

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences /
publiés... par MM. les
secrétaires perpétuels

Académie des sciences (France). Auteur du texte. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences / publiés... par MM. les secrétaires perpétuels. 1951-01-01.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus ou dans le cadre d'une publication académique ou scientifique est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source des contenus telle que précisée ci-après : « Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France » ou « Source gallica.bnf.fr / BnF ».

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service ou toute autre réutilisation des contenus générant directement des revenus : publication vendue (à l'exception des ouvrages académiques ou scientifiques), une exposition, une production audiovisuelle, un service ou un produit payant, un support à vocation promotionnelle etc.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisation.commerciale@bnf.fr.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur les approximations diophantiennes linéaires P-adiques (I). Théorèmes généraux.* Note (*) de M^{lle} ELISABETH LUTZ, présentée par M. Paul Montel.

Soient Z l'ensemble des entiers rationnels, P un nombre premier, Q_p le corps des nombres P -adiques, pour $x \in Q_p$ $|x|_p$ la valeur absolue P -adique (avec $|P|_p = P^{-1}$), E_p l'ensemble des entiers P -adiques; on utilise dans Q la mesure invariante par translation avec $\text{mes}(E_p^n) = 1$. Une fonction à valeurs réelles ≥ 0 sur Q_p^n sera dite une *forme hyperconvexe* si $f(tx) = |t|_p f(x)$ pour tout $t \in Q_p$ et si $f(x+y) \leq \text{Max}(f(x), f(y))$.

Soit alors $U(c)$ la mesure de l'ensemble défini par $f(x) \leq c$ et $x \in E_p^n$. On démontre que l'inégalité $f(x) \leq c$ définit un sous-groupe G de Z^n , de dimension linéaire n et de déterminant $m(G) = U^{-1}(c)$. Si $x^{(0)} \in E_p^n$, $f(x + x^{(0)}) \leq c$ définit dans Z^n une classe par rapport à G .

Soient R l'ensemble des nombres réels et $g(y)$ une *norme* sur R^n , V la mesure de l'ensemble J défini par $g(y) \leq 1$, η la densité maxima des empilements d'ensembles congrus à J par les translations d'un réseau de R^n . On a alors les résultats suivants :

Il existe $x \in Z^n$ tel que

$$f(x) \leq c, \quad 0 < g(x) \leq 2(\eta V^{-1} U^{-1}(c))^{\frac{1}{n}},$$

Il existe n éléments linéairement indépendants $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ de Z^n tels que :

$$f(x^{(i)}) \leq c \quad (1 \leq i \leq n), \quad 2^n (n! V U(c))^{-1} \leq g(x^{(1)}) \dots g(x^{(n)}) \leq 2^n (V U(c))^{-1}.$$

Pour tout $x^{(0)} \in E_p^n$, il existe $x \in Z^n$ tel que :

$$f(x + x^{(0)}) \leq c \quad \text{et} \quad g(x) \leq 2^{-1} (g(x^{(1)}) + \dots + g(x^{(n)})).$$

Il existe $x^* \in E_p^n$ tel que :

$$f(x + x^*) \leq c \quad \text{et} \quad g(x) < 2^{-1} g(x^{(n)}) - \rho$$

$$\left(\text{resp. } g(x) < (n! V U(c))^{-\frac{1}{n}} - \rho \right)$$

n'aient pas de solution en $x \in Z^n$, ρ constante ne dépendant que du choix de g avec $\rho \leq 2^{-1} (g(e_1) + \dots + g(e_n))$ ($e_1, \dots, e_n$ désignant les vecteurs unitaires sur les axes).

S'il n'y a pas de solution en $x \in Z^n$ à $f(x) \leq c$, $0 < g(x) \leq c_1$ et pas de solution en $x \in Z^n$ à $f(x + x^{(0)}) \leq c$, $g(x) \leq c_2$ pour quelque $x^{(0)} \in E_p^n$, alors :

$$c_1^{n-1} c_2 < 2^{n-1} n (V U(c))^{-1}.$$

(*) Séance du 5 février 1951.

