1750

Variae demostrationes geometriae

Leonhard Euler

VARIAE DEMONSTRATIONES GEOMETRIAE.

AVCTORE
L. EVLERO.

§. 1.

Reperitur in commercio epistolico Fermatii propositio quaedam geometrica, quam Geometris demonstrandam proposuit. Quae etsi ad naturam circuli spectat, nihilque difficultatis primo intuitu inuoluere videtur, tamen a pluribus Geometris frustra est suscepta, neque vsquam adhuc eius demonstratio est tradita. Per Analysin quidem non difficulter eius veritas agnoscitur, indeque demonstrationem deriuare non admodum foret arduum, sed huiusmodi demonstrationes plerumque ita analysin olent, vt ab huius artis expertibus vix intelligi queant. Requiritur igitur huius propositionis a Fermatio allatae eiusmodi demonstratio geometrica, quae more veterum Geometrarum sit adornata, et quae etiam ab iis, qui analysi non sint assueti, intelligi possit. Talem igitur demonstrationem hic tradam, quae sequenti lemmate innititur. Tab. II.

Lemmata.

§. 2. Si linea recta AB vtcunque secetur in duobus punctis R et S, erit rectangulum ex tota AB in partem mediam RS vna cum rectangulo ex partibus extremis AR et BS aequale rectangulo ex partibus AS et BR, seu erit: $AB . RS + AR . BS = AS . BR$. Fig. 1.

Demonstratio.

Cum sit $AB = AS + BS$, erit vtrumque ducendo in RS,

$$AB.RS = AS.RS + BS.RS$$

addatur $\quad AR.BS \qquad\qquad AR.BS$ vtrinque, et erit

$$AB.RS + AR.BS = AS.RS + BS.RS + AR.BS$$

At est $BS.RS + AR.BS = BS(RS + AR) = BS.AS$,
vnde fit $AB.RS + AR.BS = AS.RS + BS.AS$
Verum est $AS.RS + BS.AS = AS(RS + BS) = AS.BR$
Consequenter habebitur: $AB.RS + AR.BS = AS.BR$

Q. E. D.

Scholion.

Fig. 2. §. 3. Hocce lemma etiam sequenti modo per solam figuram geometricam demonstrari potest. Super data recta AB in punctis R et S vtcunque diuisa constituatur quadratum, $ABab$ et latus Ba simili modo secetur in punctis r et s, vt sit $Bs = BS$; $sr = SR$ et $ar = AR$: tum ductis rectis Rb, Sg item sc, rd lateribus quadrati parallelis, erunt partes Ss, cg quadrata circa diagonalem Bb sita, ideoque erit $\square Ae = \square ae$. Addatur vtrique rectangulum cf, fietque $\square Ae + \square cf = \square ae + \square cf$ seu $\square Af = \square ae + \square cf$, sed $\square ae = \square af + \square er$, vnde $\square Af = \square af + \square er + \square cf = \square af + \square er$. At est $\square Af = AS.Br = AS.BR$; et $\square af = ar.BS = AR.BS$ atque $\square cr = AB.rs = AB.RS$, quibus valoribus substitutis elicietur: $AS.BR = AR.BS + AB.RS$ seu $AB.RS + AR.BS = AS.BR$ prorsus vti lemma habet.

Theorema

Theorema Fermatii.

§. 4. Si super semicirculi AMB diametro AB Fig. 3. constituatur parallelogrammum rectangulum ABFE, cuius latitudo AE seu BF aequetur chordae quadrantis eiusdem circuli seu lateri quadrati inscripti, atque ex punctis E et F ad quoduis peripheriae punctum M ducantur rectae EM, FM; his diameter AB ita secabitur in punctis R et S, vt sit: $AS^2 + BR^2 = AB^2$.

Demonstratio.

Ex puncto M per terminos diametri A et B producantur rectae MAP et MBQ donec basi EF productae occurrant in punctis P et Q. Iam quia angulus AMB est rectus, erit $P + Q =$ ang. recto; at est etiam $P + \alpha =$ ang. recto et $Q + \beta =$ ang. recto, ob rectas AE et BF ad EF normales; vnde erit $P = \beta$ et $Q = \alpha$, ideoque triangula PEA et BFQ inter se similia: ex quo habebitur $PE : AE = BF : QF$ hincque $PE . QF = AE . BF = AE^2$, et propterea $2 PE . QF = 2 AE^2$. At quia AE aequatur chordae quadrantis, erit $2 AE^2 = AB^2 = EF^2$, ita vt futurum sit $2 PE . QF = EF^2$. Quare cum hic recta PQ ita in punctis E et F secta habeatur, vt sit duplum rectangulum partium extremarum PE et QF aequale partis mediae EF quadrato; diameter vero AB in punctis R et S simili modo sit secta, sequitur fore quoque duplum rectangulum partium extremarum AR et BS aequale quadrato partis mediae RS, seu erit $2 AR . BS = RS^2$. Iam cum sit $AS + BR = AB + RS$, erit quadratis sumtis:

