait d'être publié, même tardivement.

I. LOI DE COMPOSITION

ENTRE GROUPES D'HOMOTOPIE D'ORDRES QUELCONQUES.

1. Diagramme de Heegard d'une sphère S^{p+q-1}. Soient R^p, R^q deux espaces numériques rapportés aux coordonnées $x_q, \dots, x_p$ *resp.* $y_1, y_2, \dots, y_q$. Considérons les pavés W^p, W^q définis respectivement par : $(W^p)\quad 0 \leqslant x_i \leqslant 1 \quad (i = 1, 2, \dots, p)$

$$(W^q)\quad 0 \leqslant y_j \leqslant 1 \quad (j = 1, 2, \dots, q)$$

Soient Q^{p-1}, Q^{q-1} leurs frontières et $W^{p+q} = W^p \times W^q$ leur produit topologique ; si on suppose W^p, W^q munis d'une orientation, Q^{p-1}, Q^{q-1} munis de l'orientation induite, les éléments ainsi définis peuvent être considérés comme des chaînes, et l'on aura :

$$W^p \times W^q = (-1)^{pq} W^q \times W^p \qquad (1)$$

D'autre part, la frontière Q^{p+q-1} de W^{p+q} sera donnée par :

$$Q^{p+q-1} = Q^{p-1} \times W^q + (-1)^p W^p \times Q^{q-1} \qquad (2)$$

Q^{p+q-1} est homéomorphe à la sphère S^{p+q-1}.

Inversement, toute sphère topologique peut s'obtenir de la façon suivante : on forme l'espace somme topologique $Q^{p-1} \times W^q + W^p \times Q^{q-1}$, et on identifie les points représentant le même point de $Q^{p-1} \times Q^{q-1} = T^{p+q-2}$.

2. Définition de la loi de composition. Soit E un espace topologique pointé, c'est-à-dire qu'on a choisi une fois pour toutes un point fixe $z_0 \in E$. On considère l'ensemble des applications $f(W^p) \subset E$ telles que $f(Q^{p-1}) = z_0$.

Soit $[f]$ la classe d'homotopie de f modulo Q^{p-1} Elle définit un élément $c \in \pi_p(E)$ (on désignera toujours par $\pi_p(E)$ le $p^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de E en z_0.).

Considérons de même les applications $g(W^q) \subset E$ telles que $g(Q^{q-1}) = z_0$. La classe d'homotopie $[g]$ de g modulo Q^{q-1} définit un élément $d \in \pi_q(E)$.

Construisons une application ϕ de Q^{p+q-1} dans E de la façon suivante :

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } (x, y) \in W^p \times Q^{q-1} \\ g(y) & \text{si } (x, y) \in Q^{p-1} \times W^q \end{cases}$$

On aura, en particulier $\qquad \phi(T^{p+q-2}) = \{z_0\}$

Si f et g varient de façon homotope, *mod.* Q^{p-1} *resp.* Q^{q-1}, ϕ reste homotope à elle-même *mod.* T^{p+q-2}. Choisissons un point fixe $(x_0, y_0) \in T^{p+q-2}$.

La classe d'homotopie de ϕ modulo $x_0 \times y_0$ est bien déterminée, et ne dépend que de c et de d. Cette classe définit un élément $\lambda \in \pi_{p+q-1}(E)$, et nous poserons $\lambda = c \circ d$.

On a ainsi défini une loi de composition qui, à deux éléments c, d appartenant respectivement à $\pi_p(E)$, $\pi_q(E)$, associe un élément $c o d$ de $\pi_{p+q-1}(E)$.

3. Propriétés. a) LOI DE COMMUTATION.

On a immédiatement $$c o d = (-1)^{pq} d o c \qquad (3)$$
ce qui résulte de la formule (1).

b) CAS OU E EST UN ESPACE DE HOPF. Supposons que E soit définie une multiplication continue $(x, y) \to p(x, y)$ possédant un élément unité, que nous prendrons pour point z_0. Alors $\phi(x, y)$ est prolongeable à l'intérieur W^{p+q} de Q^{p+q-1}, car il suffit de poser $$\phi(x, y) = p[f(x), g(y)]$$

Donc, dans ce cas, la loi de composition est triviale et associe à tout couple $c \in \pi_p(E)$, $d \in \pi_q(E)$, l'élément 0 de $\pi_{p+q-1}(E)$.

4. Cas particuliers. Automorphisme de Whitehead.

a) Supposons $p = q = 1$. Alors W^p et W^q se réduisent tous deux en segment $(0, 1)$. Prenons $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Les éléments c, d, $c o d$ appartiennent au même groupe $\pi_1(E)$, (groupe fondamental de E) et on a immédiatement $c o d = c d c^{-1} d^{-1}$,
(en notant la multiplication dans $\pi_1(E)$ de gauche à droite.

En particulier, pour un espace de Hopf, *on voit que le groupe fondamental est abélien.* [2]

b) Whitehead [1] a montré que tout élément $\sigma \in \pi_1(E)$ définit un automorphisme du groupe $\pi_p(E)$ $(p > 1)$. On peut rattacher sa théorie à la loi de composition définie plus haut de la façon suivante : supposons σ défini par une application g du segment $W = [0, 1]$ dans E telle que $g(0) = g(1) = z_0$, $g(y) \in E$ pour $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Soit c un élément quelconque de $\pi_p(E)$, défini par une application $f(W^p) \subset E$ telle que $\psi(Q^{p-1}) = z_0$.

Le produit topologique $W^{p+1} = W^p \times W$ est un pavé à $p+1$ dimensions, dont la frontière est homéomorphe à S^p ; elle est la réunion de trois parties : $W^p \times \{0\}$, $W^p \times \{1\}$, $Q^{p-1} \times W$. Si on en retire le pavé $W^p \times \{0\}$, il reste un ensemble homéomorphe à un pavé W^p et qui est la réunion de $W^p \times \{1\}$ (base) et de $Q^{p-1} \times W$ (surface latérale). La frontière de $\widetilde{W}^p$ est $\widetilde{Q}^{p-1} = Q^{p-1} \times \{0\}$. On l'oriente comme Q^{p-1}, ce qui définit une orientation bien déterminée de $\widetilde{W}^p$ (ceci revient à définir sur la «base» $W^p \times \{1\}$ l'orientation induite par celle de W^p). Whitehead définit l'application suivante de $\widetilde{W}^p$ dans E :

$$\psi(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } (x, y) \in W^p \times \{1\} \\ g(y) & \text{si } (x, y) \in Q^{p-1} \times W. \end{cases}$$

Elle satisfait à $\psi(Q^{p-1}) = z_0$ et définit donc un élément de $\pi_p(E)$, que nous désignerons par $\mathfrak{M}_\sigma(C)$.

En particulier, si $p = 1$, on a immédiatement $\mathfrak{M}_\sigma(C) = \sigma c \sigma^{-1}$.

---

[1] Proc. London Math. Soc. (2) 1938, vol. 45, p. 243-327.

[2] Ce raisonnement est à rapprocher de celui de Hurewicz (Proc. Amsterdam 1936, p. 215-224, note 22) où on montre que le gr. fond. d'un espace de groupe est abélien, sans utiliser l'associativité du groupe.

D'autre part la frontière du pavé $W^{p+1} = W^p \times W$ est partagée en deux «hémisphères» W^p et $W^p \times \{0\}$. Si on oriente cette sphère S^p comme au n° 1 (diagramme de Heegard), l'hémisphère $\widetilde{W}^p$ sera munie de l'orientation contraire à celle qui nous a servi à définir $\mathfrak{M}_\sigma(c)$, quant à $W^p \times \{0\}$, elle sera orientée comme W^p.

Définissons alors le composé $c \circ \sigma$ au moyen de l'application ϕ suivante de S^p dans E:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } (x, y) \in W^p \times \{1\} \cup W^p \times \{0\} \\ g(y) & \text{si } (x, y) \in Q^{p-1} \times W \end{cases}$$

On aura immédiatement : $c \circ \sigma = c \cdot \mathfrak{M}_\sigma^{-1}(c)$ (4')

où, au second membre, figure le produit de Hurewicz.

