POSITION RELATIVE DE DEUX VARIÉTÉS LINÉAIRES FERMÉES DANS UN ESPACE DE HILBERT

PAR

JACQUES DIXMIER

Le principe des images, dû à J. von Neumann [9], est spécialement utile dans l'étude des opérateurs linéaires fermés. Il ramène, dans une certaine mesure, les problèmes relatifs à ces opérateurs, à des problèmes concernant la position relative de deux variétés linéaires fermées. Julia [3] a montré que cette dernière question joue un rôle capital dans plusieurs cas intéressants. Dans cet article, on donnera : 1° une étude de la figure constituée par deux variétés linéaires fermées (¹) ; 2° en application, des démonstrations simplifiées de certains résultats connus (notamment la décomposition canonique des opérateurs linéaires fermés), et quelques propriétés algébriques des opérateurs.

NOTATIONS

Abréviations : opérateur : op.; variété : var.; linéaire : l.; fermé : f.

Nous ne précisons pas les notations classiques et universelles. $A \cup B$ et $A \cap B$ désignent respectivement la réunion et l'intersection de deux ensembles A et B; $A \subset B$ signifie l'inclusion au sens large de A dans B.

Par espace de Hilbert, on entend un espace vérifiant les axiomes A, B, C de [10] (sans restriction concernant le nombre de dimensions de l'espace).

Dans $\mathcal{H}$, espace de Hilbert, on désigne par $\{\mathfrak{M}\}$ et $[\mathfrak{M}]$ la plus petite var. l. et la plus petite var. l. f. contenant un ensemble $\mathfrak{M}$. Si V_1 et V_2 sont deux var. l., on pose

$$V_1 + V_2 = \{V_1 \cup V_2\}, \qquad V_1 \oplus V_2 = [V_1 \cup V_2].$$

On désigne par o la var. l. réduite à l'élément nul. Deux var. l. V_1, V_2 sont dites disjointes si $V_1 \cap V_2 = o$.

On désigne par P_V (resp. S_V) l'op. de projection sur V (resp. la symétrie par rapport à V, *cf.*, p. 388).

Deux var. l. f. V_1, V_2 sont dites compatibles (Nicodym) si $P_{V_1} P_{V_2} = P_{V_2} P_{V_1}$.

Si A est un op., on désigne par D_A son domaine d'existence, par Δ_A son domaine des valeurs, par $\tilde{A}$ son plus petit prolongement l. f. Si A et B sont deux op. auto-adjoints bornés, on écrit : A pp. B quand toute var. l. f. réduisant B réduit aussi A.

(¹) Cette étude est entreprise aussi dans le premier chapitre de [1] auquel je renvoie de temps à autre. Les propriétés envisagées ici ne sont invariantes que vis-à-vis des transformations unitaires de l'espace alors que certaines des propriétés de [1] sont invariantes vis-à-vis des transformations « affines » (transformations biunivoques de l'espace en lui-même, bornées dans les deux sens).

I. — RAPPEL DE RÉSULTATS CONNUS.

Sauf mention expresse du contraire, on utilisera seulement des résultats élémentaires, qu'on va rappeler.

1. On utilisera les propriétés contenues dans les pages 1 à 18 de [10], notamment l'existence et l'unicité d'une racine carrée positive B pour un op. auto-adjoint positif A, et le fait que B pp. A. De là on déduit, comme on sait, que :

a) Si A est un op. auto-adjoint borné sans zéros non nuls, il existe deux var. l. f. orthogonales complémentaires, V, W, telles que :

(α) $(AX, X) > o$ si $X \in V$ $(X \neq o)$,

(β) $(AX, X) < o$ si $X \in W$ $(X \neq o)$.

(γ) P_V pp. A, P_W pp. A.

V et W sont les var. l. f. dans lesquelles A induit ses parties positive et négative, respectivement.

Lemme 1. — *Soit* A *un op. auto-adjoint borné sans zéros non nuls. Soit* M *et* N *deux var. l. f. orthogonales complémentaires telles que :*

(α) $(AX, X) > o$ pour $X \in M$ $(X \neq o)$;

(β) $(AX, X) < o$ pour $X \in N$ $(X \neq o)$;

(γ′) M et N réduisent A.

Alors M *et* N *sont les var. l. f. dans lesquelles* A *induit ses parties positive et négative respectivement.*

[On a ainsi un résultat d'unicité, bien que γ′ soit plus faible que γ].

Démonstration : γ′ et γ entraînent que P_V et P_M permutent; comme $M \cap W = o$, à cause de α et β, on a (d'après les propriétés des projecteurs permutables) $M \subset V$. De même, $N \subset W$. Comme M et N sont complémentaires, $M = V$, $N = W$.

b) Si A est un op. l. borné partout défini, sans zéros non nuls, avec Δ_A partout dense, on a $A = UK$, avec U unitaire et K auto-adjoint borné positif. U et K sont définis univoquement par A [il suffit de considérer $(A^* A)^{1/2}$].

2. Si un op. l. borné partout défini S possède deux des trois propriétés suivantes :

(α) $SS^* = S^*S = 1$ (S unitaire);

(β) $S = S^*$ (S auto-adjoint);

(γ) $S^2 = 1$ (S involutif),

il possède la troisième. S est alors une symétrie. Soit V l'ensemble des vecteurs X tels que $SX = X$, W l'ensemble des vecteurs Y tels que $SY = -Y$; V et W sont orthogonales complémentaires, et S est la symétrie « par rapport à V », S_V, c'est-à-dire que

$$SX = S(P_V X + P_W X) = P_V X - P_W X.$$

On a ainsi :

$$S_V = P_V - P_W = 2P_V - 1, \quad P_V = \frac{1}{2}(S_V + 1), \quad S_V = -S_W$$

(*cf.* [4]).

Lemme 2. — *Soit* M *et* N *deux var. l. f. Les faits suivants sont équivalents :*

(α) $S_M(N) = N$;

(β) $S_N(M) = M$;

(γ) $S_N S_M = S_M S_N$;

(δ) $P_N P_M = P_M P_N$.

Démonstration : α signifie que la transformée de S_N par S_M est S_N, c'est-à-dire que

$$S_M S_N S_M^{-1} = S_N, \quad \text{d'où } \gamma.$$

De même, β et γ sont équivalents. Enfin, δ et γ sont équivalents à cause des relations

$$S_M = 2P_M - 1, \quad S_N = 2P_N - 1.$$

Lemme 3. — *Soit* (M, M′) *et* (N, N′) *deux couples de var. l. f. orthogonales complémentaires. Les faits suivants sont équivalents :* α) S_M *(donc* $S_{M'}$*) échange* N *et* N′; β) S_N *(donc* $S_{N'}$*) échange* M *et* M′; γ) $S_M S_N = -S_N S_M$.

Démonstration : α signifie que la transformée de S_N par S_M est $S_{N'} = -S_N$, c'est-à-dire que

$$S_M S_N S_M^{-1} = -S_N, \quad \text{d'où } \gamma.$$

De même, β et γ sont équivalents.

3. Dans tout ce qui suit, V_1 et V_2 étant deux var. l. f. de $\mathcal{H}$, espace de Hilbert, on pose :

$$\mathcal{H} \ominus V_1 = V_1', \quad \mathcal{H} \ominus V_2 = V_2'.$$
$$V_1 \cap V_2 = \rho_{12}, \quad V_1 \cap V_2' = \rho_{12'},$$
$$V_1' \cap V_2 = \rho_{1'2}, \quad V_1' \cap V_2' = \rho_{1'2'},$$
$$P_{V_2} V_1 = D_{12}, \quad P_{V_2'} V_1 = D_{12'}, \quad P_{V_2} V_1' = D_{1'2},$$
$$P_{V_2'} V_1' = D_{1'2'}, \quad P_{V_1} V_2 = D_{21}, \quad \dots,$$
$$H = \mathcal{H} \ominus (\rho_{12} \oplus \rho_{12'} \oplus \rho_{1'2} \oplus \rho_{1'2'}),$$
$$W_1 = V_1 \cap H, \quad W_2 = V_2 \cap H, \quad W_1' = V_1' \cap H, \quad W_2' = V_2' \cap H.$$

On aura besoin de diverses notions et remarques, d'ailleurs fort simples, de [1], chapitre I, § 2 et 4. Rappelons notamment ceci : V_1 et V_2 sont dites : *a)* en position p' si $\rho_{12'} = \rho_{1'2} = 0$; *b)* en position p'' si $\rho_{12} = \rho_{1'2'} = 0$; *c)* en position p si

$$\rho_{12} = \rho_{1'2} = \rho_{12'} = \rho_{1'2'} = 0.$$

Lemme 4. — *a) Les var. l. f.* $\rho_{12}, \rho_{12'}, \rho_{1'2}, \rho_{1'2'}$, H *sont deux à deux orthogonales et soustendent* $\mathcal{H}$.

b) $V_1 = W_1 \oplus \rho_{12} \oplus \rho_{12'}$; $\quad V_2 = W_2 \oplus \rho_{21} \oplus \rho_{21'}$;
$V_1' = W_1' \oplus \rho_{1'2} \oplus \rho_{1'2'}$; $\quad V_2' = W_2' \oplus \rho_{2'1} \oplus \rho_{2'1'}$.

c) $W_1' = H \ominus W_1$; $W_2' = H \ominus W_2$.

d) W_2 *et* W_2' *sont en position* p *avec* W_1 *et* W_1' *dans* H.