$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + RS^2 + 2AB.RS$
Ponatur hic pro RS^2 eius valor $2AR.BS$ fietque
$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AB.RS + 2AR.BS$
At per lemma praemiſſum eſt $AB.RS + AR.BS = AS.BR$ ideoque etiam $2AB.RS + 2AR.BS = 2AS.BR$, quo valore in illa aequalitate ſubſtituto orietur:

$$AS^2 + BR^2 + 2AS.BR = AB^2 + 2AS.BR$$

auferatur vtrinque pars communis $2AS.BR$ ac remanebit:
$AS^2 + BR^2 = AB^2$. Q. E. D.

§. 5. In vulgus deinde nota eſt regula inueniendi aream trianguli ex datis eius tribus lateribus, quae ita ſe habet, vt a ſemiſumma laterum ſingula latera ſeorſim ſubtrahantur et ſolidum ſeu productum ex his tribus reſiduis ortum per ipſam ſemiſummam multiplicetur, tum vero ex iſto producto radix quadrata extrahatur, quae exhibitura ſit aream trianguli propoſiti. Analytice quidem haec regula facile demonſtratur, ac demonſtrationes ex analyſi concinnatae paſſim occurrunt, verum eae a more geometrico non mediocriter diſſident, vt non niſi a lectoribus in Analyſi exercitatis intelligi poſſint. Quocirca iſtius regulae hic demonſtrationem pure geometricam tradam, in qua nullum analyſeos veſtigium percipiatur. Petita eſt ea ex circulo triangulo inſcripto, cuius ſymtomata ab Euclide ſufficienter ſunt expoſita; quibus autem ad demonſtrationem formandam opus habeo, ea in ſequentibus propoſitionibus complectar, quae viam ad memoratae regulae demonſtrationem parabunt.

Theorema

Theorema.

§. 6. Area cuiusque Trianguli ABC aequatur re- Fig. 4. ctangulo ex semisumma laterum in radium circuli inscripti, seu area $\triangle ABC$ est $\frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$.

Demonstratio.

Ex centro circuli inscripti O in singula latera demittantur perpendicula OPOQ. OR, quae erunt aequalia radio circuli inscripti. Ex O ducantur pariter ad angulos rectae OA.OB.OC quibus triangulum propositum diuidetur in tria triangula AOB, AOC, BOC, eandem altitudinem $OR = OQ = OP$ habentia, et quorum bases sunt latera trianguli AB, AC, BC. Hinc ista triangula iunctim sumta aequantur triangulo cuius basis est summa laterum $AB+AC+BC$, et altitudo radio circuli inscripti OP aequalis, cui cum proinde area ipsius trianguli propositi ABC sit aequalis, haec aequabitur rectangulo ex semisumma laterum in radium circuli inscripti OP, seu erit area $\triangle ABC = \frac{1}{2}(AB+AC+BC)OP$. Q. E. D.

Theorema.

§. 7. Si ex centro O circuli triangulo ABC inscripti in singula latera perpendicula demittantur OP, OQ, OR his latera ita secabuntur, vt posita semisumma laterum $\frac{1}{2}(AB+AC+BC) = S$, futurum sit:
$AR = AQ = S - BC$; $BR = BP = S - AC$ et $CP = CQ = S - AB$.
atque $AR + BP + CQ = S$.

Demonstratio.

Nam ob perpendicula OP, OQ, OR inter se aequalia, statim patet fore $AQ = AR$; $BP = BR$ et $CP = CQ$, vnde erit

erit ſumma laterum $AB + AC + BC = 2AR + 2BP + 2CQ$, ideoque habebitur $AR + BP + CQ =$ ſemiſummae laterum $= S$. Erit ergo

$AR + BC = S$ ideoque $AR = AQ = S - BC$
$BP + AC = S$ ideoque $BP = BR = S - AC$
$CQ + AB = S$ ideoque $CQ = CP = S - AB$.

Q. E. D.

Theorema.

Fig. 5. §. 8. Si vt ante ex centro O circuli triangulo ABC inſcripti in ſingula latera demittantur perpendicula OP, OQ, OR, erit ſolidum ſub partibus $AR.BP.CQ$ contentum aequale ſolido ex ſemiſumma laterum S et quadrato radii circuli inſcripti OP confecto ſeu erit: $AR.BP.CQ = S.OP^2$.