Si $p = 1$, on retrouve bien $c \circ \sigma = c(\sigma c \sigma^{-1})^{-1} = c \sigma c^{-1} \sigma^{-1}$

Si $p > 1$ (cas abélien), on écrira $c \circ \sigma = c - \mathfrak{M}_\sigma(c)$ (4")

La correspondance $c \to \mathfrak{M}_\sigma(c)$ est évidemment un automorphisme de $\pi_p(E)$ sur lui-même et $\pi_1(E)$ apparaît ainsi comme un groupe d'automorphismes de $\pi_p(E)$. D'autre part l'application $\sigma \to \mathfrak{M}_\sigma$ est un homomorphisme de $\pi_1(E)$ dans le groupe des automorphismes de $\pi_p(E)$, c'est-à-dire qu'on a : $\mathfrak{M}_{\sigma\sigma'} = \mathfrak{M}_\sigma \mathfrak{M}_{\sigma'}$

Pour $p = 1$ cet homomorphisme n'est autre que l'homomorphisme de $\pi_1(E)$ dans le groupe des automorphismes intérieurs de $\pi_1(E)$.

Nous allons entreprendre maintenant l'étude de la distributivité de la loi de composition 0 par rapport à la loi de composition de Hurewitz, notée + dans le cas $p > 1$ et - dans le cas $p = 1$.

5. Distributivité. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_p(E)$, $\beta \in \pi_q(E)$; *on a, pour* $p > 1$, *les deux formules de distributivité :*

$$(\alpha_1 + \alpha_2) \circ \beta = \alpha_1 \circ \beta + \alpha_2 \circ \beta ; \qquad \beta \circ (\alpha_1 + \alpha_2) = \beta \circ \alpha_1 + \beta \circ \alpha_2 \tag{5}$$

En vertu de la loi de commutation (3), il suffit d'ailleurs de démontrer la première.

Supposons que α_1, α_2 et β soient représentés respectivement par les applications

$f_1(W^p) \subset E \qquad f_1(Q^{p-1}) = \{z_0\}$

$f_2(W^p) \subset E \qquad f_2(Q^{p-1}) = \{z_0\}$

$g(W^q) \subset E \qquad g(Q^{q-1}) = \{z_0\}$

Partageons le pavé W^p en deux parties :

W_1^p définie par $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2}$, W_2^p définie par $\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 1$, et posons :

$H_i^{p-1} = W_i^p \cap Q^{p-1} \qquad (i = 1, 2)$

$Q^{p-2} = H_1^{p-1} \cap H_2^{p-1}$

On choisira un point fixe (x_0, y_0) de Q^{p+q-1} (frontière de W^{p+q}) pour définir le groupe d'homotopie $\pi_{p+q-1}(E)$ dans lequel ont lieu les égalités (5), et on prendra de façon précise $(x_0, y_0) \in Q^{p-2} \times Q^{q-1}$. (C'est ici qu'intervient explicitement l'hypothèse $p > 1$)

Q^{p+q-1} est partagée en deux hémisphères : H_1^{p+q-1} $(0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{2})$ et H_2^{p+q-1} $(\frac{1}{2} \leqslant x_1 \leqslant 1)$, donné par $H_i^{p+q-1} = H_i^{p-1} \times W^q + (-1)^p W_i^p \times Q^{q-1}$ $(i = 1, 2)$

Construisons d'abord une application F de W^p dans E, telle que $F(Q^{p-1}) = z_0$, et qui définisse $\alpha_1 + \alpha_2$.

Il existe des applications f_1', f_2' de W^p dans E telles que :

$f_1' \equiv f_1 \ mod.\ Q^{p-1}$ et $f_1' \mid W_2^p = \{z_0\}$ de même $f_2' \equiv f_2 \ mod.\ Q^{p-1}$ et $f_2' \mid W_1^p = \{z_0\}$

Si on pose $F = \begin{cases} f_1' \ sur \ W_1^p \\ f_2' \ sur \ W_2^p \end{cases}$ F définit l'élément $\alpha_1 + \alpha_2$ de $\pi_p(E)$.

D'autre part $\alpha_1 o \beta$ et $\alpha_2 o \beta$ sont respectivement définis par les applications suivantes ϕ_1 et ϕ_2 de Q^{p+q-1} dans E :

$$\phi_1(x, y) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in W^p,\ y \in Q^{q-1} \\ g(y) & \text{si } x \in Q^{p-1},\ y \in W^q \end{cases} \qquad \phi_2(x, y) = \begin{cases} f_2(x) & \text{si } x \in W^p,\ y \in Q^{q-1} \\ g(y) & \text{si } x \in Q^{q-1},\ y \in W^q \end{cases}$$

Si on remplace f_1 et f_2 par les f_1', f_2' on aura des applications ϕ_1', ϕ_2' homotopes respectivement à ϕ_1, ϕ_2 module $Q^{p-1} \times Q^{q-1}$ et définissant par conséquent les mêmes éléments $\alpha_1 o \beta$, $\alpha_2 o \beta$; soit donc

$$\phi_1'(x, y) = \begin{cases} f_1'(x), \text{ si } (x, y) \in W^p \times Q^{q-1} \\ g(y), \text{ si } (x, y) \in Q^{p-1} \times W^q \end{cases} \qquad \phi_2'(x, y) = \begin{cases} f_2'(x), \text{ si } (x, y) \in W^p \times Q^{q-1} \\ g(y), \text{ si } (x, y) \in Q^{p-1} \times W^q \end{cases}$$

On a :

$$\phi_1' \mid H_2^{p+q-1} = \begin{cases} z_0, \text{ si } (x, y) \in W_2^p \times Q^{q-1} \\ g(y), \text{ si } (x, y) \in H_2^{p-1} \times W^q \end{cases}$$

$$\phi_2' \mid H_1^{p+q-1} = \begin{cases} z_0, \text{ si } (x, y) \in W_1^p \times Q^{q-1} \\ g(y), \text{ si } (x, y) \in H_1^{p-1} \times W^q \end{cases}$$

Soit r la symétrie $x_1 \to 1 - x_1$; on a donc $\phi_2' \mid H_1^{p+q-1} = \phi_1 \ or \mid H_1^{p+q-1}$.

Cela posé, on a $\phi_1' \mid H_2^{p+q-1} \equiv 0 \ mod.\ (x_0 \times y_0)$. Il existe donc une application $\phi_1'' \equiv \phi_1' mod.\ (x_0 \times y_0)$ telle que $\phi_1'' \mid H_2^{p+q-1} = z_0$.

Supposons la déformation définie par $\lambda(x, y, t)$, c'est-à-dire, en posant

$X = (x, y)$

$X_0 = (x_0, y_0)$

$\lambda(X, t)$ telle que : $\lambda(X, 0) = \phi_1'(x, y)$

$\lambda(X, 1) = \phi_1''(x, y)$

$\lambda(X, 1) = z_0$ si $X \in H_2^{p+q-1}$

On a de même $\lambda(X_0, t) = z_0$ quel que soit t.

$\phi_2' \mid H_1^{p+q-1} \equiv 0 \ mod.\ X_0$, d'où une application

$\phi_2'' \equiv \phi_2' \ mod.\ X_0$ avec $\phi_2'' \mid H_1^{p+q-1} = z_0$.

Si on désigne le transformé de X par r par $\overline{X} = r(x)$ et si on remarque que X_0 reste invariant par r (ici intervient le choix particulier de ce point X_0), on voit que la définition de ϕ_2' en ϕ_2'' peut s'obtenir comme suit : sur H_1^{p+q-1}, cette déformation peut être définie par $\mu(\overline{X}, t) = \lambda(\overline{X}, t))$ et on la prolonge ensuite sur Q^{p+q-1}.