Ce lemme permet de ramener l'étude de V_1 et V_2 dans le cas général à l'étude de var. l. f. en position p.

L'angle $\alpha(X_1, X_2)$, compris entre 0 et $\pi/2$, de deux vecteurs X_1, X_2 non nuls, est défini par :

$$\cos\alpha(X_1, X_2) = \|X_1\|^{-1} \cdot \|X_2\|^{-1} \cdot |(X_1, X_2)|.$$

Étant donné deux var. l. f., V_1, V_2, on pose :

$$\alpha(V_1, V_2) = \inf_{X \in V_1} \alpha(X, P_{V_2} X); \quad \beta(V_1, V_2) = \sup_{X \in V_1} \alpha(X, P_{V_2} X).$$

II. — SYMÉTRIE ÉCHANGEANT DEUX VARIÉTÉS FERMÉES EN POSITION p'.

1. — Existence des symétries.

Soit V_1, V_2 en position p. Cherchons les symétries de $\mathcal{H}$, s'il en existe, qui échangent V_1 et V_2. Soit S une telle symétrie.

Soit J un op. isométrique, *fixé une fois pour toutes*, tels que $D_J = V_1$, $\Delta_J = V_2$. Il en existe puisque dimension V_1 = dimension V_2 (*cf.* [1], *loc. cit.*). S transforme isométriquement V_1 en V_2, donc il existe un op. isométrique U, avec $D_U = \Delta_U = V_1$, tel que $S = JU$ dans V_1. D'ailleurs, la donnée de U définit parfaitement S ; car, si Y est un vecteur de V_2, qu'on peut mettre, de manière unique, sous la forme $Y = JUX$, avec $X \in V_1$, on a $SY = S^{-1}Y = X$; si maintenant

$$Y = X + JUX' \quad (X \in V_1, \ X' \in V_1)$$

est un vecteur quelconque de $V_1 \dotplus V_2$ (Y définit univoquement X et X′ parce que $\rho_{12} = 0$), on a :

$$(1) \qquad S(X + JUX') = SX + SJUX' = JUX + X',$$

et enfin S est définie par continuité dans tout $\mathcal{H}$, puisque $V_1 \dotplus V_2$ est partout dense.

A quels op. U correspond-il ainsi une symétrie S? Il est nécessaire que

$$(2) \qquad \|X + JUX'\|^2 = \|JUX + X'\|^2 \quad (X \in V_1, \ X' \in V_1).$$

Cette condition est aussi suffisante, car, si elle est remplie, l'op. défini par (1) dans $V_1 \dotplus V_2$ transforme biunivoquement $V_1 \dotplus V_2$ en $V_1 \dotplus V_2$ de façon isométrique, donc est prolongeable à $\mathcal{H}$ en op. unitaire S. Toujours d'après (1), on a $S^2 = 1$ dans $V_1 \dotplus V_2$, donc dans tout $\mathcal{H}$, de sorte que S est bien une symétrie qui échange V_1 et V_2.

Transformons cette condition (2). Elle s'écrit :

$$\|X\|^2 + \|X'\|^2 + 2\mathcal{R}(X, JUX') = \|X\|^2 + \|X'\|^2 + 2\mathcal{R}(JUX, X')$$

ou

$$\mathcal{R}(X, JUX') = \mathcal{R}(JUX, X'),$$

pour tout couple $X \in V_1$, $X' \in V_1$. D'où, en changeant X en iX :

$$\mathcal{I}(X, JUX') = \mathcal{I}(JUX, X').$$

Donc

$$(X, JUX') = (JUX, X')$$

ou

$$(X, P_{V_1}JUX') = (P_{V_1}JUX, X')$$

ou

$$P_{V_1}JU \text{ auto-adjoint dans } V_1.$$

Ainsi, toute décomposition

$$P_{V_1}J = KW \tag{3}$$

de $P_{V_1}J$ en auto-adjoint K et unitaire W (il s'agit d'op. dans l'espace V_1) fournit un unitaire $U = W^{-1}$ convenable. Il existe de telles décompositions, parce que, V_1 et V_2 étant position p, $P_{V_1}J$ est biunivoque et a un domaine des valeurs partout dense dans V_1. K est une racine carrée, définie positive ou non, de $(P_{V_1}J)^* (P_{V_1}J)$ (*cf.* [5]). Il y a ainsi des symétries S [1]. Nous préciserons l'ensemble de ces symétries au chapitre III, § 6.

Si maintenant V_1 et V_2 sont en position p', les symétries S, si elles existent, conservent φ_{12} et $\varphi_{1'2'}$, donc aussi H, et elles induisent dans H des symétries qui échangent W_1 et W_2, lesquelles sont en position p dans H. La symétrie S la plus générale s'obtient à partir d'une symétrie quelconque dans φ_{12}, d'une symétrie quelconque dans $\varphi_{1'2'}$, et d'une symétrie dans H échangeant W_1 et W_2.

Remarques : 1° Si V_1 et V_2 ne sont pas en position p', il n'existe pas toujours de symétrie S. Exemple : cas où $V_1 \underset{\neq}{\subset} V_2$. On voit d'ailleurs aisément que la condition nécessaire et suffisante pour l'existence de S, est que dimension $\varphi_{12'}$ = dimension $\varphi_{1'2}$.

2° V_1 et V_2 étant en position p, soit V la var. l. f. lieu des vecteurs invariants dans une symétrie S_V échangeant V_1 et V_2. V est le lieu des vecteurs $Z + S_V Z$ quand Z décrit $\mathcal{H}$. Donc, quand Z décrit $V_1 \dotplus V_2$ partout dense dans $\mathcal{H}$, $Z + S_V Z$ décrit une var. l. partout dense dans V. Autrement dit, quand X et Y décrivent V_1, le vecteur

$$S_V(X + S_V Y) + (X + S_V Y) = (X + Y) + S_V(X + Y)$$

décrit une var. l. partout dense dans V. Donc

$$V = [(S_V + 1)(V_1)] = [(S_V + 1)(V_2)] = [P_V V_1] = [P_V V_2].$$

D'ailleurs, comme $S_{\mathcal{H}\ominus V} = - S_V$ échange aussi V_1 et V_2, on a, de même,

$$\mathcal{H} \ominus V = [(S_{\mathcal{H}\ominus V} + 1)(V_1)] = [(S_{\mathcal{H}\ominus V} + 1)(V_2)].$$

Lemme 5. — *Soit* S_V *une symétrie qui échange les var. l. f.*, V_1, V_2 *en position p. Alors* V *et* V_1 *(et aussi* V *et* V_2*) sont en position p.*

Démonstration : Si $X \in V_1 \cap V$, on a

$$X = S_V X \in V_2, \quad \text{donc} \quad X \in V_1 \cap V_2, \quad X = 0.$$

Si $X \in V_1 \cap (\mathcal{H} \ominus V)$, on a

$$X = - S_V X \in V_2, \quad \text{donc} \quad X \in V_1 \cap V_2, \quad X = 0.$$

$$(S_V + 1)(V_1) = P_V V_1 \quad \text{et} \quad (S_{\mathcal{H}\ominus V} + 1)(V_1) = P_{\mathcal{H}\ominus V} V_1$$

sont partout denses dans V et $\mathcal{H} \ominus V$ respectivement d'après la remarque précédente. D'où le lemme (*cf.* [1], *loc. cit.*).

2. — Symétries intérieure et extérieure.

Cherchons si, parmi les symétries S_V qui échangent deux var. l. f., V_1, V_2 en position p, il en existe pour lesquelles $(S_V X, X) > 0$ quel que soit le vecteur X non nul de V_1 (ou de V_2, ce qui est équivalent). Reprenant la méthode de recherche des S_V, nous sommes conduits à la condition suivante, relative à U :

$$(JUX, X) > 0 \quad (X \in V_1,\ X \neq 0),$$
$$(P_{V_1}JUX, X) > 0 \quad (X \in V_1,\ X \neq 0),$$
$$(KX, X) > 0 \quad (X \in V_1,\ X \neq 0).$$

Donc *l'auto-adjoint* K *doit être positif (et c'est suffisant)*. Il existe une seule décomposition $P_{V_1}J = KW$ répondant à cette condition, celle pour laquelle

$$K = [(P_{V_1}J)(P_{V_1}J)^*]^{\frac{1}{2}}.$$

Nous désignerons par S_{V_0} la symétrie (unique) correspondante. Donc :

Théorème 1. — *Étant donné deux var. l. f.*, V_1, V_2 *en position p, il existe une symétrie* S_{V_0} *et une seule de* $\mathcal{H}$ *qui échange* V_1 *et* V_2, *et qui est telle que*

$$(S_{V_0}X, X) > 0 \quad \text{pour} \quad X \in V_1 \cup V_2 \quad (X \neq 0).$$

Pour des raisons évidentes, V_0 s'appellera la *bissectrice intérieure* de V_1 et V_2; S_{V_0} s'appellera la *symétrie intérieure* de V_1 et V_2. Soit $V'_0 = \mathcal{H} \ominus V_0$: V'_0 s'appellera la *bissectrice extérieure*, et $S_{V'_0} = - S_{V_0}$ *la symétrie extérieure* de V_1, V_2; cette symétrie est caractérisée par le fait que

$$(S_{V'_0}X, X) < 0 \quad \text{pour} \quad X \in V_1 \cup V_2, \quad (X \neq 0).$$

---

[1] Ce résultat est annoncé dans [2].

