

## Le Journal mathématique de Gauss. Traduction française annotée

Paul Eymard, J.P. Lafon

---

**Citer ce document / Cite this document :**

Eymard Paul, Lafon J.P. Le Journal mathématique de Gauss. Traduction française annotée . In: Revue d'histoire des sciences et de leurs applications, tome 9, n°1, 1956. pp. 21-51;

doi : <https://doi.org/10.3406/rhs.1956.4346>

[https://www.persee.fr/doc/rhs\\_0048-7996\\_1956\\_num\\_9\\_1\\_4346](https://www.persee.fr/doc/rhs_0048-7996_1956_num_9_1_4346)

---

Fichier pdf généré le 07/04/2018

# Le Journal mathématique de Gauss

TRADUCTION FRANÇAISE ANNOTÉE

---

Le 30 mars 1796, à l'âge de 19 ans, le jeune Gauss, qui hésitait entre la philologie et les mathématiques, résoud le problème de la construction des polygones réguliers. Son choix est fait. Ce même jour il fait de cette découverte la première note d'un journal mathématique, où pendant dix-huit ans il consignera en 146 énoncés extrêmement brefs les résultats de ses travaux. L'original est un petit cahier de vingt pages en latin ; publié pour la première fois avec quelques explications par les soins de Félix Klein (1), il parut dans le volume X des œuvres de Gauss (2) en 1917 avec des commentaires détaillés des mathématiciens Bachmann, Brendel, Dedekind, Klein, Lœwy, Schlesinger et Stäckel.

L'intérêt scientifique et historique de ce document est incontestable. Il nous donne une vue intime du mathématicien saisi sur le vif dans ses méthodes de travail. A plusieurs reprises nous le voyons découvrir d'importants théorèmes par des essais numériques et provoquer l'heureuse rencontre des chiffres, forçant ensuite la démonstration rigoureuse par une recherche de plusieurs mois (3). Le lent mûrissement de notions presque toutes possédées avant l'âge de 22 ans, la continuité dans les recherches et la généralisation incessante apparaissent tout au long du journal ; qu'on consulte par exemple les notes se rapportant au « théorème d'or » (ou loi de réciprocity quadratique) et aux fonctions lemniscatiques et elliptiques. Souvent telle ou telle démonstration qualifiée de nouvelle est en fait

(1) *Math. Annalen*, 57, 1903, p. 1.

(2) *Gauss Werke*, t. X, fasc. 1, TEURNER, Leipzig, 1917 pp. 483-sq.

(3) Voir les nos 63 et 92 ; 91 a et 92 ; 98 et 100 ; 39 et 67.

la première démonstration correcte de la question. Dans les premières années surtout, à côté de remarques géniales, on trouve parfois des petites difficultés qui rebutaient encore l'étudiant (1) ; mais bientôt seul l'essentiel est noté, si bien que, pendant les quatre années (1801-1804) de calculs astronomiques sur Cérés (2), rien n'est cité au *Journal*.

Gauss, qui aimait la rigueur et la perfection, publiait fort peu et fort tard ; aussi le *Journal* est-il précieux pour établir la date et l'authenticité de certaines découvertes ; c'est ainsi qu'il permet d'affirmer (3) que, trente ans avant la publication du mémoire d'Abel, Gauss était le seul à connaître, sans les publier, l'essentiel des propriétés des fonctions elliptiques, notamment la double périodicité.

Cette concision se retrouve dans les notes du *Journal*, qu'il n'a pas toujours été possible d'expliquer (4). Pour les quelques commentaires très brefs qui accompagnent cette traduction, on s'est beaucoup inspiré de ceux de l'édition des œuvres complètes. On s'est efforcé de relier certaines notes entre elles, d'examiner les sources qui avaient pu inspirer notre auteur et les prolongements qu'eurent les découvertes citées ; enfin des références bibliographiques aux *Œuvres complètes* (Référence : *Gauss*, n° du vol., pp.) ou aux *Disquisitiones Arithmeticae* (Référence : *D.A.*) (5) essayent de replacer les notes du *Journal* dans l'ensemble des œuvres publiées ou manuscrites de Gauss.

Le texte qui suit est la traduction française des 146 notes contenues dans le *Journal*. Les numéros (entre crochets) ont été introduits par Félix Klein. Les commentaires imprimés en petits caractères sont placés à la suite des passages correspondant du *Journal*. Une table analytique par matières des différents passages, permet de retrouver aisément les textes se rapportant à des sujets déterminés (6).

(1) Voir les n°s 6, 21, 28, 81.

(2) « Cérés a été un malheur pour les mathématiques » (E. T. Bell).

(3) Voir les n°s 60 et 95.

(4) Voir les n°s 3, 42, 43, 90.

(5) Traduites sous le titre : *Recherches Arithmétiques* par A. C. M. POULLET-DELISLE, Paris, 1807 ; réédition photographique, Blanchard, Paris, 1953.

(6) Nous devons remercier ici M. P. Dubreil qui nous a donné la possibilité d'effectuer cette première traduction française du *Journal* de Gauss dans le cadre des travaux collectifs du C.N.R.S.

## TEXTE DU « JOURNAL »

- [1] Principes sur lesquels reposent la division du cercle et sa divisibilité géométrique en 17 parties, etc....

30-3-1796, *Brunswick*.

Gauss donne la valeur de  $\cos \frac{\pi}{17}$  dans l'article 365 des *D.A.* avec des rappels historiques sur la division du cercle en  $n$  parties égales au moyen de la règle et du compas. Il indique, si  $n$  premier n'est pas de la forme  $2^{2^p} + 1$  :

« Nous pouvons démontrer en toute rigueur que ces équations (de degré  $> 2$ ) ne sauraient en aucune manière être évitées ni abaissées... ».

Cette découverte de la construction du polygone régulier à 17 côtés fut un facteur essentiel de la décision de Gauss de consacrer sa vie à la Mathématique.

Cf. Lettre à Gerling du 6-6-1819.

- [2] En possession de la démonstration que tous les nombres ne peuvent être résidus quadratiques de nombres premiers plus petits qu'eux.

8-4-1796, *Brunswick*.

Gauss connaissait ce théorème en mars 1795 (art. 96 des *D.A.*) quand il trouva le théorème fondamental par induction. Il y a donc une erreur dans le journal et le théorème envisagé est sans doute celui de l'article 130 des *D.A.* daté effectivement du 8-4-1796 et obtenu après une année de travail :

« Il existe au moins un nombre premier  $p' < p = 4n + 1$  tel que  $p$  ne soit pas reste de  $p'$ . »

Dans l'article 131 des *D.A.*, figure la première des 6 démonstrations de la loi de réciprocité quadratique.

- [3] Les formules donnant les cosinus des angles sous-multiples de la circonférence n'admettent pas d'expression plus générale, si ce n'est en deux périodes.

12-4-1796, *Brunswick*.

- [4] Extension de la norme des résidus à des résidus et grandeurs non premiers entre eux.

29-4-1796, *Göttingen*.

Loi de réciprocité quadratique généralisée (art. 133 des *D.A.*).

- [5] Nombres à décomposition multiple en deux premiers.

14-5-1796, *Göttingen*.

Théorème non démontré, conjecturé par Goldbach, que tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. Waring dans ses *Meditationes Algebraicae* ajoute que tout nombre impair est la somme de trois nombres premiers, théorème démontré par Vinogradov (1937). Cf. : lettres de Goldbach et Euler des 7 et 30-6-1742. VINOGRADOV, *The methods of trigonometrical sums in the theory of numbers*, 1947.

- [6] Les coefficients de l'équation s'obtiennent facilement à partir des sommes des puissances des racines.

23-5-1796, *Göttingen*.

Voir note 28.

- [7] Transformation de la série  $1 - 2 + 8 - 64 + \dots$  en la fraction continue :

$$\frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{2}{1 + \frac{8}{1 + \frac{12}{1 + \frac{32}{1 + \frac{56}{1 + 128\dots}}}}}}}$$

$$1 - 1 + 1.3 = 1.3.7 + 1.3.7.15 + \dots = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{2}{1 + \frac{6}{1 + \frac{12}{1 + 28\dots}}}}}$$

et d'autres.

24-5-1796, Göttingen.

Ces séries et fractions continues sont divergentes. Gauss connaît ces questions par le « De seriebus divergentibus » d'Euler. C. f. STIELTJES : « Recherches sur les fractions continues » (*Ann. Fac. Toulouse*, 1894).

- [8] Dans les séries récurrentes, l'échelle simple est une fonction des échelles des composantes d'ordre deux. 26-5-1796.

Voir note 10.

- [9] Comparaison à l'infini des contenus en nombres premiers et composés. 31-5-1796, Göttingen.

Cf. : *Tafeln* de SCHULZE ; *Gauss*, X, pp. 11-12.

- [10] Échelle où les termes de la série sont des fonctions des termes de séries en nombre quelconque. 3-6-1796, Göttingen.

Voir aussi les notes 8 et 20. Soit  $G(x)$  un polygone de degré  $\leq n - 1$  et développons en série entière :

$$(1) \quad \frac{G(x)}{1 - a_1x - a_2x^2 - \dots - a_nx^n} = s_0 + s_1x + \dots + s_nx^n + \dots;$$

On a :

$$s_{n+t} = a_1s_{n+t-1} - a_2s_{n+t-2} + \dots + a_ns_t \quad (t = 0, 1, 2, \dots)$$

De Moivre nommait « récurrente » une telle série et appelait la suite  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  « l'échelle » de la série. Gauss décompose le dénominateur de (1) en facteurs et étudie les relations entre les échelles de (1) et les échelles relatives aux facteurs.

Cf. DE MOIVRE, *Miscelleana analytica de seriebus et quadraturis...*, Londres, 1730, p. 27 ; *Gauss*, X p. 393.

- [11] Formule pour la somme des diviseurs d'un nombre quelconque.  
facteur général  $\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ . 5-6-1796, Göttingen.