Demonſtratio.

Ductis ex centro circuli inſcripti O ad ſingulos angulos rectis OA.OB.OC, ad earum aliquam CO ſi opus eſt productam ex altero reliquorum angulorum B ducatur normalis BM, quae radio PO producto occurrat in N. Iam cum anguli A, B, C a rectis OA, OB, OC bifariam ſecentur, erit in triangulo BOC angulus extremus $BOM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, hinc ob $BOM + OBM =$ recto, erit $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + OBM =$ recto. Verum quia $A + B + C = 2$ rect. erit quoque $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A =$ recto, ideoque $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + OBM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ vnde fit $OBM = \frac{1}{2}A = OAR$. Quare cum in triangulis rectangulis BOM et AOR ſit ang. $OBM =$ ang. OAR

ea

ea erunt inter se similia, hincque fiet

$AR:RO = BM:MO$, seu $AR:OP = BM:MO$

Porro ob triangula rectangula CBM, NBP et NOM inter se similia erit:

$BM:BC = MO:ON$ seu $BM:MO = BC:ON$

vnde colligitur: $AR:OP = BC:ON$, et aequatis rectangulis mediorum et extremorum erit:

$AR.ON = OP.BC$; atque ob $ON = PN - OP$ $AR.PN - AR.OP = BC.OP$ seu $AR.PN = AR.OP + BC.OP = (AR + BC)OP$. Verum $AR + BC = S$ (§. praec.), ita vt sit $AR.PN = S.OP$. Denique ob triangula COP et NBP similia est $PN:BP = CP:OP$, vnde $OP.PN = BP.CP$, et $AR.BP.CP = AR.OP.PN$, sed prior aequatio per OP multiplicata dat $AR.OP.PN = S.OP^2$. Quocirca concluditur $AR.BP.CP$ seu $AR.BP.CQ = S.OP^2$. Q. E. D.

Theorema.

§. 9. Area trianguli cuiusuis ABC reperitur, si a semisumma laterum (quae sit $= S$) singula latera seorsim subtrahantur, ac solidum sub his tribus residuis contentum per ipsam semisummam laterum S multiplicetur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Seu erit area trianguli $ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Demonstratio.

Per §. 6. area trianguli ABC aequatur rectangulo ex semisumma laterum S et radio circuli inscripti OP, sicque erit area trianguli $ABC = S.OP$. Verum cum ex §. praec. sit $S.OP^2 = AR.BP.CQ$, erit per S vtrinque

que multiplicando $S^2.OP^2 = S.AR.BP.CQ$, hincque radicem quadratam extrahendo habebitur:

$$S.OP = \sqrt{S.AR.BP.CQ}$$

ideoque area trianguli $ABC = \sqrt{S.AR.BP.CQ}$.
ſed ex §. 7 patet eſſe:

$$AR = S - BC;\ BP = S - AC \text{ et } CQ = S - AB$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit.
Area $\triangle ABC = \sqrt{S(S-AB)(S-AC)(S-BC)}$.

Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 10. Hinc etiam concinna expreſſio pro radio circuli triangulo inſcripti OP exhiberi poteſt. Cum enim ſit $S.OP^2 = AR.BP.CQ$ erit $OP^2 = \frac{AR.BP.CQ}{S}$, ideoque $OP = \sqrt{\frac{AR.BP.CQ}{S}}$. Iam ergo pro AR, BP, CQ ſcriptis valoribus ante indicatis habebitur.
Radius circuli inſcripti $OP = \sqrt{\frac{(S-AB)(S-AC)(S-BC)}{S}}$.

Coroll. 2.

§. 11. Quia S denotat ſemiſummam laterum trianguli, ita vt ſit $S = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ erit hoc valore ſubſtituto:

$$S-AB = \tfrac{1}{2}AC + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}(AC + BC - AB)$$
$$S-AC = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}BC - \tfrac{1}{2}AC = \tfrac{1}{2}(AB + BC - AC)$$
$$S-BC = \tfrac{1}{2}AB + \tfrac{1}{2}AC - \tfrac{1}{2}BC = \tfrac{1}{2}(AB + AC - BC)$$

ſic erit: $S(S-AB)(S-AC)(S-BC) =$

$$\tfrac{1}{16}(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)$$

ideoque area trianguli quoque ita exprimetur.

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(AB + AC + BC)(AC + BC - AB)(AB + BC - AC)(AB + AC - BC)}.$$

Scho-

Scholion.