Remarques : 1° La formule $V_0 = [(S_{V_0} + 1)(V_1)]$ peut alors se préciser. En effet, pour $X \in V_1$, $X \neq 0$, on a

$$\|(S_{V_0}+1)X\|^2 = \|S_{V_0}X\|^2 + \|X\|^2 + 2\mathfrak{R}(S_{V_0}X, X) \tag{4}$$
$$= 2[\|X\|^2 + (S_{V_0}X, X)] > 2\|X\|^2.$$

Donc l'op. $S_{V_0} + 1$, considéré dans V_1, est, non-seulement borné, mais d'inverse borné ; donc son domaine des valeurs est fermé. Comme ce domaine est partout dense dans V_0, il est identique à V_0. Donc

$$V_0 = (S_{V_0}+1)(V_1) = (S_{V_0}+1)(V_2) = P_{V_0}V_1 = P_{V_0}V_2.$$

En particulier, on voit que $V_0 \subset V_1 \dotplus V_2$. [Ces résultats ne sont pas exacts en général pour toutes les autres symétries S_V.]

2° *Proposition 1 : Soit* V_0, V'_0 *les bissectrices intérieure et extérieure de* V_1, V_2 *en position p.*

a) Pour $X \in V_1$(*ou* $X \in V_2$) *et* $X \neq 0$, *on a*

$$2\|P_{V_0}X\|^2 > \|X\|^2, \quad 2\|P_{V'_0}X\|^2 < \|X\|^2.$$

b) Pour $X \in V_0, X \neq 0$, *on a*

$$2\|P_{V_1}X\|^2 = 2\|P_{V_2}X\|^2 > \|X\|^2;$$

pour $X \in V'_0$, $X \neq 0$, *on a*

$$2\|P_{V_1}X\|^2 = 2\|P_{V_2}X\|^2 < \|X\|^2.$$

Démonstration : D'après (4) et $S_{V_0} + 1 = 2P_{V_0}$, on a

$$2\|P_{V_0}X\|^2 > \|X\|^2.$$

En combinant avec

$$\|X\|^2 = \|P_{V_0}X\|^2 + \|P_{V'_0}X\|^2,$$

on obtient *a*. Puis *b* se déduit de *a* en échangeant dans *a* les rôles de V_1 et V_0 (ou de V_1 et V'_0), ce qui est possible, puisque, V_1 et V_0 étant en position p (lemme 5), il y a des symétries de $\mathcal{H}$ qui les échangent.

3° Soit V_1, V_2 en position p'. Soit W_0, W'_0 les bissectrices intérieure et extérieure, dans H, de W_1 et W_2 (en position p dans H). *Par définition*, les bissectrices intérieure et extérieure, V_0 et V'_0, de V_1, V_2, seront les variétés

$$V_0 = W_0 \oplus v_{12}, \qquad V'_0 = W'_0 \oplus v_{1'2'}.$$

Elles sont encore définies de manière unique, et orthogonales complémentaires dans H. On a encore

$$(S_{V_0}X, X) > 0 \quad \text{pour} \quad X \in V_1 \quad (X \neq 0);$$

mais, dès que $v_{1'2'} \neq 0$, il y a plusieurs symétries S_V (échangeant V_1 et V_2) qui possèdent cette propriété : toutes celles définies par $V = V_0 \oplus v$, où $v \subset v_{1'2'}$.

Cela posé, on a le :

Théorème 2. — *Soit* V_1, V_2 *en position* p'. *Les bissectrices intérieure et extérieure,* V_0 *et* V'_0, *de* V_1, V_2, *sont respectivement les bissectrices extérieure et intérieure de* V'_1, V'_2.

Démonstration : D'après les définitions précédentes et le lemme 4, il suffit d'établir le théorème quand V_1, V_2 sont en position p, ce que nous supposons donc. Soit : $A = P_{V_1} + P_{V_2} - 1$, auto-adjoint borné. Si $X \in V_0$, $X \neq 0$, $P_{V_1}X$ et $P_{V_2}X$ sont symétriques par rapport à V_0, donc

$$AX = 2P_{V_0}P_{V_1}X - X \in V_0,$$

de sorte que V_0 réduit A. De plus,

$$(AX, X) = (2P_{V_0}P_{V_1}X, X) - \|X\|^2 = 2\|P_{V_1}X\|^2 - \|X\|^2 > 0,$$

d'après *b* de la *Propos. 1*. On montre de même que

$$(AX, X) < 0 \quad \text{pour} \quad X \in V'_0 \quad (X \neq 0).$$

Donc (lemme 1) A induit dans V_0 et V'_0 ses parties positive et négative. Soit alors $\bar{S}$ une symétrie échangeant V_1 et V'_2 (en position p) donc aussi

$$V'_1 = \mathcal{H} \ominus V_1 \quad \text{et} \quad V_2 = \mathcal{H} \ominus V'_2;$$

$\bar{S}$ *échange la bissectrice intérieure* V_0 *de* V_1, V_2, *et la bissectrice intérieure de* V'_2, V'_1. D'autre part :

$$\bar{S}A\bar{S}^{-1} = \bar{S}(P_{V_1} + P_{V_2} - 1)\bar{S}^{-1} = P_{V'_2} + P_{V'_1} - 1$$
$$= 1 - P_{V_2} + 1 - P_{V_1} - 1 = -A,$$

donc $\bar{S}$ *échange les parties positive et négative de* A, *et par suite* V_0, V'_0. Donc V'_0 est la bissectrice intérieure de V'_2, V'_1.

Dans la suite, nous désignerons par V^0, V'^0 respectivement la bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure de V_2, V'_1 (donc la bissectrice extérieure et la bissectrice intérieure de V_1, V'_2).

III. — ANNEAU ENGENDRÉ PAR DEUX PROJECTEURS.

Soit V_1, V_2, deux var. l. f. Étudions l'anneau engendré par P_{V_1}, P_{V_2} en commençant par des op. particuliers de cet anneau.

1. — Étude de $A = P_{V_1} + P_{V_2} - 1$.

A est auto-adjoint borné. On a aussitôt :

$$AX = 0 \quad \text{pour} \quad X \in v_{1'2} \oplus v_{12'}, \qquad AX = X \quad \text{pour} \quad X \in v_{12},$$
$$AX = -X \quad \text{pour} \quad X \in v_{1'2'}.$$

Donc $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}$, H réduisent A, et, pour $X \in H$, on a

$$AX = (P_{W_1} + P_{W_2} - 1)X.$$

D'après le lemme 4, on est ramené à étudier le cas où, initialement, V_1 et V_2 sont en position p dans $\mathcal{H}$, ce que nous supposerons désormais.

D'après la démonstration du théorème 2, A est dans le cas p, et induit dans V_0, V'_0 ses parties positive et négative respectivement. Comme toute symétrie échangeant V_1 et V'_2 change, on l'a vu, A en $-$A, le spectre de A est symétrique par rapport à o, compte tenu de la multiplicité.