Soient $L_j(x) = \sum a_{ij}x_i$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$ des formes linéaires P -adiques ($a_{ij} \in \mathbb{Q}_p$) en nombre quelconque et λ_j des entiers rationnels. Posons

$$f(x) = \text{Max } |L_j(x) P^{-\lambda_j}|_p,$$

c'est une forme hyperconvexe pour laquelle $U = U(1) = \min |\det(D)|_p^{-1}$ où D décrit tous les mineurs de rang n du tableau des $n+p$ formes $x_1, \dots, x_n, L_1(x)P^{-\lambda_1}, \dots, L_p(x)P^{-\lambda_p}$. Si le système des $L_j(x)$ est de rang p , pour des λ_j assez grands (le système restant fixe), on aura $U = m P^{-\lambda_1 - \dots - \lambda_p}$ où m ne dépend plus des λ_j . On se servira de ce fait pour traduire les énoncés précédents en théorèmes sur les solutions de

$$L_j(x) |_p \leq P^{-\lambda_j} \text{ (resp. } |L_j(x) + x^{(0)}|_p \leq P^{-\lambda_j}, x^{(0)} \in E_p^n)$$

en $x \in \mathbb{Z}^n$ assujettis à $0 < g(x) \leq c$ (resp. à $g(x) \leq c$).

On peut d'ailleurs généraliser les énoncés initiaux (et par conséquent ceux relatifs aux formes linéaires) au cas où l'on considère simultanément plusieurs nombres premiers $P_1, \dots, P_t$ et des fonctions hyperconvexes $f_{P_i}(x)$ sur chaque $\mathbb{Q}_{P_i}^n$ à partir du fait que les inégalités $f_{P_i}(x) \leq c_{P_i}$ définissent sur $\mathbb{Z}^n$ un sous-groupe G de dimension linéaire n et de déterminant $m(G) \leq U^{-1}(c_{P_1}) \dots U^{-1}(c_{P_t})$ (avec égalité si les P_i sont distincts) ⁽¹⁾.

Bornons-nous pour simplifier à un seul nombre premier P , à un système canonique de formes linéaires à coefficients dans E_p , $L_j(x) = x_j + \sum a_{ij}x_{p+i}$, $1 \leq i \leq q$, $1 \leq j \leq p$, $p+q=n$ et aux inégalités « à un paramètre » relatives à la norme réelle $H(x) = \text{Max } |x_h|$, $1 \leq h \leq n$. On pose $L(x) = \text{Max } |L_j(x)|_p$. Dans la suite λ désignera toujours un entier rationnel > 0 . On a alors en particulier les énoncés suivants :

Pour tout λ , $L(x) \leq P^{-\lambda}$ a une solution en $x \in \mathbb{Z}^n$ avec

$$0 < H(x) \leq P^{\lambda p n - 1}$$

et n solutions linéairement indépendantes en $x^{(h)} \in \mathbb{Z}^n$ avec

$$P^{\lambda p} (n!)^{-1} \leq H(x^{(1)}) \dots H(x^{(n)}) \leq P^{\lambda p}.$$

Si $L_j(x)$ est un système non annulable ($L(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}^n$ et $\neq 0$) alors $L(x)^p H(x)^n \leq 1$ a une infinité de solutions en $x \in \mathbb{Z}^n$ primitifs.

Si pour un λ et un $x^{(0)} \in E_p^n$ il n'y a pas de solution en $x \in \mathbb{Z}^n$ à $L(x) \leq P^{-\lambda}$, $0 < H(x) \leq c_1 P^{\lambda p n - 1}$, ni à $L(x + x^{(0)}) \leq P^{-\lambda}$, $H(x) \leq c_2 P^{\lambda p n - 1}$ on a $c_1^{n-1} c_2 \leq 2^{-1} n$.