Donc $\mu(X, t)$ est telle que
$$\mu(X, 0) = \phi_2'(x, y)$$
$$\mu(X, 1) = \phi_2''(x, y)$$
$$\mu(X, 1) = z_0 \text{ si } X \in H_1^{p+q-1}$$
$$\mu(X_0, t) = z_0 \text{ quel que soit } t.$$
et de plus
$$\mu(X, t) = \lambda(\bar{X}, t) \text{ si } X \in H_1^{p+q-1}$$

Considérons maintenant les applications suivantes Φ' et Φ'' de Q^{p+q-1} dans E.

$$\Phi'(x, y) = \begin{cases} F(x) & \text{sur } W^p \times Q^{q-1} \\ g(y) & \text{sur } Q^{p-1} \times W^q \end{cases}$$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} f_1' & \text{sur } W_1^p \times Q^{q-1} \\ f_2' & \text{sur } W_2^p \times Q^{q-1} \\ g & \text{sur } Q^{p-1} \times W^q \end{cases} \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{cases} \phi_1' & \text{sur } H_1^{p+q-1} \\ \phi_2' & \text{sur } H_2^{p+q-1} \end{cases}$$

$$\Phi''(x, y) = \begin{cases} \phi_1'' & \text{sur } H_1^{p+q-1} \\ \phi_2'' & \text{sur } H_2^{p+q-1} \end{cases}$$

Elles définissent respectivement les éléments $(\alpha_1 + \alpha_2)o\beta$ et $\alpha_1 o\beta + \alpha_2 o\beta$. Or elles sont homotopes par la déformation

$$\nu(x, t) = \begin{cases} \lambda(X, t) & \text{si } X \in H_1^{p+q-1} \\ \mu(X, t) & \text{si } X \in H_2^{p+q-1} \end{cases}$$

donc on a bien la relation (5).

REMARQUES. Si $q = 1$ on retrouve l'automorphisme de Whitehead. En effet,
$$(\alpha_1 + \alpha_2)o\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \mathfrak{M}_\beta(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$\alpha_1 o\beta + \alpha_2 o\beta = \alpha_1 + \alpha_2 - \mathfrak{M}_\beta(\alpha_1) - \mathfrak{M}_\beta(\alpha_2)$$
d'où
$$\mathfrak{M}_\beta(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathfrak{M}_\beta(\alpha_1) + \mathfrak{M}_\beta(\alpha_2)$$

Mais si $p = 1$ la propriété de distributivité n'est plus vraie, comme on le voit facilement en utilisant la formule (4").

On déduit de la propriété de distributivité, et de façon purement algébrique, que si O désigne la classe unité du groupe $\pi_p(E)$ ou $\pi_q(E)$, on a :
$$O o\alpha = \alpha o O = O$$

La loi de composition o peut admettre des diviseurs de zéro (par exemple, tout élément est diviseur de o si E est un espace de Hopf.)

On peut aussi remarquer que si $\pi_{p+q-1}(E)$ est cyclique, les groupes $\pi_p(E)$ et $\pi_q(E)$ forment une paire au sens de Pontrjagin. Par contre, ils ne sont pas toujours en dualité.

ANNULATEUR D'UN ELEMENT de π_p dans π_q. Soit $a(d_0)$ l'ensemble des $c \in \pi_p$ tels que $c o d_0 = 0$, d_0 étant un élément fixe de π_q.

Cet ensemble est un sous-groupe de π_p appelé annulateur de d_0 dans π_p.

Pour $p > 1$, ceci résulte de la distributivité
$$(c + c')o d_0 = c o d_0 + c' o d_0$$

Pour $p = 1$, on a : $d_0 o c = d_0 - \mathfrak{M}_c(d_0)$

Donc si $c o d_0 = o$, cela signifie que l'automorphisme de Whitehead associé à $c \in \pi_1$ laisse invariant l'élément d_0, c'est-à-dire $\mathfrak{M}_c(d_0) = d_0$

Mais si $\mathfrak{M}_c(d_0) = d_0$ et $\mathfrak{M}_{c'}(d_0) = d_0$,
on a encore : $\mathfrak{M}_{cc'}(d_0) = d_0$,
ce qui montre que $\alpha(d_0)$ est bien un groupe.

En particulier, si $p = q = 1$, $\alpha(d_0)$ est un sous-groupe du groupe fondamental π_1: c'est le centralisateur de d_0 (ensemble des éléments permutables avec d_0).

II. APPLICATIONS DU PRODUIT TOPOLOGIQUE $S^p \times S^q$ DANS E.

1. Disposition de $S^p \times S^q$ comme espace quotient de W^{p+q}. ($p > 1$, $q > 1$)

Désignons par x, x', y, y', respectivement les points de S^p, W^p, S^q, W^q.

On peut envisager $S^p(S^q)$ comme espace quotient de $W^p(W^q)$ par la relation d'équivalence qui identifie tous les points de $Q^{p-1}(Q^{q-1})$ en un point $x_0(y_0)$ de $S^p(S^q)$.

Soient ψ_1, ψ_2 les projections canoniques correspondantes, donc :

$$\psi_1(W^p) = S^p \qquad \psi_2(W^q) = S^q$$
$$\psi_1(Q^{p-1}) = x_0 \qquad \psi_2(Q^{q-1}) = y_0$$

Définissons une application $\flat$ de $W^p \times W^q$ sur $S^p \times S^q$ par

$$\flat(x', y') = (\psi_1(x'), \psi_2(y') = (x, y) \tag{6}$$

$\flat$ définit la relation d'équivalence ρ produit des relations d'équivalence (ψ_1) et (ψ_2), c'est-à-dire telle que : $(x'_1, y'_1) \equiv (x'_2, y'_2)$ *mod.* ρ

où $\begin{cases} x'_1 = x'_2 \\ y'_1 = y'_2 \end{cases}$ où $\begin{cases} x'_1 \text{ et } x'_2 \in Q^{p-1} \\ y'_1 = y'_2 \end{cases}$ où $\begin{cases} x'_1 = x'_2 \\ y'_1 \text{ et } y'_2 \in Q^{q-1} \end{cases}$ où $\begin{cases} x'_1 \text{ et } x'_2 \in Q^{p-1} \\ y'_1 \text{ et } y'_2 \in Q^{q-1} \end{cases}$

Ainsi, $S^p \times S^q$ peut être considéré comme espace quotient de $W^p \times W^q$ par ρ, la projection canonique correspondante étant $\flat$, définie par (6).

2. Etude des classes d'homotopie des applications de $S^p \times S^q$ dans E.

Soit Φ^* une application de $S^p \times S^q$ dans E telle que $\Phi^*(x_0, y_0) = z_0$.

Nous supposons toujours remplie cette condition et nous étudierons les classes d'homotopie des applications de $S^p \times S^q$ dans E module le point $x_0 \times y_0$ («classes liées»). D'après ce qui précède, on peut considérer Φ^* comme projection d'une application Φ de W^{p+q} dans E, c'est-à-dire qu'on aura $\Phi = \Phi^* \circ \flat$.

Il suffit de poser $\Phi(x', y') = \Phi^*(\psi_1(x'), \psi_2(x'))$

De même, si Φ^* varie de façon homotope *mod.* $x_0 \times y_0$, Φ variera de façon homotope module $Q^{p-1} \times Q^{q-1}$.

Il suffira donc dans la suite de considérer des applications de $W^p \times W^q$ dans E satisfaisant aux conditions suivantes (on supprime les accents pour désigner les points de W^p ou W^q).

$$(7) \quad \begin{cases} \Phi(x, Q^{q-1}) = f(x) & (\textit{ne dépend que de } x \in W^p) \\ \Phi(Q^{p-1}, y) = g(y) & (\textit{ne dépend que de } y \in W^q) \\ \Phi(Q^{p-1}, Q^{q-1}) = z_0 \end{cases}$$

On peut remarquer que ces conditions ne portent que sur la restriction ϕ de Φ à Q^{p+q-1}.