Borne de A : on a, pour $X \in V_0, \|X\| = 1$,

$$(X, AX) = (X, P_{V_1}X) + (X, P_{V_2}X) - 1 = 2(X, P_{V_1}X) - 1.$$

Remarquons que

$$(X, P_{V_0}P_{V_1}X) = (P_{V_0}X, P_{V_1}X) = (X, P_{V_1}X) = (P_{V_1}X, P_{V_1}X) = \|P_{V_1}X\|^2$$

et que

$$(X, P_{V_0}P_{V_1}X)^2 \leqq \|P_{V_0}P_{V_1}X\|^2$$

ou

$$(X, P_{V_1}X)^2 \leqq (P_{V_0}P_{V_1}X, P_{V_0}P_{V_1}X) = (P_{V_0}P_{V_1}X, P_{V_1}X).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}(X, AX) &\leqq 2(P_{V_0}P_{V_1}X, P_{V_1}X)(P_{V_1}X, P_{V_1}X)^{-1} - 1\\ &= ((2P_{V_0} - 1)P_{V_1}X, P_{V_1}X)\|P_{V_1}X\|^{-2}\\ &= (S_{V_0}P_{V_1}X, P_{V_1}X)\|P_{V_1}X\|^{-2}\\ &= (P_{V_2}X, P_{V_1}X)\|P_{V_1}X\|^{-1}\|P_{V_2}X\|^{-1} = \cos\alpha(P_{V_1}X, P_{V_2}X)\\ &\leqq \cos\alpha(V_1, V_2).\end{aligned}$$

Comme M_A est la borne supérieure de (X, AX) pour $X \in V_0, \|X\| = 1$, on voit que

$$M_A \leqq \cos\alpha(V_1, V_2).$$

D'autre part, pour $Y \in V_1, \|Y\| = 1$, on a

$$AY = P_{V_2}Y;$$

donc, pour $\varepsilon > 0$ et Y bien choisi,

$$\|AY\| = \|P_{V_2}Y\| \geqq \cos\alpha(V_1, V_2) - \varepsilon;$$

d'où

$$M_A \geqq \cos\alpha(V_1, V_2).$$

Ainsi :

Proposition 2 : Soit V_1, V_2, *en position p :* $A = P_{V_1} + P_{V_2} - 1$ *est auto-adjoint borné dans le cas p, et induit dans* V_0, V_0', *ses parties positive et négative respectivement. Le spectre de* A *est symétrique par rapport à* o, *compte tenu de la multiplicité. On a* $M_A = \cos\alpha(V_1, V_2)$.

Soit $\bar{A} = AS_{V_0} = S_{V_0}A$: $\bar{A}$ est auto-adjoint borné. On a

$$\bar{A}X = AX \quad \text{si} \quad X \in V_0, \qquad \bar{A}X = -AX \quad \text{si} \quad X \in V_0',$$

de sorte que $\bar{A}$ est *positif*. D'ailleurs

$$\bar{A}^2 = AS_{V_0}^2A = A^2;$$

donc

$$\bar{A} = \sqrt{A^2}; \quad A = \bar{A}S_{V_0}.$$

Enfin, on peut montrer facilement que $\bar{A}$ est réduit, non-seulement par V_0, V_0', mais aussi par $V_1, V_2, V_1', V_2', V^0, V'^0$.

2. — Étude de $B = P_{V_1} - P_{V_2}$.

L'étude de B se ramène à celle de A, car

$$B = P_{V_1} - (1 - P_{V_2'}) = P_{V_1} + P_{V_2'} - 1.$$

Ainsi

$$BX = 0, \quad \text{pour} \quad X \in \varphi_{12} \oplus \varphi_{1'2'}; \qquad BX = X, \quad \text{pour} \quad X \in \varphi_{12'};$$
$$BX = -X, \quad \text{pour} \quad X \in \varphi_{1'2}; \quad BX = (P_{W_1} - P_{W_2})X, \quad \text{pour} \quad X \in H.$$

On est ramené au cas, que nous examinons désormais, où V_1 et V_2 sont en position p dans $\mathcal{H}$. B est auto-adjoint borné dans le cas p, réduit par V^0, V'^0, où il induit respectivement ses parties positive et négative. Toute symétrie échangeant V_1, V_2, change B en $-$ B, le spectre de B est symétrique par rapport à o, compte tenu de la multiplicité. On a $M_B = \sin\beta(V_1, V_2)$ (nombre qui renseigne donc bien, comme on devait s'y attendre, sur la « distance » de V_1 et V_2).

Soit $\bar{B} = BS_{V^0} = S_{V^0}B$. Comme pour $\bar{A}$, on voit que $\bar{B}$ est auto-adjoint positif, et que $\bar{B} = \sqrt{B^2}$. $\bar{B}$ est réduit, non-seulement par V^0, V'^0, mais aussi par $V_1, V_2, V_1', V_2', V_0, V_0'$ (par exemple, si $X \in V_0$, $P_{V_1}X$ et $P_{V_2}X$ sont symétriques par rapport à V_0, donc $BX \in V_0'$, $\bar{B}X \in V_0$). $\bar{B}$ fait jouer un rôle symétrique à V_1 et V_2, car, si l'on échange V_1 et V_2 dans la définition de $\bar{B}$, on obtient l'op.

$$(P_{V_2} - P_{V_1})S_{V'^0} = (P_{V_1} - P_{V_2})S_{V^0} = \bar{B}.$$

Proposition 3 : On a

$$B = (1 - A^2)^{\frac{1}{2}}S_{V^0}, \qquad A = (1 - B^2)^{\frac{1}{2}}S_{V_0}.$$

Démonstration : On a

$$A^2 = \bar{A}^2 = (P_{V_1} + P_{V_2} - 1)^2 = P_{V_1}P_{V_2} + P_{V_2}P_{V_1} - P_{V_1} - P_{V_2} + 1,$$
$$B^2 = \bar{B}^2 = \quad (P_{V_1} - P_{V_2})^2 \quad = P_{V_1} + P_{V_2} - P_{V_1}P_{V_2} - P_{V_2}P_{V_1};$$

donc

$$\bar{A}^2 + \bar{B}^2 = 1.$$

Comme $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont positifs,

$$\bar{A} = (1 - \bar{B}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{B} = (1 - \bar{A}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

D'où la proposition, d'après la définition de $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

3. — Étude de $C = i(P_{V_1}P_{V_2} - P_{V_2}P_{V_1})$.

Comme $C^* = -i(P_{V_2}P_{V_1} - P_{V_1}P_{V_2}) = C$, C est auto-adjoint borné. Son intérêt est de représenter *le défaut de permutabilité de* P_{V_1} *et* P_{V_2}.

On voit aussitôt que $CX = 0$ pour $X \in \varphi_{12} \cup \varphi_{12'} \cup \varphi_{1'2} \cup \varphi_{1'2'}$, donc pour $X \in \varphi_{12} \oplus \varphi_{12'} \oplus \varphi_{1'2} \oplus \varphi_{1'2'}$. Donc H réduit C, et, dans H,

$$CX = i(P_{W_1}P_{W_2} - P_{W_2}P_{W_1})X.$$

On est ramené à étudier le cas où V_1 et V_2 sont en position p dans $\mathcal{H}$, ce que nous supposons désormais.

Introduisons d'abord certaines variétés. Soit

$$\overline{V} = (1 + iS_{V^0})(V_0), \quad \overline{V}' = (1 - iS_{V^0})(V_0).$$

Soit deux vecteurs X, Y, dans V_0. On a

$$\begin{aligned}&((1 + iS_{V^0})X, (1 - iS_{V^0})Y) \\ &\quad = (X, Y) + (iS_{V^0}X, -iS_{V^0}Y) = (X, Y) - (X, Y) = 0.\end{aligned}$$

Donc $\overline{V}$ et $\overline{V}'$ sont orthogonales. De plus,

$$\begin{aligned}(1 + iS_{V^0})X + (1 - iS_{V^0})X &= 2X, \\ (1 + iS_{V^0})X - (1 - iS_{V^0})X &= 2iS_{V^0}X,\end{aligned}$$

de sorte que $\overline{V} \dotplus \overline{V}'$ contient V_0 et V'_0. Ainsi $\overline{V}$ et $\overline{V}'$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{H}$. D'ailleurs

$$\begin{aligned}\overline{V} &= (S_{V^0} + i)S_{V^0}(V_0) = (S_{V^0} + i)(V'_0) = i(1 - iS_{V^0})(V'_0), \\ \overline{V}' &= (S_{V^0} - i)S_{V^0}(V_0) = (S_{V^0} - i)(V'_0) = -i(1 + iS_{V^0})(V'_0);\end{aligned}$$

de sorte qu'on a aussi

$$\overline{V} = (1 - iS_{V^0})(V'_0), \quad \overline{V}' = (1 + iS_{V^0})(V'_0).$$

[On peut aussi échanger, dans ces formules, les rôles V_0 et V^0, et montrer que

$$\overline{V} = (1 - iS_{V_0})(V^0), \quad \overline{V}' = (1 + iS_{V_0})(V^0),$$

ou

$$\overline{V} = (1 + iS_{V_0})(V'^0), \quad \overline{V}' = (1 - iS_{V_0})(V'^0).]$$

Cela posé, remarquons que

$$S_{V_0}CS^{-1}_{V_0} = S_{V_0}\,i(P_{V_1}P_{V_2} - P_{V_2}P_{V_1})S^{-1}_{V_0} = i(P_{V_2}P_{V_1} - P_{V_1}P_{V_2}) = -C.$$

S_{V_0} *transforme* C *en* $-$C, de sorte que *le spectre de* C *est symétrique par rapport à zéro*. De même,

$$\begin{aligned}S_{V^0}CS^{-1}_{V^0} &= S_{V^0}\,i(P_{V_1}P_{V_2} - P_{V_2}P_{V_1})S^{-1}_{V^0} \\ &= i(P_{V'_2}P_{V'_1} - P_{V'_1}P_{V'_2}) = i(P_{V_2}P_{V_1} - P_{V_1}P_{V_2}) = -C.\end{aligned}$$

Si $X + iS_{V^0}X = Y \, (X \in V_0)$ est un vecteur de $\overline{V}$, on a

$$\begin{aligned}CY &= CX + iCS_{V^0}X = CX - iS_{V^0}CX \\ &= iS_{V^0}(-iS_{V^0}CX) + (-iS_{V^0}CX) = X' + iS_{V^0}X',\end{aligned}$$

où $X' = -iS_{V^0}CX$ appartient à V_0; car, pour $X \in V_0$, $P_{V_1}P_{V_2}X$ et $P_{V_2}P_{V_1}X$ sont symétriques par rapport à V_0, donc $CX \in V'_0$.