Appelons régulier un système $L_j(x)$ tel que pour un $c > 0$ convenable et une infinité de valeurs distinctes de λ , $L(x) \leq P^{-\lambda}$, $0 < g(x) \leq c P^{\lambda p n - 1}$ n'ait

(1) Cf. pour certains de ces énoncés dans le cas où $g(x) = \text{Max } |L_h^0(x)|$ les $L_h^0(x)$ étant n formes linéaires indépendantes à coefficients réels : K. MAHLER, *Jahresb. D. M.* V., 44, 1934, p. 250-255.

pas de solution en $x \in Z^n$. Si $L_j(x)$ est régulier alors pour une constante $c' > 0$ convenable et pour tout $x^{(0)} \in E_\mu^n$, $L(x + x^{(0)})^p H(x)^q \leq c'$ a une infinité de solutions en $x \in Z^n$.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — Nouveaux théorèmes pour l'intégrale de Laplace.

Note de M. HUBERT DELANGE, présentée par M. Paul Montel.

1. *Preliminaires.* — Dans tout ce qui suit, $V(t)$ est une fonction réelle de la variable réelle positive t , de la forme $V(t) = t^\varphi L(t)$, où φ est un nombre réel et $L(t)$ une fonction positive définie pour t positif assez grand et possédant la propriété suivante :

Quels que soient λ_1 et λ_2 satisfaisant à $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, quand t tend vers $+\infty$, $L(\lambda t)/L(t)$ tend uniformément vers 1 pour $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$.

E désigne un ensemble quelconque de nombres réels positifs, supposé non borné supérieurement, et h une variable réelle positive.

$\alpha(t)$ étant une fonction réelle ou complexe de la variable réelle t , définie pour $t \geq 0$ et bornée sur tout l'intervalle fini, on pose

$$\omega_V(\alpha, E, h) = \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} \frac{1}{V(t)} \left[\sup_{t \leq t' \leq t+h} |\alpha(t') - \alpha(t)| \right].$$

$\omega_V(\alpha, E, h)$ peut prendre une valeur finie positive ou nulle ou la valeur $+\infty$, et c'est une fonction non décroissante de h .

On désigne par $\omega_V(\alpha, h)$ la valeur de $\omega_V(\alpha, E, h)$ pour E égal à l'ensemble de tous les nombres positifs.

Ou bien $\omega_V(\alpha, h) = +\infty$ quel que soit h positif, ou bien $\omega_V(\alpha, h) < +\infty$ quel que soit h positif.

Dans ce dernier cas, quand h tend vers zéro, $\omega_V(\alpha, h)$ tend vers une limite finie $\omega_V(\alpha, +0)$ et, quel que soit E , $\omega_V(\alpha, E, h)$ tend vers une limite finie $\omega_V(\alpha, E, +0)$.

De plus, on a aussi ou bien $\omega_V(\alpha, h) > 0$ quel que soit h positif, ou bien $\omega_V(\alpha, h) = 0$ quel que soit h positif.

Dans le cas où $\alpha(t)$ est réelle, on pose

$$\omega'_V(\alpha, E, h) = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} \frac{1}{V(t)} \left\{ \inf_{t \leq t' \leq t+h} [\alpha(t') - \alpha(t)] \right\}$$

et

$$\omega''_V(\alpha, E, h) = \overline{\lim}_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t \in E}} \frac{1}{V(t)} \left\{ \sup_{t-h \leq t' \leq t} [\alpha(t') - \alpha(t)] \right\}.$$

$\omega'_V(\alpha, E, h)$ et $\omega''_V(\alpha, E, h)$ sont positifs ou nuls et finis ou non, et ce sont des fonctions non décroissantes de h . On désigne par $\omega_V(\alpha, h)$ leur valeur commune pour E égal à l'ensemble de tous les nombres positifs.