$f(x)$ et $g(y)$ définissent respectivement des éléments $c \in \pi_p(E)$. $d \in \pi_q(E)$, qui restent invariants quand Φ varie de façon homotope module $Q^{p-1} \times Q^{q-1}$.

D'autre part, on a $c\,o\,d = o$ (on dira que ces éléments sont «orthogonaux»), car en composant f et g, on retrouve l'application ϕ de Q^{p+q-1} dans E et celle-ci est prolongeable à $W^p \times W^q$.

Réciproquement, soient c, d, un couple d'éléments «orthogonaux» de $\pi_p(E)$ *resp.* $\pi_q(E)$. Représentons-les par les applications f et g telles que

$$f(W^p) \subset E,\ f(Q^{p-1}) = z_0 \text{ et } g(W^q) \subset E,\ g(Q^{q-1}) = z_0$$

Alors $c\,o\,d$ est définie par l'application ϕ de Q^{p+q-1} dans E donnée par:

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } y \in Q^{q-1} \\ g(y) & \text{si } x \in Q^{p-1} \end{cases}$$

qui admet par hypothèse un prolongement Φ à $W^p \times W^q$. Cette application Φ satisfait évidemment aux conditions (7) (puisque ϕ y satisfait) et définit par conséquent une application ϕ^* de $S^p \times S^q$ dans E amenant le point $x_0 \times y_0$ sur z_0.

Mais la classe d'homotopie *mod.* $Q^{p-1} \times Q^{q-1}$ de cette application n'est pas déterminée.

Supposons d'abord choisie une application particulière $\phi_0(Q^{p+q-1}) \subset E$ représentant la classe $c\,o\,d$ et soit Φ_0 un prolongement de ϕ_0 à W^{p+q} fixé pour le moment. Soit ϕ un prolongement quelconque de ϕ_0 à W^{p+q} A l'aide du couple ϕ_0, ϕ d'applications de W^{p+q} dans E, on peut définir, d'après Eilenberg [2], une application (ϕ_0, ϕ) de la sphère S^{p+q} dans E. Pour cela, on représentera topologiquement les deux hémisphères de S^{p+q} sur W^{p+q} par des applications t_1, t_2 et on posera:

$$(\phi_0, \phi) = \phi_0 \circ t_1 \quad \text{sur un des hémisphères,}$$
$$(\phi_0, \phi) = \phi \circ t_2 \quad \text{sur l'autre.}$$

Soit $\alpha \in \pi_{p+q}(E)$ la classe d'homotopie de cette application (ϕ_0, ϕ). Elle ne dépend que des classes d'homotopie de ϕ_0, ϕ module Q^{p+q-1} et on a les propriétés suivantes :

1) $\alpha(\phi_0, \phi) = 0$ si et seulement si ϕ_0 est homotope à ϕ module Q^{p+q-1}.

2) $\alpha(\phi_0, \phi) = \alpha(\phi_0, \phi_1) + \alpha(\phi_1, \phi)$

3) $\alpha(\phi_0, \phi) = -\alpha(\phi, \phi_0)$

4) Etant donnés ϕ_0 et $\alpha \in \pi_{p+q}(E)$, il existe une application ϕ_1 de W^{p+q} coïncidant avec ϕ_0 sur Q^{p+q-1} et telle que $\alpha(\phi_0, \phi_1) = \alpha$.

Donc ϕ_0 et ϕ étant choisis, à chaque classe d'homotopie $[\phi]$ d'une application ϕ de W^{p+q} dans E correspond un élément $\alpha \in \pi_{p+q}(E)$ et cette correspondance est biunivoque.

Gardons le même ϕ_0 et prenons un autre prolongement ϕ_1. Soit ϕ_0 la classe de (ϕ_1, ϕ_0). A chaque application ϕ correspond maintenant de façon biunivoque un élément α_1 de $\pi_{p+q}(E)$ représenté par (ϕ_1, ϕ) et la relation 2) donne : $\alpha_1 = \alpha_0 + \alpha$.

---

[2] Annals of Math. (2) 41. 1940, p. 231-251, cf. § 8 (Eilenberg suppose que E est simple, ce qui est inutile ici d'après les conditions de liaison imposées aux applications ϕ).

Donc, ϕ_0 étant fixé, la correspondance biunivoque entre les classes des applications ϕ (se réduisent à ϕ_0 sur Q^{p+q-1}) et les éléments de $\pi_{p+q}(E)$, n'est définie qu'à une translation près de $\pi_{p+q}(E)$.

Supposons maintenant choisie une autre application $\phi_1(Q^{p+q-1}) \subset E$ représentant la classe $c\,o\,d$. Au prolongement Φ_0 de ϕ_0 correspond un prolongement Φ_1 de ϕ_1, homotope à Φ_0 module Q^{p+q-1} (car ϕ_0 et ϕ_1 sont homotopes).

La correspondance biunivoque entre classes $[\Phi]$ et éléments $\alpha \in \pi_{p+q}(E)$, définie au moyen du couple ϕ_1, Φ_1 est alors la même que celle définie au moyen du couple ϕ_0, Φ_0, puisque, ϕ_0 et ϕ_1 étant homotopes module Q^{p+q-1}, les applications (ϕ_0, Φ) et (ϕ_1, Φ) de S^{p+q} dans E sont homotopes.

L'ensemble $\mathfrak{E}$ des classes d'homotopie des applications de W^{p+q} dans E module $Q^{p+1} \times Q^{q-1}$ satisfaisant aux conditions (7) (ou encore, l'ensemble des classes d'homotopie des applications de $S^p \times S^q$ dans E module (x_0, y_0) qui lui est équipotent), est ainsi muni d'une structure que l'on peut étudier pour elle-même, à savoir une structure (non topologique) *d'ensemble fibré.*

3. Ensembles fibrés. - Hypergroupes fibrés. Soit $\mathfrak{E}$ un ensemble dans lequel est définie une relation d'équivalence ρ. Soit $B = \mathfrak{E}/\rho$ l'ensemble quotient, p la projection canonique de $\mathfrak{E}$ sur B.

Supposons que tous les ensembles $F_x = p^{-1}(x)$ $(x \in B)$ soient équipotents à un ensemble F. De façon plus précise, soit G un groupe de permutations de F. A chaque $x \in B$, faisons correspondre une famille L_x d'applications biunivoques de F_x sur F, telle que si $l_x, l'_x \in L_x$, on ait $l'_x\, l_x^{-1} \in G$. Soit $L = \{L_x\}$.

On dira que E est muni d'une structure fibrée de symbole $\mathfrak{E}(B, F, G, L)$. G est appelé groupe de structure.

CAS PARTICULIERS. a) Soit $\mathfrak{E}$ un groupe, F un sous-groupe et $B = \mathfrak{E}/F$ l'espace homogène correspondant. $\mathfrak{E}$ est fibré par F sur B. Le groupe de structure est un des groupes de translations de F.

b) Supposons que B est un groupe. On peut alors définir dans $\mathfrak{E}$ une loi de composition plurivoque qui en fait un hypergroupe.

Rappelons qu'on appelle hypergroupe un ensemble H d'éléments où est définie une loi de composition plurivoque qui associe à tout couple a, b d'éléments de H un sous-ensemble de H, noté ab, et vérifiant les axiomes $\alpha)$ *ab est non vide,*

$$\beta)\ aH = Ha = H$$

$$\gamma)\ (ab)c = a(bc)$$

De plus, on dit que l'hypergroupe est régulier s'il possède des éléments unités bilatères e, c'est-à-dire qu'on ait $a \in ea$, $a \in ae$ pour tout $a \in H$.
et si tout élément a a des inverses bilatères a^{-1} tels que

$$e \in aa^{-1}, \quad e \in a^{-1}a \quad \text{pour tout élément unité.}$$

Soit alors p l'application canonique de $\mathfrak{E}$ sur B. Posons :

$$a\,b = \dot{p}^{1}[\,p(a)\,p(b)\,] = F_{p(a)\,p(b)} \neq \phi$$

On vérifie aisément que, muni de cette loi de composition, $\mathfrak{E}$ est un hypergroupe régulier.