Donc $CY \in \overline{V}$, de sorte que $\overline{V}$ *et* $\overline{V}'$ *réduisent* C. S_{V_0}, qui change C en $-$C, échange $\overline{V}$ et $\overline{V}'$: on peut le voir directement, mais cela résulte aussi de ce qui suit. On va montrer en effet *que* C *induit dans* $\overline{V}$ *et* $\overline{V}'$ *respectivement ses parties positive et négative*. Pour cela, prouvons que

$$(X + iS_{V^0}X, C(X + iS_{V^0}X)) > 0, \quad \text{pour} \quad X \in V_0 \quad (X \neq 0).$$

On a

$$\begin{aligned}(X + iS_{V^0}X, C(X + iS_{V^0}X)) &= (X, iCS_{V^0}X) + (iS_{V^0}X, CX) \\ &= (X, iCS_{V^0}X) + (X, -iS_{V^0}CX) \\ &= 2(X, iCS_{V^0}X).\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduits à étudier l'op.

$$\overline{C} = iCS_{V^0} = (P_{V_2}P_{V_1} - P_{V_1}P_{V_2})S_{V^0},$$

qui est auto-adjoint, car

$$\overline{C}^* = -iS^*_{V^0}C^* = -iS_{V^0}C = iCS_{V^0} = \overline{C}.$$

On a

$$\overline{C}(V_0) = C(V'_0) \subset V_0, \quad \overline{C}(V'_0) = C(V_0) \subset V'_0,$$

c'est-à-dire que V_0 et V'_0 réduisent $\overline{C}$. Nous allons montrer (ce qui établira le résultat annoncé) que les parties induites correspondantes sont respectivement les parties positive et négative de $\overline{C}$.

On a

$$\begin{aligned}&(P_{V_1} + P_{V_2} - 1)(P_{V_1} - P_{V_2})S_{V^0} = A\overline{B} \\ &\quad = (P_{V_1} - P_{V_1}P_{V_2} + P_{V_2}P_{V_1} - P_{V_2} - P_{V_1} + P_{V_2})S_{V^0} = \overline{C}, \\ &\qquad \overline{C} = A(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C = -iA(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}S_{V^0}.\end{aligned}$$

Le résultat annoncé résulte alors de l'étude de A.

Remarque : Pour évaluer le défaut de permutabilité de P_{V_1}, P_{V_2}, on peut chercher la borne de C, donc de $\overline{C} = A(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}$. L'étude de A montre aisément que c'est

$$M_C = \sin\alpha(V_1, V_2)\cos\alpha(V_1, V_2) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha(V_1, V_2),$$

dès que

$$\alpha(V_1, V_2) \geqq \frac{\pi}{4}.$$

Si

$$\beta(V_1, V_2) \leqq \frac{\pi}{4},$$

on a

$$\alpha(V'_1, V_2) \geqq \frac{\pi}{4},$$

et l'on remarque que

$$C = -i(P_{V'_1}P_{V_2} - P_{V_2}P_{V'_1});$$

de sorte que

$$M_C = \frac{1}{2}\sin 2\alpha(V'_1, V_2) = \frac{1}{2}\sin 2\beta(V_1, V_2).$$

Dans le cas général, le calcul de M_C nécessite une étude plus précise de la position de V_1 et V_2.

4. — Anneau engendré par deux projecteurs.

Dans ce paragraphe et dans le suivant, nous utiliserons des notions, résultats et notations de [6] et [8].

Étudions l'anneau $M = R(P_{V_1}, P_{V_2}, 1)$ engendré par $P_{V_1}, P_{V_2}, 1$.

Un op. l. borné T avec $D_T = \mathcal{H}$ appartient à M si et seulement si tout unitaire U tel que

$$U(V_1) = V_1, \quad U(V_2) = V_2,$$

transforme T en lui-même ([6], p. 141). Cela montre que $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}, W_1, W_2 \;\eta\; M$ ([6], p. 141). Donc

$$M = R(P_{v_{12}}, P_{v_{12'}}, P_{v_{1'2}}, P_{v_{1'2'}}, P_{W_1}, P_{W_2})\text{(1)}.$$

De la même façon, on voit que tout op. de M est réduit par $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}$, H, induit dans $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}$, des op. multiples de l'identité, induit dans H un opérateur de $R(P_{W_1}, P_{W_2})$. On peut donc se borner au cas où, initialement, V_1 et V_2 sont en position p dans $\mathcal{H}$, ce que nous supposons désormais. Comme V_1 et V_2 jouent alors un rôle symétrique, il faut traiter la question symétriquement en V_1 et V_2.

Nous avons déjà étudié des op. particuliers de M (A, B, C, $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$). Abordons l'étude générale de $M = R(P_{V_1}, P_{V_2})$, anneau qui contient 1.

Théorème 3. — *Soit* V_1, V_2 *en position p.* A *et* V^0 *ayant les significations antérieures, on a*

$$R(P_{V_1}, P_{V_2}) = R(A, S_{V^0}).$$

Démonstration : On a $A \in M$ (c'est évident), et $S_{V^0} \in M$ (d'après le critère déjà utilisé) ; donc $R(A, S_{V^0}) \subset M$. Réciproquement, on a

$$1 = S^2_{V^0} \in R(A, S_{V^0})$$

et

$$B = (1 - A^2)^{\frac{1}{2}} S_{V^0} \in R(A, S_{V^0}).$$

Donc

$$A + 1 = P_{V_1} + P_{V_2} \in R(A, S_{V^0}), \qquad B = P_{V_1} - P_{V_2} \in R(A, S_{V^0});$$

d'où

$$P_{V_1} \in R(A, S_{V^0}), \qquad P_{V_2} \in R(A, S_{V^0})$$
$$M \subset R(A, S_{V^0}).$$

Remarque : S_{V^0} ne fait pas jouer un rôle parfaitement symétrique à V_1, V_2 ; mais l'ensemble V^0, V'^0 respecte la symétrie de V_1, V_2 ; or $S_{V^0} = - S_{V'^0}$.

Lorsque H est séparable, on a :

Théorème 4. — *Soit* V_1, V_2 *en position p.* $R(P_{V_1}, P_{V_2})$ *est l'ensemble des opérateurs* $F(A) + S_{V^0} G(A)$, *où* A, V^0 *ont les significations antérieures, et où* F, G, *sont des fonctions mesurables* B *bornées quelconques.*

Démonstration : En remarquant que

$$A = A^*, \; S_{V^0} = S^*_{V^0}, \; S^2_{V^0} = S_{V^0}, \; AS_{V^0} = - S_{V^0} A,$$

on voit aussitôt que l'ensemble $r(A, S_{V^0})$, engendré algébriquement par A, S_{V^0} ([8], p. 398) est l'ensemble des op.

$$P(A) + S_{V^0} Q(A),$$

où P et Q sont des polynômes quelconques. La fermeture (dans la topologie forte ou faible) de l'ensemble des P(A) est l'anneau abélien engendré par A, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions mesurables B bornées de A.

(1) Cet anneau contient forcément 1, puisque $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}, W_1, W_2$, sous-tendent $\mathcal{H}$ ([8], Satz 6).

Donc, la fermeture (forte ou faible) de $r(A, S_{V^0})$, c'est-à-dire M, contient l'ensemble $\mathcal{F}$ des op. $F(A) + S_{V^0} G(A)$, où F et G sont des fonctions mesurables B bornées quelconques. Si l'on montre que cet ensemble est fortement fermé, on en déduira que $\mathcal{F} = M$.