§. 12. Vltima haec formula pro inuenienda area cuiusque trianguli eſt maxime nota, ac plerumque in elementis geometriae tradi ſolet, etiamſi eius demonſtratio difficulter per elementa confici poſſit. Similis quoque fere regula habetur pro area cuiusque quadrilateri circulo inſcripti inuenienda, quippe quae pari modo ſatis concinne per ſola latera exprimi poteſt. Eius quidem demonſtratio, ſi analyſis in ſubſidium vocetur, non eſt difficilis, ſed qui eam more apud Geometras recepto adornare ſunt conati, maximas experti ſunt difficultates, Cl: quondam Naudaeus non parum in hoc genere laborauit, et geminam huius quoque regulae demonſtrationem protulit in Miſc. Berol. verum vtraque non ſolum maxime eſt intricata et multitudine linearum in figura ductarum obruta, vt ſine ſumma attentione ne capi quidem poſſit, ſed etiam vbique nimis luculenta veſtigia analytici calculi offendunt, Mihi quidem ſequentibus propoſitionibus praemittendis opus eſt.

Theorema.

§. 13. Si quadrilateri circulo inſcripti ABCD duo latera ſibi oppoſita AB, DC ad occurſum vsque in E producantur, erit area quadrilateri ABCD ad aream trianguli BCE vt $AD^2 - BC^2$ ad BC^2. Fig. 6.

Demonſtratio.

Quia tam angulus BAD quam BCE cum angulo BCD conſtituit duos rectos, erit $BAD = BCE$, ſimiliterque $ADC = CBE$, vnde triangula AED et CEB

erunt ſimilia, eorumque ergo areae ſe habebunt vt quadrata laterum homologorum, veluti AD et BC: erit itaque
$\triangle AED : \triangle CEB = AD^2 : BC^2$ et diuidendo
$\triangle AED - \triangle CEB : \triangle CEB = AD^2 - BC^2$ hoc eſt
$\square ABCD : \triangle CEB = AD^2 - BC^2 : BC^2$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 14. Ex cognita ergo area trianguli CEB inuenietur area quadrilateri $ABCD$: erit namque

$$\square ABCD = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} . \triangle BEC$$

ſeu ſi area trianguli BEC deſignetur breuitatis gratia littera T, et area quadrilateri $ABCD$ littera Q, erit

$$Q = \frac{AD^2 - BC^2}{BC^2} . T.$$

Coroll. 2.

§. 15. Tum vero quia eſt differentia quadratorum $AD^2 - BC^2 = (AD+BC)(AD-BC)$, erit $\frac{AD^2-BC^2}{BC^2} = \frac{AD-BC}{BC} . \frac{AD+BC}{BC}$ hincque habebitur haec aequatio
$Q = \frac{AD-DC}{BC} . \frac{AD+BC}{BC}$, quae ſumendis quadratis abit in hanc

$$QQ = \frac{AD-BC}{BC} . \frac{AD-BC}{BC} . \frac{AD+BC}{BC} . \frac{AD+BC}{BC} . T . T$$

Coroll. 3.

§. 16. Ex ſuperiori autem §. 11. colligitur eſſe aream trianguli $BEC = T = \frac{1}{4}\sqrt{(BE+CE+BC)(BE+CE-BC)(BE-CE+BC)(CE-BE+BC)}$ vnde $TT = \frac{1}{16}(BE+CE+BC)(BE+CE-BC)(BE-CE+BC)(CE-BE+BC)$. Hinc ergo prodibit valor quadrati areae quadrilateri $ABCD$ ſeu ipſius QQ combinandis his factoribus ipſius TT cum ante inuentis ita expreſſus

QQ

$$QQ = \frac{1}{16} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} \cdot \frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} \cdot \frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}.$$

Coroll. 4.

§. 17. Quam formam ita enunciare licet, vt dicamus quadratum areae ABCD decies sexies sumtum seu $16QQ$ aequari producto ex his quatuor factoribus.

I. . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}$

II. . . . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}$

III. . . . . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC}$

IV. . . . . . $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC}$.

Theorema.

§. 18. Iisdem positis, quae in theor. praec. sunt assumta erit $BE+CE : BC = AB+CD : AD-BC$.

Demonstratio.