Si  $N = \Pi a^n$ , la somme des diviseurs de  $N$  est  $\Pi \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ .

- [12] Somme des périodes pour des éléments donnés, tous les nombres étant pris selon un module, facteur général  $[(n + 1) a - na] a^{n-1}$ .  
5-6-1796, Göttingen.

« Selon un module » signifie « modulo un nombre premier ». La forme étrange donnée au facteur général semble indiquer qu'il y a une erreur. Bachmann suppose qu'il faut lire :  $[(n + 1) a - na] a^{n-1}$  et donne au mot période un sens différent de celui donné dans les *D.A.* mais qui conduit effectivement à cette expression.

- [13] Lois de distribution. 19-6-1796, Göttingen.

Voir note 9.

- [14] Somme des diviseurs = à l'infini  $\frac{\pi^2}{6}$  fois la somme des nombres.  
20-6-1796, Göttingen.

- [15] J'ai commencé à réfléchir aux multiplicateurs connexes (dans les formes de diviseurs de formes quadratiques).  
22-6-1796, Göttingen.

Cf. « Sur les formes et équations indéterminées du second degré », section 5 des *D.A.* où sont définis : multiplicateurs connexes et formes de diviseurs.

- [16] Nouvelle démonstration du théorème d'or a priori totalement différente et qui ne manque pas d'élégance. 27-6-1796.

Dans le manuscrit de Gauss de l'article 262 des *D.A.* la découverte des deux premières démonstrations de la loi de réciprocité quadratique est datée du 27-7, ce qui est infirmé par les notes 15-16-17.

En ce qui concerne la dénomination « théorème d'or » : « Uber Gauss Zahlentheoretische Arbeiten » *Gauss*, X, 2, pp. 44-45.

- [17] Toute décomposition d'un nombre en trois  $\square$  donne une forme séparable en trois  $\square$ . 3-7-1796.

$\square$  = carré.

Cf. : *D.A.* art. 280, « Uber Gauss Zahlen... », art. 12 ; *Gauss*, X, 2, pp. 29-30 ; *Leiste*, p. 18.

[18] Euréka ! nombre =  $\Delta + \Delta + \Delta$ . 10-7-1796, Göttingen.

Tout nombre est somme de trois nombres triangulaires, c. a. d. de la forme  $\frac{x(x+1)}{2}$ .

Si :

$$M = \frac{x(x+1)}{2} + \frac{y(y+1)}{2} + \frac{z(z+1)}{2}, \quad 8M + 3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2,$$

et réciproquement ; mais tout nombre de la forme  $8M + 3$  est décomposable en somme de trois carrés nécessairement impairs (voir note 17).

Cauchy a démontré plus généralement une conjecture de Fermat que tout nombre est la somme de  $n$  nombres  $n$ -gonaux.

[19] Détermination eulérienne des formes dans lesquelles sont contenus des nombres composés de plus d'un facteur.

*Juillet 1796, Göttingen.*

Se rapporte aux méthodes d'Euler pour reconnaître si un nombre donné de la forme  $4n + 1$  est premier. Les calculs correspondants se trouvent en maints endroits dans *Leiste*.

[20] Principes de la composition des échelles dans les séries récurrentes.

16-7-1796, Göttingen.

Voir note 10.

[21] Étendu à toutes les courbes la méthode d'Euler pour démontrer la relation entre les segments découpés par deux droites sécantes dans les sections coniques.

31-7-1796, Göttingen.

Soient  $OAB$ ,  $OA'B'$  deux sécantes menées par  $O$  à une conique ; quand  $O$  varie, les sécantes se déplaçant parallèlement à elles-mêmes, le rapport  $\frac{OA \times OB}{OA' \times OB'}$  est constant. Ce théorème d'Appolonius est démontré à nouveau par Euler, auquel n'échappent pas d'ailleurs les généralisations à des courbes d'ordre supérieur.

Cf. EULER, *Introductio in analysin infinitorum*, Lausanne, 1748, II, pp. 92-93 et 247.

[22]  $a^{2^n-1(p)} \equiv 1$ , toujours résoudre en puissance.

3-8-1796, Göttingen.

Si  $p$  premier est de la forme  $2^n \pm 1$ , Gauss affirme sans doute qu'il sait décomposer  $x^p - 1$  en ses facteurs premiers modulo un nombre premier.

Cf. *Analysis Residuorum*, Gauss, II, p. 229, pp. 199-211.

Le cas  $p = 31 = 2^5 - 1$  modulo 331 est traité p. 209.

[23] J'ai cherché comment il convenait d'obtenir une raison plus profonde du théorème d'or, et à cet effet je m'appête à essayer de dépasser les équations quadratiques. Découverte de formules qui peuvent toujours être scindées en considérant les nombres premiers congrus à  $\sqrt[n]{1}$ .

13-8-1796, Göttingen.

$x^\pi - 1$  pour lesquelles  $p^\pi \equiv 1 \pmod{\pi}$ . Le sens de la deuxième phrase se dégage dans : « Disquisitiones generales de congruentis », Gauss, II, p. 230.

- [24] Incidemment j'ai développé  $(a + b\sqrt{-1})^{m+n}\sqrt{-1}$ . 14-8-1796.
- [25] Ensemble de la question bientôt compris. Reste à établir chaque point. 13-8, Göttingen.
- [26]  $(a^p) \equiv (a) \pmod{p}$ , a racine de n'importe quelle équation, irrationnelle de quelque manière que ce soit. 18-8, Göttingen.

(a) : fonction rationnelle entière de  $x$  s'annulant pour  $x = a$ .

$(a^p)$  : fonction correspondante dont les racines sont puissances  $p^e$  des racines de la première,  $p$  étant premier.

Cf. « Analysis Residuorum », article 350 Gauss, II, p. 224.

- [27] Si  $P$  et  $Q$  fonctions algébriques d'une quantité indéterminée sont premières entre elles, on a  $tP + uQ = 1$  en algèbre et en algèbre numérique. 19-8, Göttingen.

Cf. : algèbre : « Analysis Residuorum », article 335, Gauss, II, p. 215.

théorie des nombres : Demonstratio nova... article 2, Gauss III, p. 35.

- [28] Les sommes des puissances des racines d'une équation donnée s'expriment par une loi très simple au moyen des coefficients de l'équation (avec quelques autres faits géométriques dans Exercitationes). 21-8, Göttingen.

Dans « Leiste », Gauss, X, pp. 127-128, Gauss montre que les sommes des puissances des racines s'expriment explicitement au moyen des coefficients. Sujet abordé par Albert Girard en 1629 dans *Invention nouvelle dans l'Algèbre*, puis Euler dans *Introductio in Analysin infinitorum* (1748) et enfin Waring dans *Miscellanea analytica de aequationibus algebraicis* (1762).

L'expression des coefficients de l'équation par les sommes des puissances des racines se trouve dans Waring ; Gauss dans *Leiste* se borne aux 4 premiers coefficients. Voir note 6.

- [29] Sommatation de la série infinie

$$1 + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (\text{le même jour}).$$

On a :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{pn}}{(pn)!} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{x \frac{k}{n}}.$$

Cf. : GÜNTHER : *Die Lehre von den... Hyperbelfunktionen*, 1881.

- [30] Quelques points délicats mis à part, j'ai heureusement atteint mon but, à savoir si  $p^n \equiv 1 \pmod{\pi}$  ;  $x^\pi - 1$  serait composé de facteurs de degré inférieur ou égal à  $n$  et par suite l'équation conditionnelle serait soluble. J'en ai déduit deux démonstrations du théorème d'or. 2-9, Göttingen.

Voir note 23 puis note 68 où Gauss annonce qu'il a levé la première difficulté mentionnée, Équation conditionnelle = équation auxiliaire.

Cf. « Analysis Residuorum », art. 360, *Gauss*, II p. 230 ; art. 365-366 (deux démonstrations du théorème d'or), art. 363 (points délicats).

[31] Le nombre des fractions inégales dont les dénominateurs ne dépassent pas une certaine limite est égal à l'infini à  $\frac{6}{\pi^2}$  fois le nombre de fractions à numérateurs ou dénominateurs différents et inférieurs à cette limite. 6-9.

Voir note 14.

[32] si l'on pose :

$$z = \pi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} \quad \text{et} \quad x = \Phi(z),$$

alors :

$$\Phi(z) = z - \frac{z^4}{8} + \frac{z^7}{112} - \frac{z^{10}}{1792} + \frac{3z^{13}}{1792 \times 52} - \frac{3 \times 185 z^{16}}{1792 \times 52 \times 14 \times 15 \times 16} + \dots$$

9-9-1796.

Erreur de Gauss : lire 165 au lieu de 185 au numérateur du coefficient de  $z^{16}$ . Cf. *Gauss*, X, p. 140 ; VIII, p. 93, où il étudie l'inversion de  $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ .

[33] si :

$$x = \Phi \left( \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}} \right),$$

alors :

$$\Phi(z) = z - \frac{1 \cdot z^n}{2(n+1)} A + \frac{(n-1)z^n}{4(2n+1)} B - \frac{n^2 - n - 1}{2n + (3n+1)} z^n C - \dots$$

14-9-1796.

Généralisation de 32. Selon une écriture due à Newton,  $A$  désigne ici le premier terme de la série (*i.e.*  $z$ ),  $B$  le second (*i.e.*  $\frac{z^n}{2(n+1)} z$ ),  $C$  le troisième, etc....

[34] Méthode facile pour l'obtention de l'équation en  $y$  à partir de l'équation en  $x$ , si :

$$y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots \quad 16-9.$$

Transformation de Tschirnhausen : trouver la transformée en  $y = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \dots$  de l'équation  $x^m + Ax^{m-1} + \dots + M = 0$ . La méthode facile consiste à trouver cette transformée au moyen des sommes des puissances. Le cas particulier  $y = x^7$  est exposé dans « Analysis Residuorum », *Gauss*, II, p. 223 comme « solution première ».