Soit donc T un op. fortement adhérent à $\mathcal{F}$.

$$P_{V^0} T P_{V^0} + P_{V'_0} T P_{V'_0}$$

est fortement adhérent à l'ensemble des

$$P_{V_0}(F(A) + S_{V^0} G(A)) P_{V_0} + P_{V'_0}(F(A) + S_{V^0} G(A)) P_{V'_0} = F(A),$$

donc est lui-même de la forme $F_1(A)$ (F_1 mesurable B bornée). $P_{V^0} T P_{V'_0} + P_{V'_0} T P_{V_0}$ est fortement adhérent à l'ensemble des

$$P_{V_0}(F(A) + S_{V^0} G(A)) P_{V'_0} + P_{V'_0}(F(A) + S_{V^0} G(A)) P_{V_0} = S_{V^0} G(A),$$

donc est lui-même de la forme $S_{V^0} G_1(A)$ (G_1 mesurable B bornée). Donc

$$T = P_{V_0} T P_{V_0} + P_{V'_0} T P_{V'_0} + P_{V_0} T P_{V'_0} + P_{V'_0} T P_{V_0}$$
$$= F_1(A) + S_{V^0} G_1(A) \in \mathcal{F}.$$

Proposition 4 : L'anneau $R(P_{V_1}, P_{V_2})$, *où* V_1, V_2 *sont en position p, s'obtient en adjoignant à* $r(P_{V_1}, P_{V_2})$, *ensemble des polynômes en* P_{V_1}, P_{V_2}, *toutes les limites fortes de suites extraites de* $r(P_{V_1}, P_{V_2})$.

[Ce résultat s'étend au cas où V_1, V_2 sont quelconques].

Démonstration : F(A), G(A) sont limites fortes de suites de polynômes en A ([8], Satz 9), donc en P_{V_1}, P_{V_2}. Comme V^0 est une variété spectrale de B, on a $S_{V^0} \in R(B)$, et S_{V^0} est limite forte d'une suite de polynômes en B, donc en P_{V_1}, P_{V_2}. Donc, si $T \in M$, on a

$$T = \lim_{n=\infty} f_n(P_{V_1}, P_{V_2}) + \left[\lim_{n=\infty} g_n(P_{V_1}, P_{V_2})\right]\left[\lim_{n=\infty} h_n(P_{V_1}, P_{V_2})\right],$$

où f_n, g_n, h_n sont des polynômes.

Remarque : J. von Neumann a démontré que, si A est auto-adjoint borné, R(A) est l'ensemble des limites fortes de suites extraites de $r(A)$.

On ne sait si ce résultat est exact quand on remplace A par un ensemble $\mathcal{M}$ quelconque d'op. Nous voyons qu'il l'est si $\mathcal{M}$ est l'ensemble de deux projecteurs.

5. — Opérateurs qui permutent avec deux projecteurs.

Soit P_{V_1}, P_{V_2} ces deux projecteurs. Les op. cherchés (on se limite aux op. l. bornés définis dans $\mathcal{H}$) forment l'anneau

$$(P_{V_1}, P_{V_2})' = (R(P_{V_1}, P_{V_2}))' = M'.$$

Un op. T quelconque de M' est réduit par $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}$, H ; les parties induites par T dans $v_{12}, v_{12'}, v_{1'2}, v_{1'2'}$, sont quelconques, et la partie induite dans H permute avec P_{W_1}, P_{W_2}. Nous sommes ramenés au cas, que nous examinons désormais, où V_1, V_2 sont en position p.

THÉORÈME 5. — *L'op. borné fermé* T *est réduit par* V_1 *et* V_2 *en position p, si et seulement si : a)* T *est réduit par* V_0 ; *b) La partie induite par* T *dans* V_0 *permute avec* A ; *c)* S_{V^0} *échange les parties induites par* T *dans* V_0 *et* V'_0.

Démonstration : Les conditions *a), b), c)* expriment exactement que T permute avec A et S_{V^0}, donc que T appartient à $R(A, S_{V^0})' = M'$.

L'étude de M' est donc ramenée à l'étude, dans l'espace V_0, des op. qui permutent avec A. Ceux de ces op. qui sont auto-adjoints sont toutes les fonctions des op. auto-adjoints dont la décomposition de l'unité est plus fine que celle de A.

Proposition 5 : La var. l. f. la plus générale compatible avec V_1, V_2 *en position p s'obtient en prenant une variété* $w \subset V_0$ *réduisant* A, *et en formant* $w \oplus S_{V^0}(w)$.

C'est un cas particulier du théorème 5.

6. — Symétries qui échangent V_1 et V_2 en position p' (étude complète).

Nous savons qu'une symétrie S, échangeant V_1 et V_2, est réduite par $v_{12}, v_{1'2'}$, H, et s'obtient à partir d'une symétrie quelconque dans v_{12}, d'une symétrie quelconque dans $v_{1'2'}$, et d'une symétrie de H échangeant W_1 et W_2. Nous sommes donc ramenés au cas, que nous examinons désormais, où V_1 et V_2 sont en position p dans $\mathcal{H}$.

S conserve l'ensemble V_1, V_2, donc conserve V_0. Par suite (lemme 2).

$$SS_{V_0} = S_{V_0}S = \sigma.$$

D'ailleurs, σ est une symétrie, car

$$\sigma^* = S^*_{V_0}S^* = S_{V_0}S = \sigma,$$
$$\sigma^{-1} = S^{-1}_{V_0}S^{-1} = S_{V_0}S = \sigma,$$

et l'on a $S = \sigma S_{V_0} = S_{V_0}\sigma$. Soit v la variété telle que $\sigma = S_v$. Les conditions relatives à S :

$$S(V_1) = V_2, \quad S(V_2) = V_1,$$

deviennent :

$$S_v S_{V_0}(V_1) = S_v(V_2) = V_2, \quad S_v S_{V_0}(V_2) = S_v(V_1) = V_1.$$

Ainsi v doit (condition nécessaire et suffisante) être compatible avec V_1, V_2. Il suffit alors d'appliquer la proposition 5. Mais montrons qu'on peut achever cette étude par des moyens élémentaires. S_v doit conserver V_1 et V_2, donc aussi $V'_1, V'_2, V_0, V'_0, V^0, V'^0$. Donc :

1) v est compatible avec V_0, V'_0 :

$$v = w \oplus w', \quad \text{où} \quad w \subset V_0, w' \subset V'_0.$$

2) S_{V^0} conserve v (lemme 2), donc $w' = S_{V^0}(w)$. D'autre part, S_v doit transformer A en A, donc v réduit A, donc w réduit la partie induite par A dans V_0. Réciproquement, soit $w \subset V_0$ une variété qui réduit A ; soit

$$w' = S_{V^0}(w) \quad (w' \subset V'_0) \quad \text{et} \quad v = w \oplus w'.$$

Montrons que v est compatible avec V_1 et V_2. Puisque S_{V^0} échange les parties induites par A dans V_0, V'_0, w' réduit A, donc v réduit A; P_v permute avec

$$P_{V_1} + P_{V_2} = A + 1,$$

et aussi avec S_{V^0}, donc avec

$$(1 - A^2)^{\frac{1}{2}} S_{V^0} = B = P_{V_1} - P_{V_2}.$$

Donc P_v permute avec P_{V_1} et P_{V_2}.

La symétrie $S_V = S_{V_0}S_v$ est la symétrie générale cherchée. V est l'ensemble des vecteurs invariants dans $S_{V_0}S_v$, ce qui donne aisément

$$V = w \oplus S_{V^0}(V_0 \ominus w).$$

Donc :

THÉORÈME 6. — *Soit* V_1, V_2 *en position p. La symétrie* S_V *la plus générale échangeant* V_1 *et* V_2 *s'obtient en prenant une variété* $w \subset V_0$ *réduisant* A, *et en formant* $V = w \oplus S_{V^0}(V_0 \ominus w)$.

IV. — APPLICATIONS AUX OPÉRATEURS.

1. Soit U une symétrie de $\mathcal{H}$ échangeant V_1 et V'_1. V_2, en position p avec V_1, est l'image, par rapport à V_1, V'_1, U (¹), d'un op. l. f. A de V_1 dans le cas p ([1], *loc. cit.)*. Cherchons si, pour un bon choix de U, A peut être auto-adjoint.

Soit

$$\overline{V}_2 = S_{V_1}(V_2) = S_{V'_1}(V_2).$$

V'_2 et $\mathcal{H} \ominus \overline{V}_2 = \overline{V}'_2$ sont aussi symétriques par rapport à V_1 et V'_1; donc on peut définir $\overline{V}'_2$ par

$$\overline{V}'_2 = S_{V_1}(V'_2) = S_{V'_1}(V'_2).$$

V'_2 est l'image de $-A^{\star-1}$, $\overline{V}'_2$ l'image de $A^{\star-1}$, $U(\overline{V}'_2)$ l'image de $A^\star$ ([8], et [1], *loc. cit.)*. A *est auto-adjoint si et seulement si* $U(\overline{V}'_2) = V_2$. Donc une symétrie U (s'il en existe) doit (condition nécessaire et suffisante) échanger V_1 et V'_1 d'une part, V_2 et $\overline{V}'_2$ d'autre part (donc aussi V'_2 et $\overline{V}_2$). Soit V la variété telle que $U = S_V$, et $V' = \mathcal{H} \ominus V$. D'après le lemme 3, S_V échange V_1 et V'_1, si et seulement si S_{V_1} échange V et V'. D'où les conditions caractéristiques que voici : α) S_V échange V_2 et $\overline{V}'_2$: β) $S_{V_1}(V) = V'$.