Cum enim triangula BEC et DEA sint similia, erit $BE : DE = BC : AD$ itemque $CE : AE = BC : AD$; vnde ex vtraque prodibit diuidendo

$BE : DE-BE = BC : AD-BC$

$CE : AE-CE = BC : AD-BC$

Cum igitur tam BE ad DE−BE, quam CE ad AE−CE eandem teneat rationem, vt nempe BC ad AD−BC; etiam summa antecedentium $BE+CE$ ad summam consequentium $DE-BE$ vna cum $AE-CE$ eandem seruabit rationem eritque:

$BE+CE : DE-BE+AE-CE = BC : AD-BC$

At est $DE-BE+AE-CE = DE-CE+AE-BE$

 $= CD$

$=CE+AB$ ficque erit $BE+CE : AB+CD=BC : AD-BC$ et alternando $BE+CE : BC=AB+CD : AD-BC$. Q. E. D.

Coroll. I.

§. 19. Cum igitur fit $BE+CE:BC=AB+CD:AD-BC$ erit componendo $BE+CE+BC : BC = AB+CD+AD-BC : AD-BC$ vnde rectangulum extremorum aequale erit rectangulo mediorum, fcilicet: $(AD-BC)(BE+CE+BC)=BC(AB+CD+AD-BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum primus erit I. . $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC}=AB+CD+AD-BC$

Coroll. 2.

§. 20. Simili modo ex proportione $BE+CE:BC = AB+CD : AD-BC$ orietur diuidendo: $BE+CE-BC : BC=AB+CD-AD+BC : AD-BC$ vnde fequentia rectangula inter fe erunt aequalia: $(AD-BC)(BE+CE-BC)=BC(AB+CD-AD+BC)$ hincque factorum in §. 17 exhibitorum fecundus erit: II. . . $\frac{(AD-BC)(BE+CE-BC)}{BC}=AB+CD-AD+BC$.

Theorema.

§. 21. Iisdem pofitis, fcilicet fi quadrilateri circulo infcripti ABCD duo latera AB, DC ad concurfum vsque in E producantur, erit:

$$CE-BE : AB-DC = BC : AD+BC$$

Demonftratio.

Triangula fimilia BCE et DEA praebent vt ante te has proportiones: $BE:DE = BC:AD$ et $CE:AE = BC:AD$ ex quarum vtraque elicitur componendo

$$BE : DE + BE = BC : AD + BC$$
$$CE : AE + CE = BC : AD + BC$$

Cum ergo tam BE ad $DE+BE$ quam CE ad $AE+CE$ eandem teneat rationem, etiam differentia antecedentium $CE-BE$ ad differentiam consequentium $AE+CE$ demto $DE+BE$ eandem habebit rationem vt BC ad $AD+BC$ erit scilicet:

$$CE-BE : AE+CE-DE-BE = BC : AD+BC$$

At est $AE+CE-DE-BE = AE-BE-DE+CE = AB-CD$ sicque erit $CE-BE-AB-CD = BC : AD+BC$ et alternando $CE-BE : BC = AB-CD : AD+BC$. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 22. Cum igitur hinc sit inuertendo $BC : CE-BE = AD+BC : AB-CD$, erit componendo $BC+CE-BE : BC = AD+BC+AB-CD : AD+BC$. Atque aequatis rectangulis extremorum et mediorum fiet $(AD+BC)(BC+CE-BE) = BC(AD+BC+AB-CD)$ vnde factorum §. 17. exhibitorum quartus erit: IV... $\frac{(AD+BC)(BC+CE-BE)}{BC} = AB+AD+BC-CD$.

Coroll. 2.

§. 23. Simili modo ex proportione $BC : CE-BE = AD+BC : AB-CD$ orietur diuidendo $BC-CE+BE : BC = AD+BC-AB+CD : AD+BC$ hincque erit $(AD+BC)(BC+BE-CE) = BC$

 (AB

(AD+BC+CD−AB) vnde factorum §. 17 exhibitorum tertius erit: III. . . $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD + BC + CD - AB.$

Theorema.

§. 24. Quadrilateri circulo inscripti ABCD area inuenitur, si a semisumma omnium eius laterum singula latera seorsim subtrahantur, haec quatuor residua in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur.

Demonstratio.

Si duo latera opposita AB, CD ad concursum vsque in E producantur, atque quadrilateri ABCD area ponatur $= Q$, vidimus §. 17 valorem 16 QQ aequari producto ex quatuor factoribus, quos eosdem factores in §. §. 19. 20 et §. §. 22. 23 succinctius expressimus, ita vt nunc valor ipsius 16 QQ aequetur producto ex his quatuor factoribus.