- [35] Transformer des fractions dont le dénominateur contient des quantités irrationnelles (d'une manière quelconque ?) en d'autres libérées de cet inconvénient. 16-9.

Transformer une fraction rationnelle d'une racine d'une équation algébrique en une fonction rationnelle entière de cette racine.

« Cf. : Methodus Nova integralium valores per approximationem inveniendi », art. 11, Gauss, III, p. 177. et l'article 360 des *D.A.*

- [36] Coefficients de l'équation auxiliaire utilisée pour l'élimination déterminés par les racines de l'équation donnée. même jour.

Fait vraisemblablement allusion à la recherche sur l'élimination dont il est question dans la note 89.

- [37] Nouvelle méthode par laquelle il est possible de chercher et peut-être de découvrir la résolution universelle des équations : on transforme l'équation en une autre ayant pour racines  $\alpha\rho' + \beta\rho'' + \gamma\rho''' + \dots$ , etc.. où  $\sqrt[n]{1} = \alpha, \beta, \gamma, \dots$  et où  $n$  désigne le degré de l'équation. 17-9.

Gauss indique ici qu'il a cherché à résoudre algébriquement l'équation algébrique générale avec la résolvante dite de Lagrange. Il ne croyait pas encore à cette époque à l'impossibilité de la solution par ce procédé.

Gauss s'est beaucoup occupé de ce problème. Dans l'article 262 de l'« Analysis Residuum » il dit :

« A la suite des travaux répétés des plus illustres géomètres, nul espoir ne semble subsister de la possibilité de résoudre les équations en toute généralité (c'est-à-dire de les réduire à des équations pures)... »

Gauss avait donc, dès 1797, acquis la conviction de l'impossibilité de la résolution de l'équation algébrique générale par radicaux. Il a exprimé publiquement cette conviction pour la première fois dans l'article 5 de la Dissertation Inaugurale (1799, Gauss, III, p. 17) puis dans l'article 359 des *D.A.* (1801, I, p. 449). L'emploi de la résolvante de Lagrange à l'équation cyclotomique (*D.A.*, article 360) est indiqué pour la première fois dans le journal dans les notes 65 et 66.

- [38] Il m'est venu à l'esprit de tirer les racines de l'équation  $x^n - 1$  d'équations ayant des racines communes en sorte qu'il ne faudrait la plupart du temps résoudre que des équations possédant des coefficients rationnels. 29-9, Brunswick.

Ramener la résolution de  $x^n = 1$  à celles de  $x^{a^2} = 1, x^{a'^2} = 1, \dots$  si  $n = a^2 a'^2 \dots$  est la décomposition de  $n$  en facteurs premiers. Cf. *D. A.*, art. 336.

- [39] L'équation du troisième degré est :

$$x^3 + x^2 - nx + \frac{n^2 - 3n - 1 - mp}{3} = 0$$

où  $3n + 1 = p$  et où  $m$  est le nombre de résidus cubiques en exceptant les semblables.

Il s'ensuit si  $n = 3k$ , que  $m + 1 = 3l$ , si  $n = 3k + 1$ , que  $m = 3l$

Si  $z^3 - 3pz + (p^2 - 8p - 9pm) = 0$ ,

$m$  est complètement déterminé de cette façon et  $m + 1$  est toujours  $\square + 3\square$ . *1-10, Brunswick.*

Cf. *D.A.*, art. 358.

[40] Les racines de l'équation  $x^p - 1 = 0$  multipliées par des entiers ne peuvent donner une somme nulle. *9-10, Brunswick.*

Si  $p$  est premier, la somme des racines primitives affectées de coefficients entiers n'est pas nulle, d'où l'irréductibilité de l'équation cyclotomique.

Cf. *D.A.*, article 341 ; note 136.

[41] Nous avons obtenu certains résultats au sujet des multiplicateurs des équations pour la suppression de certains termes, qui promettent d'être remarquables. *16-10, Brunswick.*

Multiplicateur : transformation, ici transformation de Tschirnhausen qui permet de supprimer certains coefficients d'une équation. Voir la note 34.

[42] La loi est trouvée : quand le système sera démontré et il le sera, nous le porterons à la perfection. *18-10, Brunswick.*

[43] Nous avons vaincu le Dragon. *21-10, Brunswick.*

[44] Éléante formule d'interpolation. *25-11-1796, Göttingen.*

Il s'agit de la formule dite d'interpolation de Lagrange (en fait due à Waring), et qui fournit un polygone de degré  $n$  prenant des valeurs données en  $(n + 1)$  points donnés., Gauss l'utilisera dans sa *Theoria interpolationis* commencée en 1805. Cf. LAGRANGE, *Œuvres* VII, p. 286 ; GAUSS, III, p. 273.

[45] J'ai commencé à transformer l'expression  $1 - \frac{1}{2^\omega} + \frac{1}{3^\omega} + \dots$  en une série selon les puissances de  $\omega$ . *26-11-1796, Göttingen.*

Série envisagée par Euler en 1761. En 1859, Riemann démontre la convergence pour : partie réelle de  $\omega > 1$  et étudie la convergence du développement en série entière.

Cf. EULER, *Hist. de l'Acad. de Berlin*, t. 17, p. 83 ; RIEMANN, *Œuvres*, t. 2, p. 145.

[46] Formules trigonométriques exprimées par des séries. *Décembre 1796.*

[47] Différentiations très générales. 23-12-1796.

On peut penser qu'il s'agit d'essais de dérivation d'ordre non entier, car de telles recherches se trouvent dans certaines lettres de Leibniz; voir aussi EULER : « De progressionibus transcendensibus », *Comm. Acad. Petrop.*, t. 5, pp. 36-55; de nos jours, le calcul d'Heveaside.

[48] J'ai entrepris de faire la quadrature de la courbe parabolique, dont on donne des points. 26-12-1796.

[49] J'ai achevé une démonstration naturelle du théorème de Lagrange. 27-12-1796.

Théorème donnant le développement d'une fonction  $f(x)$  en série entière en  $u$ , quand  $x$  et  $u$  sont liés par une relation de forme  $x = a + uX$  avec

$$X = bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$$

Gauss voulait publier sa démonstration, mais elle ne parut pas.

Cf. : *Gauss*, VIII, p. 76; lettre à Hindenburg, *Gauss*, X, p. 429.

[50] 
$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{\sin x} \, dx &= 2 \int \frac{y^2 \, dy}{\sqrt{1-y^4}} \\ \int \sqrt{\operatorname{tg} x} \, dx &= 2 \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \\ \int \sqrt{\frac{1}{\sin x}} \, dx &= 2 \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} \end{aligned} \right\} y^2 = \frac{\cos x}{\sin x}.$$
 7-1-1797.

Voir notes 51, 53, 54 et *Gauss*, X, p. 146-149.

[51] Je me suis mis à étudier à fond la courbe (élastique) lemniscate en rapport avec

(1) 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$
 8-1-1797.

Aux notes 32-33 Gauss étudie déjà l'inversion de l'intégrale (1), mais comme cas particulier de  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}$ . Voici maintenant qu'il en saisit l'intérêt particulier et c'est le début de l'étude des fonctions « lemniscatiques », étude qui l'occupera constamment et qui contient en germe bien des propriétés des fonctions elliptiques. Bernoulli avait montré que la longueur de l'arc de lemniscate (courbe d'équation polaire  $\rho^4 - \rho^2 \cos 2\theta = 0$ ) était, en fonction du rayon vecteur :

$$u = \int \frac{d\rho}{\sqrt{1-\rho^4}}.$$

La fonction inverse  $\rho = f(u)$  est donc une fonction elliptique, que Gauss note sin. le *mn.u.*

En posant  $\varpi = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ , il désigne par cos. le *mn. u.*, et sin. le *mn. (\varpi - u)*. Euler avait

donné des formules d'addition pour ces fonctions. Cf. : *Gauss*, X, p. 206 ; III p. 404 ; X p. 147 ; *BERNOULLI Opera*, I, p. 119 ; *EULER, Opera*, série I, vol. 21, p. 111. Voir dans *WEIERSTRASS, Werke*, t. 6, p. 182 une étude des fonctions lemniscatiques.

[52] J'ai découvert la raison naturelle des critères d'Euler.

10-1-1797.

Voir notes 53-54. Il s'agit de l'intégrale binôme  $\int x^m (a + bx^n)^{\frac{p}{q}} dx$ .

Cf. *EULER, Institutiones calculi integralis*, I, 1768, par. 104.

[53] J'ai imaginé de réduire l'intégrale générale  $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$  à la quadrature du cercle.

12-1-1797.

D'après Euler (*ibid.*, p. 226)  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}} = \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$ . Gauss veut dire que,  $\sin \frac{\pi}{n}$  s'exprime

par des racines de nombres entiers, la valeur de l'intégrale ne dépend que de  $\pi$  au point de vue de la transcendance.

[54] Une méthode facile pour déterminer  $\int \frac{x^n dx}{1+x^m}$ . Janvier 1797.

Inspirée d'*EULER* ; *Opera*, I, 11, p. 41 et I, 17, p. 70.

[55] J'ai trouvé un supplément remarquable pour la construction des polygones :

Si  $a, b, c, d$  sont les facteurs premiers du nombre premier  $p$  diminué d'une unité, pour la construction du polygone à  $p$  côtés, il n'y a rien d'autre à exiger que ceci :

1<sup>o</sup>) l'arc indéfini est coupé en  $a, b, c, d$  parties.

2<sup>o</sup>) les polygones à  $a, b, c, d$  côtés sont construits.

19-1-1797, Göttingen.

Si  $p-1 = aA$ ,  $A = bB, \dots$ , les périodes à  $A$  termes sont données par une équation de degré  $a$  dont la résolution se ramène à la résolution de  $x^a = 1$  (2<sup>o</sup>) et au partage d'un certain angle en  $a$  parties égales ; même processus pour les périodes à  $B$  termes.

Cf. Article 352 des *D.A.* et la note 66.

[56] Théorèmes sur les résidus  $-1, \pm 2$ , démontrés de la même façon que les autres.