Poursuivons la recherche de S_V dans un cas plus particulier, en imposant à A d'être *positif*. Pour tout vecteur $Z \in V_2$, on doit avoir aussi

$$(P_{V_1}Z, AP_{V_1}Z) = (P_{V_1}Z, UP_{V'_1}Z) \geqq 0 \tag{5}$$

(les conditions déjà imposées à U entraînent que ces produits scalaires sont réels, puisque A est auto-adjoint).

(¹) *Cf.* [1], chapitre I, § 8.

Soit $Z' = UZ$, qui appartient à $\overline{V}'_2$. Puisque U échange V_1 et V'_1, on a

$$P_{V'_1}Z' = UP_{V_1}Z, \quad P_{V_1}Z' = UP_{V'_1}Z;$$

donc

$$(P_{V_1}Z, P_{V_1}Z') = (P_{V'_1}Z', P_{V'_1}Z)$$

ou, puisque ces produits scalaires sont réels,

$$(P_{V_1}Z, P_{V_1}Z') = (P_{V'_1}Z, P_{V'_1}Z').$$

Or

$$(Z, Z') = (P_{V_1}Z, P_{V_1}Z') + (P_{V'_1}Z, P_{V'_1}Z');$$

donc

$$(Z, Z') = 2(P_{V_1}Z, P_{V_1}Z') = 2(P_{V_1}Z, UP_{V'_1}Z).$$

(5) devient alors

$$(Z, Z') = (Z, S_V Z) \geqq 0 \tag{6}$$

pour tout $Z \in V_2$.

Soit alors V_i, V_e les bissectrices intérieure et extérieure de $V_2, \overline{V}'_2$ (1). D'après (6) et la condition α, on doit avoir

$$V = V_i \oplus \nu, \quad \text{où} \quad \nu \subset V'_2 \cap \overline{V}_2$$

(*cf.* p. 390). Or S_{V_1} échange V_2 et $\overline{V}_2$ d'une part, $\overline{V}'_2$ et V'_2 d'autre part; donc

$$S_{V_1}(V) = S_{V_1}(V_i \oplus \nu) = V_e \oplus S_{V_1}(\nu)$$

(d'après le théorème 2), où

$$S_{V_1}(\nu) \subset V_2 \cap \overline{V}'_2.$$

Appliquons alors la condition β qui exige que $V_e \oplus S_{V_1}(\nu)$ soit complémentaire de $V_i \oplus \nu$; on voit qu'il faut que

$$\nu = 0, \quad \text{donc} \quad V = V_i.$$

On obtient ainsi à la fois l'existence et l'unicité de la symétrie $U = S_V$ cherchée.

2. *Applications.* 1) Soit A un op. l. f. dans le cas p de V_1. Cherchons à le mettre sous la forme $A = WK$, où K est auto-adjoint positif et W unitaire. Soit V_2 l'image de A par rapport à V_1, V'_1, U, la symétrie U échangeant V_1 et V'_1. Soit U_0 la symétrie échangeant V_1 et V'_1 pour laquelle V_2 est l'image d'un op. auto-adjoint positif K par rapport à V_1, V'_1, U_0. Soit $X \in D_A$, et Z le vecteur de V_2 tel que $X = P_{V_1}Z$. On a

$$AX = UP_{V'_1}Z, \quad KX = U_0P_{V'_1}Z.$$

Donc

$$AX = UU_0KX,$$

et UU_0 est, dans V_1, un op. unitaire W.

(1) V_2 et $\overline{V}'_2$ sont en position p', c'est-à-dire que $V_2 \cap \overline{V}_2 = V'_2 \cap \overline{V}'_2 = 0$. Montrons par exemple que $V_2 \cap \overline{V}_2 = 0$. Soit $X \in V_2 \cap \overline{V}_2$. On a $S_{V_1}X \in V_2 \cap \overline{V}_2$, donc $X + S_{V_1}X \in V_2 \cap \overline{V}_2$; mais $X + S_{V_1}X \in V_1$, donc $X + S_{V_1}X \in V_1 \cap V_2 = 0$, $X + S_{V_1}X = 0$. Cela entraîne $X \in V'_1$, d'où $X = 0$ puisque $V'_1 \cap V_2 = 0$.

Un raisonnement réciproque analogue montre qu'il y a équivalence entre la recherche de U_0 et la recherche des décompositions $A = WK$. Donc

THÉORÈME 7. — *Soit* A *un op. l. f. dans le cas p. Il existe une décomposition* $A = WK$ *et une seule, avec* K *auto-adjoint positif et* W *unitaire.*

[Le cas des op. l. f. quelconques se traite alors aisément.]

Ce théorème est habituellement déduit de la représentation spectrale des op. auto-adjoints non bornés et de la théorie des fonctions d'op. Nous l'obtenons ici en partant uniquement du principe des images et des théorèmes 1 et 2.

2) Refaisons le raisonnement précédent, dans l'hypothèse où A est auto-adjoint dans le cas p (mais pas forcément positif). U est alors, d'après le § 1, une des symétries qui échangent V_2 et $\overline{V}'_2$; donc UU_0 est une symétrie (*cf.* chap. III § 6) réduite par V_1; la partie induite par UU_0 dans V_1, c'est-à-dire W, est une symétrie. Donc, si A est auto-adjoint dans le cas p, on a $A = WK$, avec K auto-adjoint positif (dans le cas p) et W symétrie. Alors

$$A^* = K^*W^* = KW = A,$$

donc W et K permutent. Posons $W = S_V$; V réduit K. On a $AX = KX$, pour $X \in V$, et $AX = -KX$, pour $X \in V_1 \ominus V$. Les considérations précédentes montrent aussi l'unicité de K et V avec ces propriétés. Si enfin une var. l. f. M réduit A, S_M permute avec A : $S_M A S_M^{-1} = A$; d'où, d'après l'unicité, $S_M V S_M^{-1} = V$: M est compatible avec V. D'où ce résultat, bien connu par d'autres voies moins élémentaires :

THÉORÈME 8. — *Soit* A *auto-adjoint dans le cas p. Il existe une var. l. f.* V *et une seule réduisant* A, *telle que la partie induite par* A *dans* V *soit positive, et la partie induite par* A *dans la complémentaire de* V *soit négative. Toute var. l. f. qui réduit* A *est compatible avec* V.

A partir de là, et d'une manière qui est classique dans le cas des op. l. f. bornés (*cf.* par exemple [10], p. 23), on obtient la décomposition spectrale des op. auto-adjoints.

3. Étant donné deux var. l. f. V_1, V_2 en position p, on a établi au § 1 l'existence d'au moins une symétrie U telle que

$$U(V_1) = V'_1, \; U(V_2) = S_{V_1}(V'_2), \; U(V'_2) = S_{V_1}(V_2).$$

Considérant le produit $S_{V_1}U$, on voit que (résultat annoncé dans [2]) :

THÉORÈME 9. — *Soit deux var. l. f.* V_1, V_2 *en position p. On peut trouver un unitaire* $\mathfrak{U}$, *produit de deux symétries, tel que*

$$\mathfrak{U}(V_1) = V'_1, \quad \mathfrak{U}(V'_1) = V_1, \quad \mathfrak{U}(V_2) = V'_2, \quad \mathfrak{U}(V'_2) = V_2.$$

V. — PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES OPÉRATEURS.

Nous allons grouper dans ce chapitre plusieurs résultats dont certains sont déjà connus; la plupart se rattachent aux considérations précédentes. Il semble intéressant de les envisager du point de vue algébrique, puisqu'ils sont valables, non-seulement dans l'anneau de tous les op. l. f. bornés, mais aussi dans des sous-anneaux de cet anneau.

Dans ce qui suit, M désignera un anneau d'op. (au sens de [8]) quelconque contenant 1.

1) Soit un op. l. f. borné tel que $D_A = \mathcal{H}$. On a la décomposition

$$A = H_1 + iH_2,$$

avec H_1, H_2 auto-adjoints. Il suffit de prendre

$$H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*), \quad H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*).$$

Si, de plus, $A \in M$, alors $H_1 \in M$, $H_2 \in M$ (résultats très-connus).

2) Soit A un op. auto-adjoint borné de borne $M_A \leqq 1$. On a la décomposition

$$A = \frac{1}{2}(U_1 + U_2),$$

avec U_1, U_2 unitaires; il suffit de prendre

$$U_1 = A + i(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}, \quad U_2 = A - i(1 - A^2)^{\frac{1}{2}}$$

(si A est auto-adjoint borné quelconque, on peut appliquer cette décomposition à $M_A^{-1} \cdot A$). Si, de plus, $A \in M$, alors $U_1 \in M$, $U_2 \in M$ ([7], p. 239). Si M_U est l'ensemble des unitaires de M, on voit ainsi que $M = r(M_U)$.

3) Soit A un op. l. f. borné tel que $D_A = \mathcal{H}$, avec $M_A \leqq 1$ (si $M_A > 1$, on peut raisonner sur $M_A^{-1} \cdot A$). Nous allons donner, d'un résultat dû à JULIA [3], une démonstration plus rapide (mais au fond équivalente).