I. $\frac{(AD-BC)(BE+CE+BC)}{BC} = AB + CD + AD - BC$

II. $\frac{(AD+BC)(BE+CE-BC)}{BC} = AB + CD - AD + BC$

III. $\frac{(AD+BC)(BC+BE-CE)}{BC} = AD + BC + CD - AB$

IV. $\frac{(AD+BC)(BC-BE+CE)}{BC} = AB + AD + BC - CD$

Hinc ergo erit 16 QQ aequale huic producto $(AB + CD + AD - BC)(AB + CD + BC - AD)(AD + BC + CD - AB)(AB + AD + BC - CD)$. Quod si iam ponatur summa omnium laterum $AB + BC + CD + DA = 2S$ vt semisumma sit $= S$. erit:

2 S

$2S-2AB=BC+CD+DA-AB=$ factori III.
$2S-2BC=AB+CD+DA-BC=$ factori I.
$2S-2CD=AB+BC+DA-CD=$ factori IV.
$2S-2DA=AB+BC+CD-DA=$ factori II.

vnde productum ex his quatuor factoribus erit $(2S-2AB)(2S-2BC)(2S-2CD)(2S-2DA)$, quod binariis seorsim sumtis abit in hanc expressionem: $16(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ cui propterea valor ipsius $16QQ$ aequatur. Quare vtrinque per 16 diuiso erit $QQ=(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)$ vnde si radix quadrata extrahatur, fiet: $Q=$ Areae $ABCD=\sqrt{(S-AB)(S-BC)(S-CD)(S-DA)}$. Patet ergo aream quadrilateri $ABCD$ inueniri, si a semisumma laterum S seorsim subtrahantur singula latera AB, BC, CD, DA, haecque quatuor residua $S-AB, S-BC, S-CD, S-DA$ in se inuicem multiplicentur, atque ex producto radix quadrata extrahatur. Q. E. D.

Scholion.

§. 25. His Theorematibus de area trianguli et quadrilateri circulo inscripti demonstratis, quae quidem ipsa satis sunt nota, aliud theorema subiungam nusquam ad huc neque prolatum neque demonstratum. Complectitur id singularem proprietatem omnium quadrilaterorum notatu maxime dignam, quae cum cognita parallelogrammorum natura eximiam habet affinitatem. Quemadmodum enim constat in omni parallelogrammo summam quadratorum ambarum diagonalium aequalem esse summae quadratorum quatuor laterum, ita demonstrabo in omni quadrilatero non parallelogrammo summam quadratorum ambarum

barum diagonalium ſemper minorem eſſe ſumma quadratorum quatuor laterum, atque adeo defectum facillime poſſe aſſignari.

Theorema.

Fig. 7. §. 26. Propoſito quocunque trapezio ABCD cum ſuis diagonalibus AC, BD; ſi circa bina latera AB, BC compleatur parallelogrammum ABCE, quod cum trapezio tria puncta A, B, C habebit cummunia, iunganturque reliqua puncta diuerſa D et E recta DE, erit ſumma quadratorum laterum trapezii $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$ maior quam ſumma quadratorum diagonalium $AC^2 + BD^2$, atque exceſſus aequabitur quadrato lineae DE: ſeu erit $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$.

Demonſtratio.

Ducatur in parallelogrammo ABCE altera diagonalis BE quae ipſi cum trapezio non eſt communis; tum ponatur CF ipſi AD, et BF ipſi ED parallela et aequalis, et quia $BC = AE$, iſtae lineae concurrent in puncto F, vt triangulum CBF ſimile ſit et aequale triangulo AED. Quo facto iungantur lineae AF, DF et EF. Hinc manifeſtum eſt fore tam ADCF quam BDEF parallelogrammum, atque diagonales illius eſſe AC et DF, huius uero BE et DF: vnde per proprietatem parallelogrammorum notam erit

ex ADCF . . . $2AD^2 + 2CD^2 = AC^2 + DF^2$

ex BDEF . . . $2BD^2 + 2DE^2 = BE^2 + DF^2$

vnde ex vtraque aequatione valorem DF^2 definiendo habebebitur: $2AD^2 + 2CD^2 - AC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 - BE^2 = DF^2$ et AC^2 vtrinque addendo fiet: $2AD^2 + 2CD^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + AC^2 - BE^2$. Iam vero ex natura parallelogrammi ABCE erit $2AB^2 + 2BC^2 = AC^2 + BE^2$ quae aequatio ad illam adiecta dabit $2AD^2 + 2CD^2 + 2AB^2 + 2BC^2 = 2BD^2 + 2DE^2 + 2AC^2$ ac $p\,2$ diuidendo obtinebitur $AD^2 + CD^2 + AB^2 + BC^2 = BD^2 + DE^2 + AC^2$ seu $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + DE^2$. At AB, BC, CD, DA sunt quatuor latera trapezii propositi ABCD, et AC, BD eius diagonales vnde summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum ambarum diagonalium et insuper quadrato lineae DE, qua discrimen trapezii a parallelogrammo exponitur. Q. E. D.