4-2, Göttingen.

Cf. Article 147 des *D.A.*

[57] En ce qui concerne les diviseurs, la forme  $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab$  est compatible avec  $a^2 + 3b^2$ .

6-2.

Si  $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab$ ,  $4\alpha = (2a - b - c)^2 + 3(b - c)^2$ . Par suite tout diviseur premier impair de la 1<sup>re</sup> forme peut se mettre sous la forme  $x^2 + 3y^2$ . La réciproque est vraie.

[58] Généralisation de la dernière proposition de la page 1, à savoir :

$$1 - a + a^3 - a^6 + a^{10} - \dots = \frac{1}{1 + a} \frac{1}{1 + a^2 - a} \frac{1}{1 + a^3} \frac{1}{1 + a^4 - a^2} \frac{1}{1 + a^5} \dots$$

D'où l'on transforme aisément toutes les séries dont les exposants forment une série du second ordre. 16-2-1797.

Voir note 7 (cas de  $a = 2$ ) ; et EISENSTEIN (in *J. de Crelle*, 1846, p. 96 ; 1844, p. 75) qui fut certainement influencé par son maître Gauss, à qui il rendit visite en juillet 1844.

[59] J'ai établi une comparaison des intégrales de la forme :

$$\int e^{-t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad \int \frac{du}{\sqrt[2]{1 + u^i}} \quad \text{2-3-1797.}$$

Entendre : prises entre 0 et  $+\infty$ . Il s'agit de la relation écrite de nos jours  $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$  donnant la première intégrale eulérienne à partir de la fonction  $\Gamma$ .

[60] Pourquoi, en divisant la courbe lemniscate en  $n$  parties, on trouve une équation de degré  $n^2$ . 19-3-1797.

Le même problème pour le cercle conduit à une équation de degré  $n$ . La raison profonde est la double périodicité des fonctions lemniscatiques, que Gauss connaissait donc déjà en mars 1797. Voir *Gauss*, X, p. 160 ; I, p. 412 ; X, p. 153.

[61]

$$\sum \left( \frac{m^2 + 6mn + n^2}{(m^2 + n^2)^4} \right)^k$$

dépend des puissances de l'intégrale :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \quad (0 \dots 1). \quad \text{Mars 1797.}$$

Question en rapport avec la représentation des fonctions elliptiques comme quotient de produits doublement infinis.

Cf. *Gauss*, III p. 408 ; EISENSTEIN, *Journal de Crelle*, t. 35, 1847, p. 153.

[62] La lemniscate est divisée géométriquement en cinq parties.

21-3-1797.

C'est-à-dire à la règle et au compas. Utilisant les méthodes de Gauss, Abel montre en 1827 que la division en  $n$  parties est possible pour la lemniscate quand elle l'est pour le cercle.

Cf. *Gauss*, X, p. 161 ; *ABEL*, *Œuvres*, p. 314 et p. 361 ; *WEIERSTRASS*, *Werke*, t. 6, p. 202.

[63] Parmi beaucoup d'autres j'ai observé la Courbe Lemniscate :

(1) Numérateurs du sinus de l'arc double = 2 Num. Dénom.  
Sinus  $\times$  Num. Dénom. Cos de l'arc simple.

(2) Dénominateur = (Num. sin)<sup>4</sup> + (Dénom. sin)<sup>4</sup>.

(3) De plus, si  $\theta$  désigne ce dénominateur pour l'arc  $\varpi$ , le dénominateur de sin arc  $k\varpi$  sera =  $\theta^{k^2}$ .

(4) De plus  $\theta = 4,810480$ .

(5) Le logarithme hyperbolique de ce nombre est :

$$1,570796 = \frac{1}{2} \pi,$$

propriété extrêmement remarquable dont la démonstration promet de très grands développements en analyse.

29-3-1797.

Gauss ayant représenté les fonctions lemniscatiques comme quotient de deux séries entières sin. lemn.  $\varphi = \frac{M(\varphi)}{N(\varphi)}$  et cos. lemn.  $\varphi = \frac{\mu(\varphi)}{\nu(\varphi)}$  (voir note 51 et *Gauss*, III, p. 405 ; X, p. 156), on a :

$$M(2\varphi) = 2M(\varphi)N(\varphi)\mu(\varphi)\nu(\varphi) ; N(2\varphi) = M(\varphi)^4 + N(\varphi)^4 ; N(k\varpi) = N(\varpi)^{k^2}$$

( $k$  entier  $> 0$ ) ; log. nép.  $N(\varpi) = 1,5708 = \frac{\pi}{2}$ .

Gauss trouva la démonstration rigoureuse de la « remarquable » égalité (5), obtenue ici numériquement, en juin 1798 (voir note 92).

[64] J'ai trouvé des démonstrations plus élégantes en ce qui concerne le rapport des diviseurs de la forme  $\square - \alpha$ , avec  $+ 1$ ,  $- 1$  et  $\pm 2$ .

17-6, Göttingen.

Pour les diviseurs de  $x^2 - \alpha$ , il y a lieu de distinguer 3 cas :

$$\alpha = 4n + 1 \text{ ou } - (4n - 1).$$

$$\alpha = - (4n + 1) \text{ ou } 4n - 1.$$

$$\alpha = \pm (4n + 2).$$

Cf. articles 147-150 des *D.A.*

[65] J'ai perfectionné la seconde méthode de la théorie des polygones.

17-6, Göttingen.

[66] Il est possible de montrer par l'une ou l'autre méthode qu'il suffit de résoudre les équations pures.

Juillet.

La première méthode donnée par Gauss pour la résolution de l'équation cyclotomique est exposée dans l'article 352 des *D.A.* La seconde fondée sur l'emploi de la résolvante de Lagrange l'est dans l'article 360, elle semble avoir été connue de Gauss dans la note 55. La note 65 indiquerait qu'il l'a mise au point le 17 juin 1797.

Cf. article 15 de « Uber Gauss Zahlen... » (*Gauss*, X, 2).

[67] Nous avons démontré ce que nous avons trouvé le 1<sup>er</sup> octobre  
par induction. 20-7.

Voir : note 39 ; article 358 des *D.A.*

[68] Ce cas singulier de la congruence  $x^n \equiv 1$  (évidemment dans le cas où la congruence auxiliaire a des racines égales) qui nous a si longtemps tourmenté ; nous l'avons vaincu avec le plus heureux succès, à partir de la solution des congruences modulo une puissance de nombre premier. 21-7.

Cf. articles 251, 363 et 372 de « Analysis Residuorum » (*Gauss*, II) ; article 16 de « Ueber Gauss Zahlen... ».

[69] Si :

$$(A) \quad x^{n+\nu} + ax^{n+\nu-1} + bx^{n+\nu-2} + \dots + n$$

est divisible par :

$$(B) \quad x^m + \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} + \dots + m.$$

et si tous les coefficients  $a, b, c, \dots$  dans (A) sont des entiers, tous les coefficients de (B) sont certainement rationnels, et ils sont même tous entiers et le dernier  $m$  divise le dernier  $n$ . 23-7.

Théorème démontré dans l'article 42 des *D.A.*, utilisé dans l'article 341 des *D.A.* pour démontrer l'irréductibilité de l'équation cyclotomique dans le cas d'un degré premier. L'affirmation contenue dans la note 40, qui est une conséquence du théorème de cet article a donc été démontrée par Gauss à une autre date que le 9-10-96 ou elle l'a été incomplètement.

[70] Il se peut que tous les produits de  $(a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + \dots)$  où  $\rho$  désigne toutes les racines primitives de l'équation  $x^n = 1$  puissent se mettre sous la forme  $(x - \rho y) (x - \rho^2 y)$ .

On a en effet :

$$\begin{aligned} (a + b\rho + c\rho^2)(a + b\rho^2 + c\rho) &= (a - b)^2 + (a - b)(c - a) + (c - a)^2 ; \\ (a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3)(a + b\rho^3 + c\rho^2 + d\rho) &= (a - c)^2 + (b - d)^2 ; \\ (a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 + e\rho^4 + f\rho^5) &= (a + b - d - e)^2 - (a + b - d - e) \\ & (a - c - d - f) + (a - c - d - f)^2 \\ &= (a + b - d - e)^2 + (a + b - d - e)(b + c - e - f) + (b + c - e - f)^2 \end{aligned}$$

Vu, le 4 Février.

C'est faux. Il s'ensuivrait en effet que le produit de deux nombres contenus dans la forme produit des  $(x - \rho y)$  pourrait être mis sous forme d'un tel produit, ce qui se réfute facilement. *Juillet.*

Erreur de signe dans la troisième égalité, dans le membre de droite il faut lire  $(a+b-d-e)$   $(b+c-e-f)$ .

[71] on démontre que plusieurs périodes des racines de l'équation  $x^n = 1$  ne peuvent avoir la même somme. *27-7, Göttingen.*

Voir note 73.

[72] J'ai démontré la possibilité du plan. *28-7-1797, Göttingen.*

Dans une lettre à Bolyai (6-3-1832), Gauss critique la définition usuelle du plan comme « surface qui, avec deux points quelconques, contient toute la droite qui les joint ». Il trouve qu'elle a trop de contenu et implique déjà un théorème. Il tient pour indispensable de démontrer l'existence d'un plan. Les préoccupations d'axiomatique n'étaient pas étrangères à notre auteur ! Voir *Gauss*, VIII, pp. 194, 200, 224.

[73] Ce que nous avons inscrit le 27 juillet renferme une erreur, mais heureusement nous n'en avons encore rien tiré puisque nous pouvions démontrer qu'aucune période ne pouvait être un nombre rationnel. *1-8.*

Il faut prendre pour  $n$  dans l'article 71 un entier quelconque et non un nombre premier car sinon il n'y aurait pas d'erreur. Ceci serait, d'après S. Grundelfinger, lié à un théorème démontré pour la première fois par Kummer ; période est pris sans doute au sens que lui donnera ce dernier. Nombre rationnel signifie ici nombre différent de zéro.