On constate aisément que, muni de cette loi de composition, $\mathfrak{E}$ n'est un groupe que si p est biunivoque, et alors $\mathfrak{E}$ est un groupe isomorphe à B, ou encore si B se réduit à son élément unité et si F est un groupe ; alors $\mathfrak{E}$ est un groupe isomorphe à F[3].

APPLICATION AUX CLASSES D'HOMOTOPIE DES APPLICATIONS DE $S^p \times S^q$ DANS E.

On peut maintenant caractériser entièrement l'ensemble $\mathfrak{E}$ étudié au n°2. C'est un ensemble fibré, la base étant le sous-ensemble B du produit direct $\pi_p(E) \times \pi_q(E)$, formé des éléments c, d orthogonaux ($c\,o\,d = 0$). La fibre est le groupe $\pi_{p+q}(E)$. Le groupe de structure est le groupe des translations de ce groupe $\pi_{p+q}(E)$.

4. Cas particuliers et exemples. CAS PARTICULIERS.

1) $\pi_{p+q-1}(E) = 0$, autrement dit $c\,o\,d = 0$ quels que soient $C \in \pi_p$, $d \in \pi_q$. B coïncide avec le groupe $\pi_p \times \pi_q$.

$\mathfrak{E}$ est dans ce cas un hypergroupe. A toute application $\phi(W^{p+q}) \subset E$ correspondent les éléments c, d qui sont des invariants de classes d'homotopie.

Soient deux classes $[\phi]$ d'invariants c, d et $[\phi']$ d'invariants c', d'. La loi de composition plurivoque dans $\mathfrak{E}$ associe à $[\phi]\,[\phi']$ l'ensemble des classes d'invariants $c + c'$, $d + d'$. Cet ensemble est en correspondance biunivoque avec $\pi_{p+q}(E)$. Il suffit d'en construire une application ψ particulière et de lui adjoindre ensuite toutes les applications de W^{p+q} dans E coïncidant avec ψ sur Q^{p+q-1}. Pour construire une application ψ particulière, il suffit de construire les applications f'',(g'') de $W^p(W^q)$ dans E, représentant respectivement les classes $c+c' \in \pi_p$ et $d+d' \in \pi_q$ et de les composer par la loi o, ce qui donne une application ψ de Q^{p+q-1} dans E, et on prolongera ensuite ψ à W^{p+q} d'où ψ.

2) $\pi_{p+q}(E) = 0$. Dans ce cas la fibre est réduite à un point, c'est-à-dire que le couple (c, d) d'éléments orthogonaux ($c\,o\,d = 0$) caractérise entièrement la classe d'homotopie de ϕ.

3) $\pi_{p+q-1}(E) = \pi_{p+q}(E) = 0$ < C'est le cas le plus important. Dans ce cas, la loi de composition définie dans le cas p est *univoque*.

$\mathfrak{E}$ est un groupe isomorphe à $\pi_p \times \pi_q$.

GENERALISATION. «CAS τ». Supposons que $\pi_p(E)$ et $\pi_q(E)$ soient *orthogonaux*, c'est-à-dire que $c\,o\,d = 0$ quels que soient $C \in \pi_p$, $d \in \pi_q$ (Condition «τ»). Cette condition est vérifiée entre autres, 1°) si E est un espace de Hopf,

2°) si $\pi_{p+q-1}(E) = 0$,

3°) si $\pi_p = 0$ ou $\pi_q = 0$.

---

[3] Si on suppose de plus que F est aussi un groupe, on peut définir dans E une structure de groupe, isomorphe à celle du produit direct $B \times F$. Ceci sera expliqué sur le cas particulier du n° 4 et aussi au n° 5 (groupe de Kerekjarto).

Dans ce cas, on peut définir une structure de groupe dans $\mathfrak{G}$ *qui en fasse un groupe isomorphe à* $\pi_p \times \pi_q \times \pi_{p+q}$.

Désignons en effet par $\alpha = (c, d)$ des éléments de $\pi_p \times \pi_q$. A tout $\alpha \in \pi_p \times \pi_q$ faisons correspondre une fois pour toutes une application Φ_α de W^{p+q} dans E satisfaisant aux conditions (7). Soit $\mathfrak{F}$ la famille des classes $[\phi_\alpha]$.

Cela posé, soit Φ une application quelconque de W^{p+q} dans E satisfaisant à (7). Il lui correspond d'abord un élément de $\alpha = (c, d)$ de $\pi_p \times \pi_q$. Désignons par ϕ_α, ϕ les restrictions de Φ_α, Φ à Q^{p+q-1}. ϕ et ϕ_α sont homotopes module $Q^{p-1} \times Q^{q-1}$. Mais ϕ est prolongeable à W^{p+q} et donne Φ. Il existe donc une application $\Phi(W^{p+q}) \subset E$ homotope à Φ et ayant même restriction à Q^{p+q-1} que Φ_α ; donc on peut composer Φ et Φ_α au sens d'Eilenberg. La classe d'homotopie de (Φ_α, Φ) (application de S^{p+q} dans E) est un élément λ de π_{p+q}, bien déterminé et qui ne dépend que des classes module $Q^{p-1} \times Q^{q-1}$ de Φ_α et Φ.

Donc à toute classe $[\Phi]$, on a fait correspondre un élément (α, λ) où (c, d, λ) de $\pi_p \times \pi_q \times \pi_{p+q}$. Soit T cette correspondance (elle dépend naturellement de $\mathfrak{F}$).

Réciproquement, soit (α, λ) un tel élément. D'après Eilenberg, il existe toujours une application $\overline{\Phi}$ de W^{p+q} dans E telle que sa restriction à Q^{p+q-1} coïncide avec Φ_α et que $(\Phi_\alpha \Phi)$ définisse précisément l'élément λ de π_{p+q}. Dans la correspondance T, à cette application Φ correspondra précisément l'élément (α, λ).

Enfin la correspondance T est biunivoque. Supposons que Φ et Φ' correspondent au même élément (α, λ). On a donc

$$[(\Phi_\alpha, \overline{\Phi})] = \lambda, \qquad [(\Phi_\alpha, \overline{\Phi'})] = \lambda.$$

Donc, d'après la propriété 2 du n° 2, $[(\Phi, \overline{\Phi'})] = 0$,

et, d'après la propriété 1: Φ et Φ' sont homotopes module Q^{p+q-1}.

Ainsi on a établi une correspondance biunivoque T de $\mathfrak{G}$ sur $\pi_p \times \pi_q \times \pi_{p+q}$, ce qu'il fallait démontrer.

Nous allons étudier des exemples où la condition τ sera vérifiée, c'est-à-dire où E est un groupe.

EXEMPLES. Rappelons que $\mathfrak{G}$ désigne toujours l'ensemble des classes d'homotopie *liées* de $S^p \times S^q$ dans E, c'est-à-dire où les applications ϕ sont assujetties à vérifier constamment la relation $\phi(x_o, y_o) = z_o$.

(Le problème se pose de savoir jusqu'à quel point cette condition est une restriction au point de vue de la puissance de l'ensemble $\mathfrak{G}$).

PREMIER GROUPE D'EXEMPLES : E EST LA SPHERE S^n.

Si $n = 1$, $p, q > 1$. $\pi_p = \pi_q = \pi_{p+q} = 0$.
On est dans le cas ρ et $\mathfrak{G}$ est réduit à un seul élément.

Si $n = p = q > 1$. On est encore dans le cas τ (d'ailleurs S^1 est un espace de groupe) et $\mathfrak{G}$ est isomorphe à Z, groupe cyclique infini.

Si $n = p = q = 1$, $\mathfrak{G}$ est isomorphe au produit direct $Z \times Z$.

Ainsi, *les applications (liées) de* $S^p \times S^q$ *dans* S^1 *sont inessentielles* $(p, q > 1)$. *Les applications liées de* $S^p \times S^1$ *dans* S^1 *forment un groupe cyclique infini* Z $(p > 1)$. *Les applications (liées) du tore* $S^1 \times S^1$ *dans la circonférence* S^1 *forment un groupe* $Z \times Z$.