Coroll. 1.

§. 27. Quo magis ergo trapezium a parallelogrammo discrepat, seu quo maius euadit interuallum DE, eo magis summa quadratorum laterum trapezii superabit summam quadratorum diagonalium.

Coroll. 2.

§. 28. Quia igitur in omni parallelogrammo summa quadratorum laterum aequalis est summae quadratorum diagonalium, in omni vero quadrilatero non parallelogrammo maior est, sequitur nullum exhiberi posse quadrilaterum, in quo summa quadratorum laterum minor sit quam summa quadratorum diagonalium.

Coroll. 3.

§. 29. Si vtraque diagonalis AC et BD trapezii propofiti ABCD bifecetur, illa in P haec vero in Q; erit recta PQ femiffis interualli DE, et DE^2 aequalis erit quadruplo quadrato lineae PQ, vnde exceffus fummae quadratorum laterum fuper fummam quadratorum diagonalium valebit quadratum lineae PQ quater fumtum.

Coroll. 4.

Fig. 8. §. 30. Theorema ergo propofitum fine mentione vllius parallelogrammi ita enunciari poterit: *In omni quadrilatero* ABCD, *fi eius diagonales* AC *et* BD *bifecentur in punctis* P *et* Q, *eaque iungantur recta* PQ, *erit fumma quadratorum laterum* $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$ *aequalis fummae quadratorum diagonalium* AC^2+BD^2 *vna cum quadruplo quadrati lineae* PQ: *feu erit*
$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2.$$

DE PROPA-

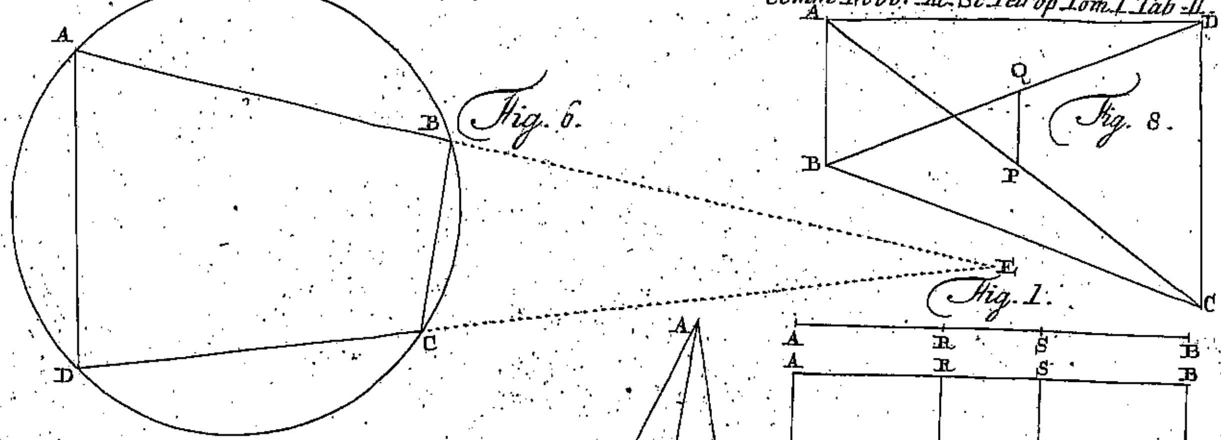

Fig. 6.

Fig. 8.

Fig. 1.