[74] Comment il convenait de mettre les signes en doublant le nombre des périodes. *Août.*

Si on passe des  $e$  périodes à  $f$  termes ( $f$  pair) aux  $2e$  périodes à  $\frac{f}{2}$  termes, celles ci sont déterminées par des équations intermédiaires quadratiques. La note 74 dit avec quels signes apparaissent pour la solution de cette équation les racines carrées de chacune des petites périodes.

[75] J'ai découvert un grand nombre de fonctions premières par une analyse très simple. *26-8.*

Cf. articles 343-344 de l'« Analysis Residuorum » *Gauss*, II, p. 220.

[76] THÉORÈME. — Si :

$$1 + ax + bx^2 + \dots + mx^{\rho}$$

est une fonction première selon le module  $\rho$

$$d + x + x^{\rho} + x^{\rho^2} + \dots + x^{\rho^{\rho}-1}$$

sera divisible par cette fonction selon ce module. *30-8.*

Cf. article 356 de « l'Analysis Residuorum », *Gauss*, II, p. 227.

- [77] Démontré, et méthode étendue à un bien plus grand nombre par introduction de modules multiples 31-8.

Cf. : article 372 de l'« A.R. » ; *Gauss*, II, p. 237.

- [78] 1<sup>er</sup> août adapté plus généralement à des modules quelconques. 4-9.

1<sup>er</sup> août est un lapsus pour 31 août, cette note n'ayant aucun rapport avec la note 73. Elle généralise modulo un entier quelconque, ce qui était indiqué dans la note 76 modulo un nombre premier et dans la note 77 modulo une puissance de nombre premier.

- [79] J'ai découvert les principes, grâce auxquels la résolution des congruences selon des modules multiples est réduite à des congruences selon un module linéaire. 9-9.

Cf. : note 77 ; article 372 de l'« A. R. », *Gauss*, II, p. 237.

- [80] J'ai démontré par une méthode naturelle que les équations ont des racines imaginaires. *Octobre, Brunswick.*

Exposé dans une dissertation spéciale au mois d'août 1799.

La raison de cette dissertation est l'obtention du titre de Docteur à la faculté de philosophie de l'université Helmstedt. Cf. *Gauss*, III, p. 1.

- [81] Nouvelle démonstration du théorème de Pythagore. 16-10-1797, *Brunswick.*

Sans grand intérêt. La lire dans *Gauss*, X, p. 524.

- [82] J'ai envisagé la somme de la série :

$$x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{144} x^4 + \dots$$

et l'ai trouvée = 0, si :

$$2\sqrt{x} + \frac{3}{16} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{21}{1024} \frac{1}{\sqrt{3x}} + \dots = \left(k + \frac{1}{4}\right) \pi.$$

16-10-1797, *Brunswick.*

Erreur de Gauss : lire  $\sqrt{x^3}$  et non  $\sqrt{3x}$  dans la deuxième série. La première série est  $\sqrt{x} I_1(2\sqrt{x})$  où  $I_1$  est la fonction de Bessel :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n+1}.$$

Voir G. VALIRON, *Équations fonctionnelles*, Paris, 1945, p. 267.

[83] Si l'on pose :

$$l(1+x) = \varphi_1(x); l[(1+\varphi_1(x))] = \varphi_2(x); l[(1+\varphi_2(x))] = \varphi_3(x) \text{ etc...},$$

on a :

$$\varphi_i(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{\frac{3}{2}^i}} + \dots$$

*Avril 1798, Brunswick.*

Premier terme du développement en série de la  $i^{\text{e}}$  itérée d'une fonction  $l(1+x)$ . Mais quelle est cette fonction?

Remarquer la longue interruption du *Journal* d'octobre 1797 à avril 1798, période que Gauss passa à Göttingen, ayant vraisemblablement laissé son cahier à Brunswick.

[84] On se donne des classes dans n'importe quel ordre ; il s'ensuit que la décomposition des nombres en trois carrés est réduite à une théorie solide.

*Avril 1798, Brunswick.*

Klein et Bachmann disent qu'il faut lire « dans n'importe quel genre de n'importe quel ordre ». Cf. art. 287 des *D.A.*

[85] J'ai découvert une démonstration naturelle de la composition des forces.

*Mai 1798, Göttingen.*

Citée dans une lettre de Wächter à Gauss (16-12-1814), cette démonstration différerait sensiblement de celle de Duchayla qui est reproduite dans le *Traité de Mécanique* de Poisson (1814, t. I, p. 11). On ne l'a pas retrouvée.

[86] J'ai étendu à un nombre quelconque de variables le théorème de Lagrange sur la transformation des fonctions en fonctions.

*Mai 1798, Göttingen.*

Théorème cité à la note 49 ; depuis, Gauss s'est mis à lire les écrits de Laplace. Voir la lettre à Hindenburg 8-10-1799 dans *Gauss*, X, p. 429.

[87] La série :

$$1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6}\right)^2 + \text{etc...} = \frac{4}{\pi};$$

rapport avec la théorie générale des séries comprenant les sinus et cosinus d'angles croissant arithmétiquement. *Juin 1798.*

Influencé par la lecture de Laplace (voir notes 86 et 88), Gauss s'intéresse au comportement asymptotique des séries trigonométriques, qui l'occuperont jusqu'en 1800. La valeur  $\frac{4}{\pi}$  est due à Euler, qui traitait la série indépendamment des séries trigonométriques. Il n'est rien resté de l'étude de Gauss, mais il est probable qu'il s'inspira d'un écrit d'Ivory publié la même année.

Cf. : EULER, *Hist. de l'Acad. de Berlin*, 1778, p. 609 ; IVORY, *Transactions of the Roy. Soc. of Edinburgh*, 1798, II, p. 177-190 ; LAGRANGE, *Œuvres*, t. I, p. 649 et t. VI, p. 63.

[88] Défendu le calcul des probabilités contre Laplace.

17-6-1798, Göttingen.

Critique de la méthode de Laplace-Boscovich.

Cf. LAPLACE, « Sur quelques points du système du monde » (*Hist. de l'Ac. des Sc.*) Paris, 1793, p. 32 ; Gauss, VIII, p. 140 et X, p. 371 (lettre à Laplace).

[89] Problème de l'élimination résolu de telle sorte qu'il ne laisse plus rien à désirer.

Juin 1798, Göttingen.

Gauss s'est intéressé à l'élimination (voir aussi note 36) à propos de l'examen critique qu'il a fait subir aux démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre (voir note 80) d'Euler (art. 8 de « Dissertation », Gauss, III, p. 13) puis de Lagrange (*id.*, p. 20).

[90] Divers petits chefs-d'œuvre sur l'attraction de la sphère.

Juin-juillet 1798.

[91 a]

$$1 + \frac{1}{9} \frac{1}{4} \frac{3}{4} + \frac{1}{81} \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{5}{8} \frac{7}{8} + \frac{1}{729} \frac{1}{4} \frac{3}{4} \frac{5}{8} \frac{7}{8} \frac{9}{12} \frac{11}{12} \dots = 1,02220.$$

$$= \frac{1,3110\dots}{3,1415\dots} \sqrt{6} \left[ = \frac{\varpi}{2} \frac{1}{\pi} \sqrt{6} \right].$$

Juillet 1798.

[91 b] Arc sin. lemn. sin.  $\varphi$  — arc sin. lemn. cos  $\varphi = \varpi - \frac{2\varphi\varpi}{\pi}$

$$\sin. \text{ lemnisc. } [a] = 0,95500598 \sin [a] - 0,0430495 \sin 3 [a] \\ + 0,0018605 \sin 5 [a] - 0,0000803 \sin 7 [a]$$

$$\sin^2. \text{ lemn. } [a] = 0,4569472 = \frac{\pi}{\varpi^2} - [0,4569472] \cos 2 [a] \dots$$

$$\text{arc sin. lemn. sin } \varphi = \frac{\varpi}{\pi} \varphi + \left( \frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi} \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{11}{2} \frac{\varpi}{\pi} - \frac{12}{\varpi} \right) \sin 4\varphi + \dots$$

$$\sin^5 [\varphi] = 0,4775031 \sin [\varphi] + 0,03\dots [\sin 3\varphi].$$

Développement en séries trigonométriques de fonctions lemniscatiques. Voir note 92 et Gauss, X, pp. 168-170.

[92] Sur la lemniscate j'ai obtenu des résultats très élégants dépassant toute attente, et par des méthodes qui me découvrent un champ tout à fait nouveau.

Juillet 1798, Göttingen.

Voir notes 63, 91 b, 95, 98 et Gauss, III p. 413-417. Gauss considère sin. lemn.  $\varphi$  comme fonction de sin  $\varphi$ , étudie les zéros et les pôles, obtient une représentation de  $M(\varphi)$  et  $N(\varphi)$  en produits infinis et en déduit la démonstration de l'égalité  $N(\varpi) = e^{\frac{\pi}{2}}$  vérifiée seulement numériquement quinze mois plus tôt. De plus les coefficients du développement en série trigonométrique de sin. lemn.  $\varphi$ , calculés numériquement au n° 91 b, sont maintenant obtenus littéralement.

[93] Solution d'un problème de balistique.

*Juillet 1798, Göttingen.*

Sur Gauss et la balistique, lire la lettre à Encke dans *Gauss*, XI, p. 49.

[94] J'ai perfectionné la théorie des comètes.

*Juillet 1798, Göttingen.*

A vrai dire les recherches de Gauss sur les trajectoires semblent avoir eu lieu plus tard.

[95] Un champ nouveau en analyse s'ouvre à moi, en ce qui concerne la recherche de fonctions, etc...