Dans ce qui suit, on suppose $n > 1$.

$p + q < n$, donc $p < n$, $q < n$. On est dans le cas τ et $\mathfrak{G} = 0$.
Les applications liées de $S^p \times S^q$ *dans* S^n *sont inessentielles si* $p + q < n$.

$p + q = n$, donc $p < n$, $q < n$, $p + q - 1 < n$. On est dans le cas τ et $\mathfrak{G}$ est isomorphe à Z.

On peut préciser: dans ce cas, $S^p \times S^q$ et S^n sont des variétés de même dimension et toute application de $S^p \times S^q$ dans S^n a un degré topologique δ. Montrons [4] que: *il existe des applications de* $S^p \times S^q$ *dans* S^{p+q} *de degré quelconque et le degré caractérise entièrement la classe d'homotopie.*

En effet, soit ϕ une application de W^{p+q} dans S^{p+q}, constante sur la frontière Q^{p+q-1} de W^{p+q}, et de degré δ. On a donc une homologie:

$$\phi(W^{p+q}) \sim \delta S^{p+q}$$

Soit p la projection canonique de W^{p+q} sur $S^p \times S^q$ (n° 1) et $\phi^* = \phi \circ p^{-1}$, l'application correspondante de $S^p \times S^q$ dans S^{p+q}. On a: $\phi = \phi^* \circ p$. Mais $p(W^{p+q}) = S^p \times S^q$, donc

$$\phi^*(S^p \times S^q) \sim \delta S^{p+q}$$

ce qui montre que δ peut prendre toutes les valeurs.

D'autre part, si deux applications ϕ^*, ϕ'^* ont même degré, les applications correspondantes ϕ, ϕ' ont aussi même degré, donc sont homotopes, et il en est de même de ϕ^*, ϕ'^*, ce qu'il fallait démontrer.

$n < p+q < 2n$, L'un au moins des nombres p, q est $< n$.
Soit $q < n$, donc $\pi_q(S^n) = 0$. On est encore dans le cas ρ.
$\mathfrak{G}$ *est isomorphe au produit direct* $\pi_p(S^n) \times \pi_{p+q}(S^n)$.

Etudions des cas particuliers.

$p = n$, $q = 1$, $(n > 1)$. $\mathfrak{G} = Z \times Z$, si $n = 2$.
$\mathfrak{G} = Z \times Z_2$ si $n > 2$. Z_2 = groupe cyclique d'ordre 2.

$p = n$, $q = 2$, $(n > 2)$. $\mathfrak{G} = Z$.

$p = 2$, $q = 2$, $n = 2$. Voir ci-dessous.

$p = q = n$. Anticipant sur la suite (chap. III), admettons les résultats suivants
Soient c et d, deux éléments de $\pi_n(S^n)$.
Si n est impair, on a $c \circ d = o$ quels que soient c, d.
Si n est pair, $c \circ d = o$ est équivalent à $c = o$ ou $d = o$.

Donc *si* n *est impair*, on est dans le cas τ et $\mathfrak{G} = Z \times Z \times \pi_{2n}(S^n)$; en particulier $p = q = n = 1$, $\mathfrak{G} = Z \times Z$ (cf. plus haut).

Si n *est pair*, l'ensemble des couples c, d, orthogonaux, ne forme plus un groupe (par exemple, $(o, d) + (c, o) = (c, d)$ et $c \circ d \neq o$ si $c \neq o$ et $d \neq o$).

---

[4] Ce résultat est aussi une conséquence du théorème suivant de HOPF (sous la forme que lui a donnée Whitney) : il y a une correspondance biunivoque entre les classes d'application d'un complexe K^n à n dimensions dans une sphère S^n et les éléments du groupe de cohomologie d'ordre n de K^n.

Donc *si n est impair,* on est dans le cas τ et $\mathfrak{G} = Z \times Z \times \pi_{2n}(S^n)$; en particulier, $p = q = n = 1$, $\mathfrak{G} = Z \times Z$ (cf. plus haut).

Si n est pair, l'ensemble des couples c, d, orthogonaux, ne forme plus un groupe. (Par exemple, $(o, d) + (c, o) = (c, d)$ et $c \circ d \neq o$ si $c \neq o$ et $d \neq o$).

On est dans le cas τ. Tout ce qu'on peut dire est qu'*à toute classe liée d'applications de* $S^{2k} \times S^{2k}$ *sur* S^{2k} *correspond un couple* (c, o) *ou* (o, d), *c'est-à-dire en somme un nombre entier. Inversement, à tout couple* (c, o) *ou* (o, d) *correspondent autant de classes qu'il y a d'éléments dans* $\pi_{4k}(S^{2k})$ *(deux, si* $k = 1$*).*

DEUXIEME GROUPE D'EXEMPLES: E EST UN PRODUIT TOPOLOGIQUE DE SPHERE $S^m \times S^n$.

Supposons, pour fixer les idées, $p \geqslant q$, $m \geqslant n$.

Relativement au cas général où E est un produit topologique $E_1 \times E_2$, on peut faire les remarques suivantes : Soit $\phi(W^{p+q}) \subset E_1 \times E_2$ satisfaisant aux conditions (7). Elle définit deux éléments, $C \in \pi_p(E_1 \times E_2)$, $D \in \pi_q(E_1 \times E_2)$,

c'est-à-dire $C = (c, c')$, $D = (d, d')$ avec $c \in \pi_p(E_1)$, $c' \in \pi_q(E_2)$, $d \in \pi_p(E_1)$, $d' \in \pi_q(E_2)$.

On voit alors que $$(c, c') \circ (d, d') = (c \circ d, c' \circ d') \qquad (8)$$

Supposons alors :

$p + q < n$. Donc $p, q < m, n$. $\mathfrak{G}$ est un groupe réduit à 0.

Donc *les applications de* $S^p \times S^q$ *dans* $S^m \times S^n$ *sont inessentielles si* $p + q < m, n$.

$p + q = n < m$. Alors $p, q < n < m$. On est dans le cas ρ. $\mathfrak{G}$ est un groupe isomorphe à $\pi_{p+q}(S^m \times S^n) = \pi_{p+q}(S^n) = Z$.

$$\mathfrak{G} = Z.$$

$p + q = n = m$. Ici $\mathfrak{G} = Z \times Z$.

$n < p + q < 2n$. Alors $q < n$, $\pi_q(S^m \times S^n) = 0$. On est dans le cas ρ et

$$\mathfrak{G} = \pi_{p+q}(S^n) \times \pi_{p+q}(S^m) \times \pi_p(S^n) \times \pi_p(S^m)$$

Etudions des cas particuliers.

$p = m = n$, $q = 1$, $n > 2$. Les deux premiers groupes sont isomorphes à Z_2, les deux derniers, à Z, donc

$$\mathfrak{G} = Z_2 \times Z_2 \times Z \times Z.$$

$p = m = n = 2$, $q = 1$. Les quatre groupes sont isomorphes à Z.

$$\mathfrak{G} = Z \times Z \times Z \times Z.$$

$p = n = m$, $q = 2$, $n > 2$. Les deux premiers groupes sont nuls, les deux derniers isomorphes à Z.

$$\mathfrak{G} = Z \times Z.$$

$p = n = m - 1$, $q = 1$, $n > 2$. Le premier groupe est égal à Z_2, le second à Z, le troisième à Z, le quatrième est nul:

$$\mathfrak{G} = Z_2 \times Z \times Z.$$

$p = n = m-1$, $q = 1$, $n = 2$. $\mathfrak{G} = Z \times Z \times Z$.

$p = n = m-1$, $q = 2$, $n > 2$. $\mathfrak{G} = Z_2 \times Z$.

$p = n = m-2$, $q = 1$, $n > 2$. $\mathfrak{G} = Z_2 \times Z$.