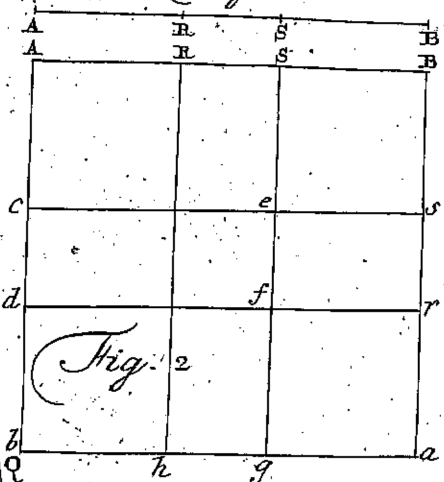

Fig. 2

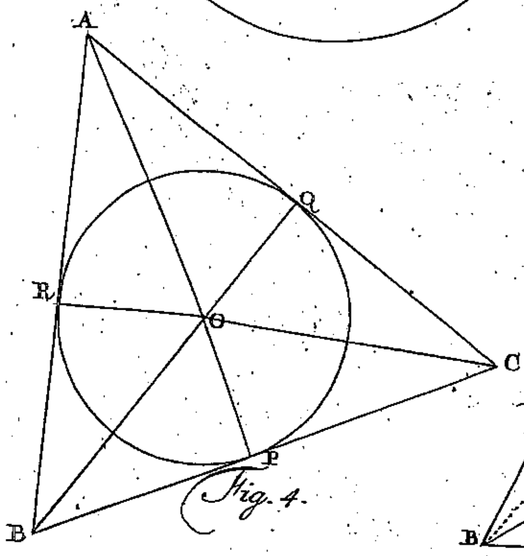

Fig. 4.

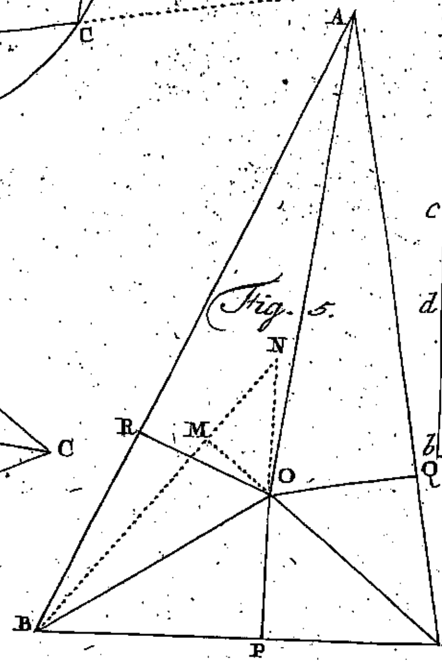

Fig. 5.

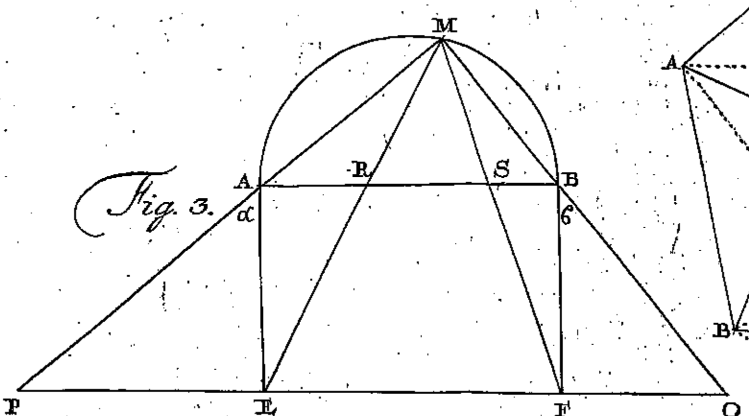

Fig. 3.

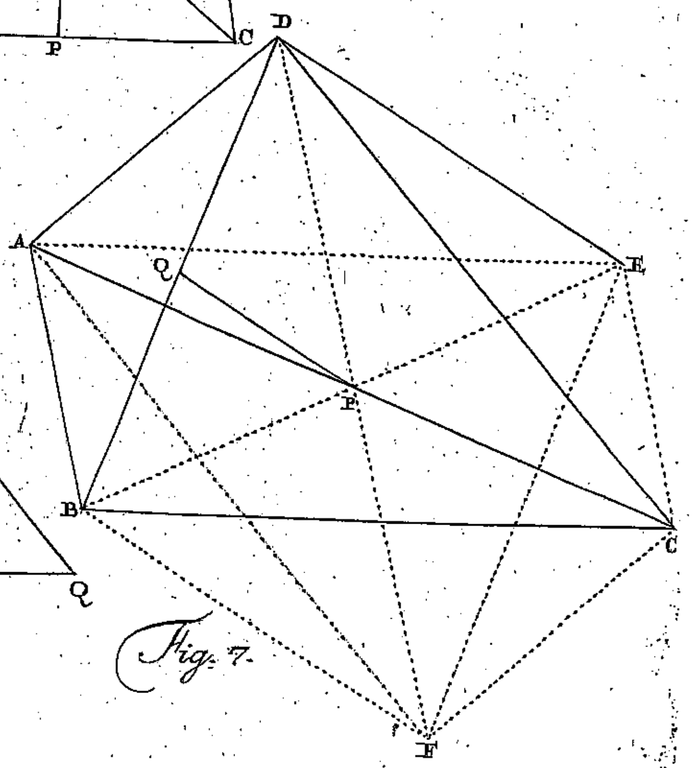

Fig. 7.