*Octobre 1798.*

Nouvelles recherches sur les fonctions lemniscatiques (*Gauss*, III, p. 418) : développements de  $M(\varphi)$  et  $N(\varphi)$  en séries trigonométriques (cas particulier de la théorie des fonctions Thêta de Jacobi), périodes lemniscatiques, liens avec la théorie de la moyenne arithmético-géométrique. En 1828, après qu'Abel eût publié ses célèbres « Recherches sur les fonctions elliptiques », Gauss écrit à Bessel : « En ce qui concerne mes recherches de 1798 sur les fonctions transcendentes, Monsieur Abel, à ce que je vois, m'a devancé et me dispense de la peine d'environ un tiers de ces choses, car il a tout développé avec élégance et concision. Il a pris précisément le même chemin que j'empruntai en 1798 et il n'y a pas à s'étonner du grand accord des résultats. A ma stupéfaction cela s'étend même à la forme et en partie au choix des notations, si bien que beaucoup de ses formules semblent être une transcription pure des miennes. Pour éviter toute méprise, je signale que je ne me souviens pas d'avoir jamais communiqué quoi que ce soit de ces choses à quiconque ».

[96] Nous avons commencé à considérer des formes supérieures

*14-2-1799, Brunswick.*

Ces formes supérieures sont les formes quadratiques ternaires.

Cf. *Gauss*, I, p. 476 ; art. 266 des *D.A.*

[97] J'ai trouvé de nouvelles formules exactes pour la parallaxe

*8-4-1799, Brunswick.*

Formules relatives à la lune écrites par Gauss en marge de livres de sa bibliothèque. Voir *Gauss*, X, p. 539.

[98] J'ai démontré jusqu'à la onzième décimale que la moyenne limite arithmético-géométrique entre 1 et  $\sqrt{2}$  vaut  $\frac{\pi}{\omega}$ , démonstration qui ouvrira certainement un champ tout à fait nouveau en analyse.

*30-5-1799, Brunswick.*

$a$  et  $b$  étant deux nombres réels ( $a, b \neq 0$  et  $a^2 \neq b^2$ ), si l'on forme les deux suites  $a_1 = \frac{a+b}{2}$ ,  $b_1 = \sqrt{ab}$ ;  $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$ ,  $b_2 = \sqrt{a_1b_1}$ ; .....  $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$ , etc..., les

limites, quand  $n$  tend vers l'infini, de  $a_n$  et  $b_n$  existent et sont égales. Algorithme apparaissant d'abord chez Lagrange. La limite commune est notée  $M(a,b)$  et appelée moyenne arithmético-géométrique entre  $a$  et  $b$ . Gauss démontre par un calcul approché l'égalité  $M(1, \sqrt{2}) = \frac{\pi}{\omega}$  (voir note 51), ce qui établit un lien entre les fonctions lemniscatiques et la moyenne arithmético-géométrique. Gauss ne trouvera la démonstration rigoureuse qu'en novembre 1799 (voir note 100).

Cf. LAGRANGE, *Œuvres*, II, p. 272, 304 ; GAUSS, III, p. 363 ; X p. 174 ; lettre de Pfaff à Gauss 24-11-99.

[99] J'ai fait des progrès notoires au sujet des principes de la géométrie.  
*Septembre, 1799 Brunswick.*

Voir deux lettres de Gauss à Bolyai (*Gauss*, VIII, p. 159 et p. 221).

[100] J'ai découvert beaucoup de choses nouvelles sur les moyennes arithmético-géométriques.  
*Novembre 1799, Brunswick.*

Développement de  $M(1,x)$  en série. *Gauss*, X pp. 177 et 184.

[101] J'avais trouvé depuis longtemps déjà que la moyenne arithmético-géométrique était représentable comme quotient de deux fonctions transcendentes ; j'ai découvert maintenant que l'une de ces fonctions se réduit à des quantités intégrales.

*14-12-1799, Helmstadt.*

Voir *Gauss*, X, p. 186, où  $M(1,x)$  est représenté comme quotient d'une série entière par le logarithme d'une série entière ; et X, p. 187, où le dénominateur est montré être l'inverse

$$\text{de } \int_0^1 \frac{dr}{\sqrt{(1-r^2)(x^2-r^2)}}.$$

[102] La moyenne arithmético-géométrique est elle-même une quantité intégrale. Démonstré.  
*23-12-1799.*

Cf. *Gauss*, III, p. 370 ; X, pp. 181-187.

[103] Il convient dans la théorie des formes ternaires de considérer des formes réduites.  
*13-2-1800.*

Cf. *Scheda Ac.*, p. 22 ; *Gauss*, I, p. 476 ; art. 272 des *D.A.*

[104] La série  $a \cos A + a' \cos (A + \varphi) + a'' \cos (A + 2\varphi) + \text{etc...}$  converge vers une limite, si  $a, a', a'', \text{etc...}$  est une suite tendant continûment vers 0 sans changement de signe. Démonstré.

*27-4-1800, Brunswick.*

Entendre :  $a, a', a'', \dots$  suite monotone. Classique de nos jours. Première démonstration correcte publiée par Holmgren en 1851 (*J. de Math.*, t. 16, p. 186).

[105] J'ai conduit la théorie des quantités transcendantes :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - \alpha x^2} (1 - \beta x^2)}$$

à la plus grande généralité. 6-5-1800, Brunswick.

Après les résultats signalés aux notes 98 et 101, Gauss découvre que les quantités :

$$\frac{c}{M(1, c)} \quad \text{et} \quad \frac{c}{M(1, s)} \quad (s = \sqrt{1 - c^2})$$

jouent pour l'intégrale elliptique de module  $s$  le même rôle que  $\frac{1}{M(\sqrt{2}, 1)}$  jouait dans le cas de la lemniscate (modules de périodicité).

[106] Il m'advient ce 22 mai à Brunswick de donner un grand accroissement à cette théorie, par lequel toutes les choses précédentes se trouvent réunies avec la théorie des moyennes arithmético-géométriques et infiniment augmentées. 22-5-1800, Brunswick.

*Gauss*, X, p. 194 et suivantes.

[107] Ces jours-ci (18 mai) je résouds élégamment le problème chronologique de la fête de Pâques (publié dans *Comm. litér. de Zachs*, Août 1800, pp. 121, 123). 16-5-1800.

Le problème de déterminer par l'arithmétique la date de Pâques a été abordé pour la première fois par Lambert. La règle de Gauss est en VI, p. 73. En 1813, Français y décele une erreur et montre qu'elle cesse d'être valable à partir de l'an 4200. En 1816 Gauss rend correcte sa formule.

Cf. ; LAMBERT, *Astron. Jahrbuch*, 1778, p. 210 ; FRANÇAIS, *Ann. de Math. pures et appl.*, 4, 1813, p. 273.

[108] On peut réduire le numérateur et le dénominateur du sinus lemniscatique (dans le sens le plus large) à des quantités intégrales ; développements en séries infinies, par des méthodes naturelles, de toutes les fonctions lemniscatiques qu'on peut former ; très belle découverte, et certainement autant que toutes les précédentes.

De plus j'ai découvert ces jours-ci les principes selon lesquels les séries arithmético-géométriques doivent être interpolées, de sorte qu'il est déjà possible de produire par des équations algébriques les termes se rapportant dans une progression donnée à un indice entier quelconque. Mai, 2-3 juin 1800.

Gauss forme une fonction  $x = S(\varphi)$  analogue au sin. lemn. ; elle satisfait à l'équation différentielle  $S'^2 = (1 + \mu^2 S^2) (1 - S^2)$ . Pour  $\mu = 1$ ,  $S = \text{sin. lemn.}$  Il introduit  $T(\varphi)$  et  $W(\varphi)$  analogues à  $M$  et  $N$  pour les fonctions lemniscatiques (voir note 63), qu'il développe en séries.

A comparer aux fonctions thêta. Il ne reste rien se rapportant à la deuxième partie de la note. Voir *Gauss*, X, pp. 194, 202, 204 ; III, pp. 401-402.

[109] Entre deux nombres donnés sont toujours une infinité des valeurs des moyennes arithmético-géométriques et harmonico-géométrique et j'ai eu le bonheur d'en découvrir généralement le lien mutuel.  
3-6-1800, Brunswick.

Cf. *Gauss*, X, pp. 218, 222, 223,

[110] J'ai appliqué ma théorie aux transcendentes elliptiques.

5-6-1800.

Il s'agit des intégrales elliptiques de première espèce. *Gauss*, X, p. 227-228 ; note 105 ; III, p. 354.

[111] Rectification de l'ellipse effectuée par trois méthodes différentes.

10-6-1800.

Cf. *Gauss*, X, p. 229 ; III, pp. 360, 354.

[112] J'ai trouvé un calcul numérique exponentiel tout à fait nouveau.

12-6-1800.

Calculs numériques des puissances de  $e$ , pour étudier les facteurs des grands nombres et utilisant les tables de logarithmes de Wolfram. *Gauss*, III, pp. 426-431.

[113] Je résouds un problème, que j'ai cherché autrefois sans réussir, au sujet d'un calcul de probabilités relatif aux fractions continues.

25-10-1800.

Voici ce problème, mentionné dans la lettre de Gauss à Laplace du 30-1-1812, où il dit s'en être occupé pendant douze ans (sans succès). Soit :

$$M = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

une grandeur développée en fraction continue, comprise entre 0 et 1, pour laquelle ces valeurs sont également probables ; quelle est la probabilité  $P(n,x)$  pour que :

$$\frac{1}{a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+1} + \dots}}$$

soit compris entre  $o$  et  $x$  ? Gauss a pu démontrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n, x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}.$$

Après 128 ans ce problème a été résolu par Kuzmin (voir *Atti del congresso intern. d. math.*, 1928, t. VI, p. 83). M. Loève nous signale que ces questions se traitent actuellement par la technique des mesures invariantes et le théorème de Birkhoff.

- [114] Heureux ce jour où il nous fut donné de considérer un grand nombre de classes de formes binaires par une triple méthode, à savoir :
1. par produit infini
  2. par somme infinie
  3. par somme finie de cotangentes ou de sinus logarithmiques.
- 30-11-1800, Brunswick.

Cf. *Gauss*, II, p. 285 ; note 115.