$p = n = m-2 = 2$, $q = 1$. $\mathfrak{G} = Z \times Z$.

$p = n = m-2$, $q = 2$, $n > 2$. $\mathfrak{G} = Z \times Z$.

Etudions enfin le cas $p = q = m = n$, c'est-à-dire les applications du produit topologique $S^n \times S^n$ sur lui-même.

On est encore amené à distinguer deux cas, en tenant compte de la relation (8).

Si n est impair, on a toujours $(c, c') \circ (d, d') = 0$ et on est dans le cas τ.

$\mathfrak{G}$ est un groupe, produit direct de six groupes.

$$\mathfrak{G} = Z \times Z \times Z \times Z \times \pi_{2n}(S^n) \times \pi_{2n}(S^n).$$

En particulier, les classes d'applications du tore $S^1 \times S^1$ sur lui-même forment un groupe isomorphe à $Z \times Z \times Z \times Z$.

Si n est pair, $\mathfrak{G}$ n'est plus un groupe. On peut encore dire qu'*à toute classe liée d'applications ϕ de $S^n \times S^n$ dans lui-même correspond un ensemble de quatre entiers $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, l'un des deux premiers et l'un des deux derniers étant obligatoirement nul. Inversement, à chaque quadruple de tels nombres correspond un ensemble de classes $[\phi]$ équipotent à $\pi_{2n}(S^n) \times \pi_{2n}(S^n)$.* Ainsi, si $n = 2$, ce dernier ensemble a pour puissance 4.

TROISIEME EXEMPLE. *$E = P_k$ = espace projectif complexe à k dimensions complexes.*

Rappelons que $\pi_1(P_k) = o$, $\pi_2(P_k) = Z$, $\pi_n(P_k) = \pi_n(S^{2k+1})$, si $n > 2$.

Soit $p = q = 1$. $\pi_p = \pi_q = o$, $\pi_{p+q} = Z$, donc $\mathfrak{G} = Z$.

Les classes liées d'applications d'un tore dans P_k forment un groupe cyclique libre.

En particulier, si $k = 1$, on retrouve les applications du tore sur la sphère S^2 et leurs caractérisations par les degrés topologiques.

$p = 2$, $q = 1$. $\pi_p = Z$, $\pi_q = o$, $\pi_{p+q} = o$ si $k > 1$.

Les classes liées d'applications de $S^2 \times S^1$ dans P_k ($k > 1$) forment un groupe cyclique libre. On a $\pi_n(P_k) = o$ si $2 < n < 2k+1$, $(k > 1)$.

Supposons $p > 2$, $q > 2$, $p+q < 2k+1$. Alors π_p, π_q *et* $\pi_{p+q} = o$.

Toute application de $S^p \times S^q$ dans P_k telle que $p > 2$, $q > 2$, $p+q < 2k+1$ est inessentielle. (En particulier si $p = q = k > 2$)

Soit $p = 2$, $q = 2$, $k > 1$. Alors $\pi_{p+q-1}(P_k) = o$. On est dans le cas τ et $\mathfrak{G} = Z \times Z$, etc.

QUATRIEME EXEMPLE. *Applications d'un tore dans un espace E à groupe fondamental abélien.*

Pour un tel espace $\mathfrak{E}$, on a $c \circ d = c \, d \, c \, d = o$ quels que soient $c, d \in \pi_1(E)$.

La condition τ est donc vérifiée et l'ensemble $\mathfrak{G}$ des classes d'applications liées du tore dans E est isomorphe au groupe $\mathfrak{G} = \pi_1(E) \times \pi_1(E) \times \pi_2(E)$

Ainsi *il y a quatre classes d'applications d'un tore dans le groupe orthogonal Ω_{n+1} $(n > 1)$* car ici $\pi_1(\Omega_n) = Z_2$, $\pi_2(\Omega_n) = o$.

III. APPLICATIONS DE S^{2n-1} DANS S^n.

Nous nous bornerons à montrer comment la théorie précédente permet de retrouver et de préciser certains résultats de Hopf, Freudenthal, Eilenberg.

1. Historique.

a) Hopf [5] a défini pour les applications de S^{2n-1} dans S^n, un invariant d'homotopie γ (coefficient d'enlacement de deux cycles inverses) ; mais on ne sait pas si cet invariant caractérise entièrement la classe, autrement dit : pour que deux applications soient homotopes, il faut qu'elles aient même invariant γ. On sait seulement que cette condition est suffisante pour $n = 2$ (Pontrjagin [6]).

Relativement à cet invariant, Hopf a démontré les résultats suivants :

1° Si n est impair, γ est toujours nul et l'on ne sait pas s'il existe des applications essentielles de S^{2n-1} sur S^n.

2° Si n est pair, il existe une infinité de classes correspondant aux valeurs paires de γ.

3° Dans les trois cas $n = 2, 4, 8$, il existe des applications d'invariant $\gamma = 1$.

Freudenthal [7] a généralisé ceci en montrant qu'il existe des applications d'invariant $\gamma = 1$ pour toutes les valeurs paires de n.

b) Comme Hopf l'a montré, le problème précédent est en relation intime avec le suivant : étudier les types d'homologie des applications du produit topologique $S_1^r \times S_2^r$ dans S^r. Le type d'homologie d'une telle application est caractérisé par un couple d'entiers (C_1, C_2) que nous pouvons considérer comme des éléments de $\pi_r(S^r)$.

Hopf a montré (loc. cit. [5]) que s'il existe une application de $S_1^r \times S_2^r$ dans S^r, de type (C_1, C_2), il existe aussi une application de S^{2r+1} dans S^{r+1} d'invariant $\gamma = C_1 C_2$. Donc :

1°) Si r est pair, les seuls types possibles sont les types triviaux $(C, 0)$ et $(0, C)$, et ceux-ci existent effectivement, ce qui est évident.

2°) Si r est impair, Hopf a montré l'existence du type $(1, 2)$, ce qui entraîne immédiatement le résultat a) 2° plus haut.

3°) Dans le cas $r = 1, 3, 7$, il existe des types quelconques, donc aussi le type $(1, 1)$. Ce résultat semble indiquer une influence de la parallélisabilité de S^r; mais Filenberg (8)

---

[5] Fundamenta Mathematicae 25 (1935), p. 427 - 440.

[6] C. R. AC. SC. URSS., t. XIX (3), (1938) p. 147 - 149.

[7] Indigationes mathematical 1, (1939), p. 23 - 24 ou Proceed. Akad. Wetenschapen te Amsterdam XIII (1939), p. 139 - 140.

a montré que pour toutes les valeurs impaires de r, le type $(1, 1)$ existait. Ce qui entraîne d'ailleurs le résultat de Freudenthal mentionné plus haut.

La théorie d'Eilenberg semble introduire des notions d'homologie et de topologie combinatoire assez étrangères au sujet. Aussi peut-il sembler intéressant de démontrer, comme application de la théorie générale exposée au Chap. II, le résultat suivant, intermédiaire (éventuellement) entre le résultat particulier (3°) de Hopf, et le résultat général d'Eilenberg.

THEOREME A. *Si S^r est parallélisable, il existe des applications de $S_1^r \times S_2^r$ dans S^r de type quelconque.* Voir la démonstration plus loin.

En ce qui concerne les applications de S^{2n-1} dans S^n, il est naturel de se demander si on peut toutes les engendrer en composant, par la loi o, deux applications de S^n dans S^n. Je ne connais pas la réponse à cette question, mais on peut donner quelques résultats se rapprochant de ceux de Hopf dans cet ordre d'idées. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2. Composition d'éléments de $\pi_n(S^n)$ par l'opération o. Une classe d'homotopie d'une application de S^n sur S^n est caractérisée par son degré c. Nous désignerons par C l'élément correspondant de $\pi_n(S^n) = Z$. En vertu de la distributivité de la loi de composition, on peut écrire $C \circ D = cd(1 \circ 1)$

La loi de commutation donne d'autre part,

$$1 \circ 1 = (-1)^n (1 \circ 1)$$

donc, si n est impair, $$2(1 \circ 1) = 0. \qquad (1)$$

Or d'après le Chap. II, on peut dire que *pour qu'il existe une application de $S_1^n \times S_2^n$ dans S^n de type (c_1, c_2), il faut et il suffit que* $C_1 \circ C_2 = 0$.

D'où : *il existe des applications de type (2, 1) pour n impair* (cf. Hopf, § 1, b) 2°).

Il semble plus difficile de démontrer directement que $1 \circ 1 = 0$ pour n impair, ce qui équivaut au résultat d'Eilenberg. Nous admettrons donc ce résultat d'après Eilenberg :

$$1 \circ 1 = 0, \text{ pour } n \text{ impair.} \qquad (2)$$

Si n est pair, on sait (§1, b, 1°) que les seuls types possibles sont (o, c) et (c, o). *Donc, si n est pair et si $C_1 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, on a $C_1 \circ C_2 \neq 0$.*

On en déduit que $1 \circ 1 \neq 0$ et qu'il existe une infinité de classes d'applications de S^{2n-1} dans S^n de la forme $C_1 \circ C_2$, et que les relations $C_1 \circ C_2 = C_1' \circ C_2'$ et $c_1 c_2 = c_1' c_2'$ sont équivalentes.

D'ailleurs, l'ensemble des applications de S^{2n-1} dans S^n de la forme $C_1 \circ C_2$ forme un groupe cyclique infini.

3. Démonstration du théorème A. Soit Λ_{n+1} le groupe des rotations de S^n. A toute application $x \to \omega_x$ de S^n dans Λ_{n+1} correspond une projection $x \to \omega_x(x_0)$ qui est une application de S^n dans S^n.

---

[8] Annals of Math. (2) 41, 1940, p. 662-673, cité dans Math. Review 2, n° 3, Mars 1941.

Soit Z_n le groupe des nombres entiers qui sont degrés d'applications de S^n dans S^n, obtenues comme projections d'applications de S^n dans Λ_{n+1}. On a les résultats suivants

$$Z_n = 0, \quad \text{si } n \text{ est pair;}$$
$$Z_n = 2Z, \quad \text{si } S^n \text{ n'est pas parallélisable } (n \text{ impair});$$
$$Z_n = Z \quad \text{si } S^n \text{ est parallélisable, } \quad (n \text{ impair}).$$

D'autre part, soit $\mathfrak{A}_n$ l'annulateur de 1 pour la loi o, c'est-à-dire l'ensemble des entiers δ tels que $1 o \delta = 0$.

C'est un groupe. Le théorème A résultera alors de la relation

$$Z_n \subset \mathfrak{A}_n \tag{3}$$

qui entraîne que, pour S^n parallélisable, $\mathfrak{A}_n = Z$, donc $1 o 1 = 0$.

Démontrons donc (3). Il faut montrer que $d \in Z_n$ entraîne $d o \delta = 0$, quel que soit δ.

Soient deux boules B_1^n, B_2^n, de frontières S_1^{n-1} et S_2^{n-1}, et une sphère S^n pointée en Z_0. Soit Λ_{n+1} le groupe des rotations de S^n.

Par hypothèse, il existe une application $x \to \omega_x$ ($x \in B_1^n$, $\omega_x \in \Lambda_{n+1}$ et $\omega_x = \mathrm{I}$ (identité) si $x \in S_1^{n-1}$) telle que l'application de B_1^n dans S^n donnée par $x \to f(x) = \omega_x(Z_0)$ soit de degré d.

D'autre part, supposons donnée une application de B_2^n dans S^n de degré δ,

$$y \to g(y) \quad \text{avec } y \in B_1^n,\ g(y) \in S^n \text{ et } g(S_1^{n-1}) = Z_0.$$

Alors $d o \delta$ est définie par l'application

$$\phi(x, y) = \begin{cases} f(x) = \omega_x(Z_0) & \text{si } x \in B_1^n,\ y \in S_2^{n-1} \\ g(z) & \text{si } x \in S_1^{n-1},\ y \in B_2^n \end{cases}$$

de $S^{2n-1} = (B_1^n \times S_2^{n-1}) \cup (S_1^{n-1} \times B_2^n)$ dans S^n.

Mais $\phi(x, y)$ est prolongeable à $B_1^n \times B_2^n$; il suffit de poser $\phi(x, y) = \omega_x[g(y)]$ ce qui montre que $d o \delta = 0$. C.Q.F.D.

REMARQUE. Les résultats n° 2 (qui font intervenir les résultats de Hopf et d'Eilenberg) permettent de donner $\mathfrak{A}_n$ explicitement : $\mathfrak{A}_n = 0$ si n est pair,

$\mathfrak{A}_n = Z$ si n est impair.

IV. GROUPES DE KEREKJARTO.

Considérons une application g_0 de W^q dans E, appliquant Q^{q-1} sur z_0, et soit d_0 l'élément correspondant de π_q. Considérons les sous-ensembles $k(d_0)$ de $\mathfrak{M}$ formés par les classes liées d'applications de $W^p \times W^q$ dans E dont les traces sont les couples (c, d_0) où d_0 est fixe, et où c parcourt l'annulateur $\mathfrak{A}(d_0)$ de d_0 dans π_p. Les applications considérées satisfont donc aux conditions (1) où $g(y)$ doit être remplacée par l'application fixe $g_0(y)$. Grâce à cette restriction, on peut définir le produit de deux applications ϕ_1, ϕ_2, comme étant l'application ϕ donnée par

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \phi_1(2x_1, x_2, \dots, y_q) & \text{si } 0 \leqq x_1 \leqq \frac{1}{2} \\ \phi_2(2x_1 - 1, x_2, \dots, y_q) & \text{si } \frac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1. \end{cases}$$

Ce produit est compatible avec la répartition des applications en classes d'homotopie liées, et fait par conséquent de $k(d_0)$ un groupe, que nous appellerons *groupe de Kerekjarto* [9]. Ce groupe est abélien pour $p > 1$.

*L'*application qui à un élément de $k(d_0)$ fait correspondre la première composante c de sa trace (c, d_0) est un homomorphisme de $k(d_0)$ sur $\mathfrak{A}(d_0)$. Le noyau de cet homomorphisme est un groupe isomorphe à π_{p+q}, ce qui donne l'isomorphisme

$$k(d_0) / \pi_{p+q} = \mathfrak{A}(d_0)$$

Considérons en particulier le groupe $k(o)$. Ses éléments peuvent être considérés comme les classes modulo $(x_0\ y_0)$ des applications de $S^p \times S^q$ dans E qui appliquent le «méridien» fixe $x_0 \times S^q$ sur le point z_0 de E. On a dans ce cas l'isomorphisme

$$k(o) / \pi_{p+q} = \pi_p$$

Dans le cas $p > 1$, on peut préciser, en montrant que $k(o)$ est un produit direct :

$$k(o) = \pi_{p+q} \times \pi_q$$

Ce résultat s'appuie sur l'énoncé général que voici : Soit G un groupe, H un sous-groupe distingué de G, et $B = G/H$, le groupe quotient. On appelle *centralisateur de H dans G*, l'ensemble des éléments de G permutables avec chaque élément de H ; c'est un sous-groupe de G.

Une section algébrique de G suivant H (ou système de représentants de B dans G) est une famille d'éléments ϕ_α de G (α parcourant B) telle que $\phi_\alpha \phi_\beta = \phi_{\alpha\beta}$ et telle que l'homorphisme canonique de G sur B applique ϕ_α sur α.

Cela posé, *pour que G soit produit direct de B par H,* il faut et il suffit

1°) qu'il existe une section algébrique de G suivant H.

2°) que cette section soit contenue dans le centralisateur de H dans G.

En particulier, si G est abélien, la condition *2°)* est superflue.

---

[9] La définition de ces groupes (pour $p = q = 1$) a été esquissée par Kerekjarto dans sa topologie. (Introduction p. 11 - 14).