- [115] Nous avons trouvé une quatrième méthode plus simple que toutes les autres pour les déterminants négatifs à partir d'une seule suite de nombres  $\rho, \rho', \text{etc...}$  où  $Ax + \rho, Ax + \rho'...$  sont des formes linéaires de diviseurs de la forme  $\square + D$ .
- 3-12-1800, Brunswick.

Cf. : *Gauss*, I, p. 286 ; lettre à Pfaff du 8-12-1800 ; art. 306 des *D.A.* ; art. 27 de « Ueber Gauss Zahlentheoretische Arbeiten », *Gauss*, X, 2, p. 66.

- [116] J'ai démontré qu'il est impossible de ramener la section du cercle à des équations de degré inférieur à celui indiqué par notre théorie.
- 4-6-1801, Brunswick.

La même affirmation pour la section en  $n$  parties égales se trouve dans l'article 365 des *D.A.* si  $n$  est premier et dans l'article 366 si  $n$  est une puissance de nombre premier puis si  $n$  est quelconque. On n'a trouvé aucune démonstration de ces affirmations probablement ajoutées pendant l'impression des *D.A.*, ni dans les publications, ni dans les papiers de Gauss. Il est d'ailleurs vraisemblable qu'aucune démonstration fondée sur les seuls lemmes utilisés par Gauss en 1801 n'a encore été donnée. Loewy dans *Gauss*, X, 1, pp. 557, 560 donne une démonstration ne faisant pas appel à la théorie de Galois.

- [117] Ces jours-ci j'ai enseigné une méthode nouvelle pour déterminer la Pâque des Juifs.
- 1-4-1801.

Voir : WOLF : *Elementa matheseos universae*, p. 182 (Gauss en avait un exemplaire) ; *Gauss*, VI, p. 80 ; GRESY, in *Corresp. astron.*, t. 1, 1818, p. 556 ; HAMBURGER, in *Journal de Crelle*, t. 116, p. 90 (démonstrations de la règle de Gauss).

- [118] On obtient une méthode pour démontrer le cinquième théorème fondamental au moyen d'un très élégant théorème de la théorie cyclotomique, soit :

$$\sum \left. \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \frac{n^2}{a} P = \begin{array}{c} + \sqrt{a} \\ + \sqrt{a} \end{array} \left| \begin{array}{c} 0 \\ + \sqrt{a} \end{array} \right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \left| \begin{array}{c} + \sqrt{a} \\ 0 \end{array} \right.$$

suivant que :

$$a \equiv \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \pmod{4} \end{array}$$

mi-Mai 1801, Brunswick.

La démonstration de ce théorème est signalée dans la note 123.

Cf., Theorema novissimum pulcherrimum, in *Gauss*, X, 1, p. 23.

[119] Méthode nouvelle très simple et très commode pour déterminer les éléments des orbites des corps célestes.

*mi-Septembre 1801, Brunswick.*

Depuis longtemps Gauss s'intéresse à l'astronomie théorique ; mais, lorsque le 1<sup>er</sup> janvier 1801 Piazzi a découvert à Palerme la première petite planète, qu'il ne peut observer que pendant quarante-deux jours, c'est le début pour Gauss de calculs et de recherches qui l'absorbent presque exclusivement pendant plusieurs années et qui aboutissent en 1809 à la publication de la *Theoria motus*. Le problème est de déterminer l'orbite d'une planète à partir de peu d'observations s'étendant sur peu de temps. Les astronomes cherchèrent en vain Cérès dans le ciel pendant tout l'été 1801. « Jamais je n'aurais pu expérimenter plus avantageusement ce que mes chères idées valaient dans la pratique, qu'on les utilisant pour déterminer l'orbite de Cérès. C'est au mois d'octobre 1801 que fut faite cette première application de la méthode et, à la première nuit claire où l'on chercha la planète selon les déductions numériques, la transfuge fut rendue aux observateurs (GAUSS, Préface de la *Theoria motus*) ». Cf. notes 122, 125, 126, 127, 129 ; *Gauss* VII, p. 7 ; VI, p. 56.

[120] J'ai commencé une théorie du mouvement de la lune.

*Août 1801.*

Cf. *Gauss*, VII, pp. 611-639. Gauss à Schumacher le 23-1-1842 : « A peine les recherches théoriques étaient-elles commencées, la découverte de Piazzi me jeta dans une toute autre direction ».

[121] J'ai trouvé une multitude de formules nouvelles très utiles en Astronomie théorique.

*Mois d'octobre 1801.*

[122] Au cours des années consécutives 1802, 1803, 1804, les travaux astronomiques prirent la plus grande partie de mon temps et j'ai entrepris avant tout la théorie du calcul des nouvelles planètes. Voilà pourquoi au cours de ces années mon journal est négligé ; pourquoi les jours, où il a été donné d'apporter quelque chose aux mathématiques, ont quitté ma mémoire.

Nov. 1801 : Gauss présente les calculs sur Cérès. 7 déc. : von Zach retrouve la planète. 1<sup>er</sup> janvier 1802 : Olbers confirme son identité. Utilisant ces nouvelles observations, Gauss améliore sa détermination de la trajectoire et jusqu'en 1804 fait des calculs astronomiques sur Cérès, puis sur Pallas. Il en oublie presque totalement ses belles recherches d'arithmétique et d'analyse. Cf. : *Gauss*, VI, p. 199 ; VII, p. 377 ; correspondance avec Olbers.

[123] Cette démonstration du très élégant théorème mentionné ci-dessus en mai 1801, que nous avons cherchée pendant quatre ans et plus de toutes nos forces, nous l'avons enfin achevée. *Commentationes recentiores*, I.

*30-8-1805.*

Cette démonstration se trouve dans *Summatio quarumdam serierum singularium* paru dans le tome I des *Commentationes societatis regiae scientiarum gottingensis recentiores*. Cf. : *Gauss*, II, p. 9. lettre à Olbers du 3-9-1805 (X, p. 24).

[124] J'ai poussé plus avant la théorie de l'interpolation.

*Novembre 1805.*

Premier projet de ce que sera la « Theoria interpolationis methodo nova tractata » *Gauss*, III, p. 265.

[125] J'ai trouvé une méthode nouvelle des plus satisfaisantes pour déterminer les éléments d'un corps en mouvement autour du soleil à partir de deux positions héliocentriques. *Janvier 1806.*

Voir : lettre de Gauss à Olbers du 3-2-1806 (*Gauss*, VII, p. 112).

[126] J'ai élevé au plus haut degré de perfection la méthode pour déterminer l'orbite d'une planète à partir de trois positions géocentriques. *Mai 1806.*

*Gauss*, VII, p. 155.

[127] Une méthode nouvelle pour réduire l'ellipse et l'hyperbole à la parabole. *Avril 1806.*

*Gauss*, VII, « Theoria motus... », art. 33 et suiv.

[128] C'est vers cette époque que nous avons mené à bonne fin la décomposition de la fonction  $\frac{x^p - 1}{x - 1}$  en quatre facteurs.

*Avril-mai 1806.*

Gauss signale dans l'article 22 de « Theoria Residuorum biquadraticorum commentatio prima » (*Gauss*, II, p. 89) que cette décomposition est étroitement liée aux recherches exposées dans les articles 15 et 20 de ce traité et permet d'en venir aisément à bout. Il ajoute qu'il réserve cette question ; nulle remarque ne figure néanmoins dans les œuvres posthumes à ce sujet.

[129] Méthode nouvelle pour déterminer l'orbite d'une planète à partir de quatre observations, dont deux sont incomplètes.

*21-1-1807.*

Voir : lettre de Gauss à Olbers (27-1-1807) (*Gauss*, VII, p. 210).

[130] Théorie des résidus cubiques et biquadratiques entreprise.

*15-2-1807.*

[131] Poussée plus avant et complètement vaincue le 17 février.

*17-2-1807.*

[132] Démonstration de cette théorie par une méthode tellement élégante qu'elle en est presque parfaite et ne laisse plus rien à désirer.

En même temps résidus et non résidus quadratiques sont mis parfaitement en lumière. 22-2-1807.

[133] théorèmes ajoutant des développements d'un très grand prix à la théorie précédente obtenus par une élégante démonstration (il s'agit bien évidemment de savoir pour quelles racines primitives il convenait de poser  $b$  positif et pour lesquelles il faut prendre  $b$  négatif,  $a^2 + 27b^2 = 4p$ ;  $a^2 + 4b^2 = p$ . 24-2-1807.

Ces 4 notes concernent les résultats exposés dans « Theoria Residuorum biquadraticorum » (*Gauss*, II, p. 65.) Cf. : GAUSS, lettre à Dirichlet du 30 mai 1828, lettre à Sophie Germain du 30 avril 1807. (*Gauss*, X, p. 70 et surtout 72) ; note 128 puis *Gauss*, VIII, pp. 3-11 et pp. 15-19 (extraits des œuvres posthumes).

[134] Nous avons trouvé une démonstration absolument nouvelle du théorème fondamental, fondée sur des principes tout à fait élémentaires. 6-6-1807.

Dans la lettre à Olbers du 8-5-1807, Gauss indique : « ...voici une démonstration nouvelle très élégante et concise du théorème fondamental de l'article 301 des *D.A.*, dont la première démonstration très pénible m'a coûté plus d'une année de travail... ». C'est la sixième de la loi de réciprocité quadratique. Cf. « Theorematis arithmetici demonstratio nova » (*Gauss*, II, p. 1).

[135] Théorie de la division en trois parties (art. 358) réduite à des principes bien plus simples. 10-5-1808.

L'article en question est l'article 358 des *D.A.*

Les principes se trouvent dans « Disquisitionum circa aequationes... » (*Gauss*, II, p. 243).

[136] L'équation  $X - 1 = 0$  ayant pour racines toutes les racines primitives de l'équation  $x^n - 1 = 0$  ne peut être décomposée en facteurs à coefficients rationnels ; démonstration pour les valeurs quelconques de  $n$ . 12-6-1808.

L'irréductibilité de l'équation cyclotomique dans le cas d'un degré premier (resp. puissance d'un nombre premier) est indiquée dans la note 40 (resp. 116).

Les œuvres posthumes (*Gauss*, X, p. 116) ne contiennent qu'une partie d'ailleurs obscure de l'irréductibilité dans le cas général, partie qui ne permet pas de déduire la suite envisagée par Gauss.  $X - 1 = 0$  est un lapsus pour  $X = 0$ . Cf. : note 38.

[137] Je me suis attaqué à la théorie des formes cubiques, solution de l'équation :

$$x^3 + ny^3 + n^2z^3 - 3nxyz = 1. \quad 23-12-1808.$$

On pourra consulter les remarques de Fricke (*Gauss*, II, p. 24-26) et de Schering (*Gauss*, II, p. 398). Voir note 135.

- [138] Théorème sur le résidu cubique 3 démontré par une méthode spéciale élégante en considérant les valeurs pour lesquelles  $\frac{x+1}{x}$  prend les trois valeurs  $a, a\varepsilon, a\varepsilon^2$ , exception faite de celles qui donnent  $\varepsilon, \varepsilon^2$ , à savoir  $\frac{1}{\varepsilon-1} = \frac{\varepsilon^2-1}{3}$  ;  $\frac{1}{\varepsilon^2-1} = \frac{\varepsilon-1}{3}$  dont le produit est d'ailleurs  $\equiv \frac{1}{3}$ . 6-1-1809.

Adaptation (sous toute réserve du traducteur). Dedekind indique que  $\varepsilon$  doit être pris ici comme racine rationnelle de la congruence  $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \pmod{p}$  où  $p$  est un nombre premier de la forme  $3n + 1$ .

- [139] Étudié plus avant des séries se rapportant à la moyenne arithmético-géométrique. 20-6-1809.

Gauss reprend ses recherches sur les fonctions elliptiques abandonnées depuis 1800. Voir lettre à Schuhmacher dans *Gauss*, X, p. 242 ; *Gauss*, III, p. 446.

- [140] J'effectue la division en cinq parties par les moyennes arithmético-géométriques. 29-6-1809.

Voir note 62 et *Gauss*, III, p. 458.

- [141] Nous reprenons au début de l'an 1812 ce journal interrompu pour la seconde fois par un sort injuste. Au mois de novembre 1811 il me fut donné de compléter la démonstration purement analytique du théorème fondamental de la théorie des équations mais comme rien n'avait été noté, une partie essentielle m'était complètement sortie de la mémoire. Nous l'avons enfin heureusement redécouverte après l'avoir cherché pendant un intervalle de temps assez long. 29-2-1812.

Il s'agit de la « *Demonstratio nova altera* » du théorème fondamental de l'algèbre. (*Gauss*, III, p. 31). Cf. lettre à Olbers du 19-2-1826 (*Gauss*, II, p. 439) ; remarque de Brendel, *Gauss*, VII, p. 610.

- [142] J'ai trouvé une théorie tout à fait nouvelle de l'attraction du sphéroïde elliptique aux points situés à l'extérieur du solide. 16-9-1812, Seeberg.

Voir note 143. Seeberg est un observatoire.

- [143] J'achève cette théorie par une méthode nouvelle d'une étonnante simplicité. 15-10-1812, Göttingen.

Mémoire présenté le 18 mars 1813. Gauss écrit à Laplace (5-11-1812) : « Récemment, je me suis occupé du problème célèbre des attractions d'un sphéroïde elliptique. C'est vous, Monsieur, qui il y a trente ans en avés donné le premier la solution complète, dont j'ai

admiré tant de fois la subtilité. Je me flatte que la manière nouvelle dont je traite cette question méritera l'attention des géomètres.... J'ai l'honneur de vous offrir ici un extrait, et je vous prie de le présenter à l'Institut, duquel plusieurs membres ont bien mérité du même problème. Vous verrez avec plaisir que deux pages m'ont suffi pour obtenir la solution complète. » Dans sa réponse Laplace félicite Gauss et lui signale l'analogie de sa démonstration avec celle donnée par Ivory en 1809. Réf. IVORY : *Philos. Trans. of the Roy. Soc.*, 1809, p. 345 ; *Gauss*, V, p. 122 : « Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum » ; V, p. 281 ; lettre à Schuhmacher 31-12-1812.

[144] Ce même jour où un fils nous est donné, j'ai eu enfin le bonheur de découvrir le fondement de la théorie générale des résidus biquadratiques, que j'avais cherché pendant presque sept années au prix des plus grands efforts, mais toujours en vain.

23-10-1813, Göttingen.

[145] C'est là, la chose la plus subtile de toutes, que jamais je n'achevais. Aussi je ne sais s'il vaut la peine de faire mention en même temps de certaines simplifications relatives au calcul des orbites paraboliques.

Ces résultats sur les comètes dans *Gauss*, VI, p. 25 et VII, pp. 338-349.

En ce qui concerne ces deux notes, on pourra consulter la lettre de Gauss à Dirichlet du 30-5-1828 (*Gauss*, II, p. 516) ; la note 133. Le 23 octobre 1813 était né le second fils de Gauss issu du second mariage ; il se nommait Wilhelm, se consacra à l'agriculture et suivit plus tard son aîné Eugen en Amérique.

[146] Très importante observation obtenue par induction et liant de manière très élégante la théorie des résidus biquadratiques aux fonctions lemniscatiques : Si  $a + bi$  est un nombre premier et si  $a - 1 + bi$  est divisible par  $2 + 2i$ , le nombre de toutes les solutions de la congruence :

$$1 \equiv x^2 + y^2 + x^2y^2 \pmod{a + bi},$$

y compris :

$$x = \infty, y = \pm i; x = \pm i, y = \infty, \text{ est } (a - 1)^2 + b^2.$$

9-7-1814.

Selon Dedekind (lettre à Klein) on est ramené à chercher le nombre des solutions de  $2 = uv \pmod{p}$  pour lesquelles  $u - 1$  et  $v - 1$  sont en même temps résidus quadratiques mod.  $p$  ; Dedekind a de cette manière vérifié la propriété pour tous les nombres premiers inférieurs à 100. D'autre part l'égalité  $1 = x^2 + y^2 + x^2y^2$  a lieu pour  $x = \sin. \text{lemn. } \varphi$  et  $y = \cos. \text{lemn. } \varphi$ , mais on ne voit pas clairement le lien, dont parle Gauss, entre les résidus biquadratiques et les fonctions lemniscatiques.

A l'intérieur de la couverture du *Journal*, on a trouvé enveloppée la sentence suivante :

*Nil Desesperare.*  
*Habeant sibi*  
QUA EXEAS HABES

[Fin du « Journal »].

TABLE ANALYTIQUE DES MATIÈRES  
(renvoyant aux n<sup>os</sup> des notes)

I. — THÉORIE DES NOMBRES

- A. Dénombrements et lois asymptotiques : 9, 11, 12, 13, 14, 31.
- B. Théorème de Goldbach : 5.
- C. Restes quadratiques :
  - a* résidus  $-1, \pm 2$  : 56.
  - b* loi de réciprocité :
    - Première démonstration : 2.
    - Deuxième démonstration : 16.
    - Troisième et quatrième démonstration : 23, 25, 30, 68.
    - Cinquième démonstration : 118, 123.
    - sixième démonstration : 134.
  - c* résidus en général : 4, 64.
- D. Restes cubiques et biquadratiques : 130, 131, 132, 133, 138, 144, 145, 146.
- E. Congruences : 22, 26, 68, 75, 76, 77, 78, 79, 146.
- F. Formes :
  - a* quadratiques binaires : 15, 19, 84, 114, 115.
  - b* quadratiques ternaires : 17, 18, 57, 96, 103.
  - c* cubiques : 137.

II. — ALGÈBRE

- A. Existence des racines : 80, 141.
- B. Divisibilité des polygones : 69.
- C. Somme des puissances des racines : 6, 28.
- D. Transformation et résolution d'équations générales : 34, 35, 37, 41, 42, 43.
- E. Élimination : 36, 89.
- F. Théorème de Bezout : 27.
- G. Division du cercle :
  - a* Résolution générale. Construction de polygones : 1, 38, 55, 65, 66, 74, 116.
  - b* Résolvantes cubiques et biquadratiques : 39, 67, 128, 135.
  - c* Irréductibilité : 3, 40, 70, 71, 73, 136.

III. — ANALYSE

- A. Fractions continues : 7, 58, 113.
- B. Interpolation et quadrature mécanique : 44, 48, 124.
- C. Dérivation : 47.
- D. Intégrations : 50, 52, 53, 54, 59.
- E. Séries :
  - a* Théorème de Lagrange : 49, 86.
  - b* Séries récurrentes : 8, 10, 20.
  - c* Développements en série particuliers : 24, 32, 33, 45, 46.
  - d* Sommations de séries particulières : 29, 87.
  - e* Séries trigonométriques : 87, 104.
  - f* Développements asymptotiques : 82, 83, 113.

- F. Fonctions lemniscatiques : 50, 51, 60, 61, 62, 63, 91  $a$  et  $b$ , 92, 95, 98, 112, 146.  
G. Moyenne arithmético-géométrique : 98, 100, 101, 102, 106, 108, 109, 139, 140.  
H. Intégrales et fonctions elliptiques : 105, 106, 108, 110, 111.

## IV. — GÉOMÉTRIE

- A. Théorème de Pythagore : 81.  
B. Fondements : 72, 99.  
C. Courbes algébriques : 21.

## V. — PROBABILITÉS

88, 113.

## VI. — MÉCANIQUE

- A. Parallélogramme des forces : 85.  
B. Attraction : 90, 142, 143.  
C. Balistique : 93.

## VII. — ASTRONOMIE

- A. Parallaxe : 97.  
B. Fête de Pâques : 107, 117.  
C. Trajectoires des planètes et comètes : 94, 119, 121, 122, 125, 126, 127, 129, 145.  
D. Lune : 120.

P. EYMARD et J. P. LAFON.