Soit V, W deux var. l. f. orthogonales complémentaires, ayant le même nombre, infini, de dimensions (ce qui suppose le nombre de dimensions de $\mathcal{H}$ infini). Soit I et J des op. isométriques tels que

$$D_J = \mathcal{H}, \quad \Delta_J = V, \quad D_I = V, \quad \Delta_I = W.$$

Définissons un op. B tel que $D_B = V$, $\Delta_B \subset V$, en posant que, pour tout $Y = JX$, on a $BY = JAX$. B étant considéré dans l'espace V, soit B^* son adjoint, opérant aussi dans V. Posons, pour $Y \in V$,

$$UY = BY + I(1 - B^* B)^{\frac{1}{2}} Y. \tag{7}$$

On a

$$\begin{aligned}\| UY \|^2 &= \| BY \|^2 + \| (1 - B^* B)^{\frac{1}{2}} Y \|^2 = \| BY \|^2 + (Y, (1 - B^* B) Y) \\ &= \| Y \|^2.\end{aligned}$$

Donc U transforme isométriquement V en une variété $\bar{V}$ fermée. D'ailleurs, d'après (7),

$$BY = P_V UY.$$

Posons $J' = UJ$; J' transforme isométriquement $\mathcal{H}$ en $\bar{V}$. On a, pour tout $X \in \mathcal{H}$,

$$AX = J^{-1} P_V J' X.$$

Donc

$$A = J^{-1} P_V J'. \tag{8}$$

Comme J' et J^{-1} opèrent isométriquement, on voit que le comportement de A *se déduit de la position relative de* V *et* $\bar{V}$ (*cf.* [3]).

Remarques : Le résultat est établi sans restrictions concernant le nombre infini de dimensions de $\mathcal{H}$. D'autre part, si $A \in M$, on peut effectuer la décomposition (8) avec $J \in M$, $J' \in M$, $V \eta M$, $\bar{V} \eta M$, dès qu'on peut trouver $J \in M$ et $I \in M$ avec les propriétés indiquées (en effet, on peut alors effectuer les constructions de $\bar{V}$ et J' de façon invariante vis-à-vis des unitaires de M'). Lorsque $\mathcal{H}$ est séparable, il en est ainsi, en particulier, si M est un facteur du type I_∞, II_∞, ou III_∞ ([4]).

4) Soit V_0, V'_0 deux var. l. f. orthogonales complémentaires dans $\mathcal{H}$, ayant le même nombre de dimensions (ce qui suppose le nombre de dimensions de $\mathcal{H}$ infini ou pair). Soit, dans l'espace V_0, D un op. auto-adjoint tel que $0 < D < 1$. Soit Σ une symétrie de $\mathcal{H}$ qui échange V_0 et V'_0. Soit V_1 l'image de D par rapport à V_0, V'_0, Σ; V_0 et V_1 sont en position p dans $\mathcal{H}$. Soit

$$V_2 = S_{V_0}(V_1), \quad V'_1 = \mathcal{H} \ominus V_1, \quad V'_2 = \mathcal{H} \ominus V_2.$$

D'après une démonstration déjà faite (*cf.* note, p. 395), V_1 et V_2 sont en position p''. Montrons que V_1 et V_2 sont même en position p, c'est-à-dire que $\varphi_{12'} = \varphi_{1'2} = 0$, par exemple que $\varphi_{12'} = 0$. Si $X \in V_1$ était orthogonal à V_2, X et $S_{V_0}X$ seraient orthogonaux, ce qui donnerait

$$\| P_{V_0} X \| = \| P_{V'_0} X \| = \| D P_{V_0} X \|,$$

ce qui est impossible, puisque $D < 1$.

V'_1 est l'image de $-D^{*-1} = -D^{-1}$ par rapport à V_0, V'_0, Σ. Donc, étant donné $Z \in V_0$, sa décomposition suivant V_1 et V'_1 est de la forme

$$\begin{aligned}Z &= (X + \Sigma DX) + (\Sigma Y - DY) \quad (X \in V_0, Y \in V_0) \\ &= X - DY + \Sigma(DX + Y).\end{aligned}$$

Donc

$$DX + Y = 0, \quad Z = X - DY = X + D^2 X = (1 + D^2) X.$$

D'ailleurs

$$P_{V_1} Z = X + \Sigma DX.$$

Donc

$$P_{V_0} P_{V_1} Z = X = (1 + D^2)^{-1} Z$$

ou, en reprenant la notation $A = P_{V_1} + P_{V_2} - 1$,

$$(A + 1) Z = 2(1 + D^2)^{-1} Z$$

$$AZ = [2(1 + D^2)^{-1} - 1] Z = (1 - D^2)(1 + D^2)^{-1} Z.$$

Utilisons maintenant la théorie des fonctions d'op. On retrouve que $0 < A < 1$ dans V_0. D'ailleurs, tout op. A_1 de l'espace V_0, auto-adjoint est tel que $0 < A_1 < 1$, s'obtient de cette manière, car il suffit de choisir D (vérifiant les conditions imposées plus haut) de façon que

$$A_1 = \frac{1 - D^2}{1 + D^2},$$

ce qui donne

$$D = \left(\frac{1 - A_1}{1 + A_1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{(on aura bien } 0 < D < 1\text{)}.$$

D'ailleurs, la partie induite par A dans V'_0 est unitairement équivalente, on l'a vu, à la partie induite par $-A$ dans V_0. Donc, utilisant le fait que le spectre avec sa multiplicité convenablement définie [11] est un système complet d'invariants unitaires, on a :

Théorème 10. — *Tout op. auto-adjoint* A *dans le cas p tel que* $-1 < A < 1$, *dont le spectre (compte tenu de la multiplicité) est symétrique par rapport à zéro, est de la forme* $P_{V_1} + P_{V_2} - 1$, *où* V_1, V_2 *sont en position p.* [On suppose dimension $\mathcal{H}$ infini ou pair.]

[Cette décomposition n'est pas unique.]

Si V_1 et V_2 ne sont plus en position p, $1, -1, 0$ peuvent appartenir au spectre ponctuel de $P_{V_1} + P_{V_2} - 1$, comme on l'a vu au chapitre III; de sorte que, sans restrictions sur dimension $\mathcal{H}$:

Tout op. auto-adjoint A, tel que $M_A \leq 1$, dont le spectre (compte tenu de la multiplicité) est symétrique par rapport à l'origine, est de la forme $P_{V_1} + P_{V_2} - 1$. Par une généralisation immédiate, on a le théorème suivant :

Théorème 11. — *Tout op. auto-adjoint borné dont le spectre (compte tenu de la multiplicité) est symétrique par rapport à un point, est de la forme* $a(P_{V_1} + P_{V_2}) + b$ (a, b, *nombres réels*).

Si enfin A est un op. auto-adjoint quelconque, on peut trouver deux var. l. f. orthogonales complémentaires ayant même nombre de dimensions et réduisant A, soit V_0, V'_0 (à la seule condition que le nombre de dimensions de $\mathcal{H}$ soit infini ou pair). Considérons l'op. A dans V_0; on peut le prolonger à $\mathcal{H}$ au moyen d'un op. dans V'_0 unitairement équivalent à $-A$ dans V_0, et lui appliquer le résultat précédent. Donc :

Proposition 6 : Tout op. auto-adjoint borné A *peut se mettre sous la forme*

$$A = [a(P_{V_1} + P_{V_2}) + b]P_{V_0} + [c(P_{\overline{V}_1} + P_{\overline{V}_2}) + d]P_{V'_0}$$
$$(a, b, c, d, \textit{nombres réels}).$$

Si l'on a V_0, V'_0 *orthogonales complémentaires dans* $\mathcal{H}$, $V_2 = S_{V_0}(V_1)$, $\overline{V}_2 = S_{V_0}(\overline{V}_1)$.

[Il existe une infinité de telles décompositions. On vérifie aisément que la proposition est exacte si le nombre de dimensions de $\mathcal{H}$ est impair.]

Si la dimension de $\mathcal{H}$ est $\aleph_0$, et si $A \in M$, on peut choisir la décomposition de façon que $V_0, V'_0, V_1, V_2, \overline{V}_1, \overline{V}_2 \,\eta\, M$, lorsque M est un facteur de n'importe quel type sauf du type I_n (le point central étant la détermination des var. l. f., V_0, V'_0 échangées par une symétrie de M). D'où la proposition suivante (immédiate directement pour les facteurs du type I_n) :

Proposition 7 : Soit M *un facteur dans un espace de* Hilbert *séparable. Soit* M_P *l'ensemble des projecteurs de* M. *On a* $M = r(M_P)$.

[Pour tout anneau M, on sait ([8], Satz 2) que $M = R(M_P)$].

La restriction de séparabilité est d'ailleurs faite uniquement parce que les facteurs n'ont été définis jusqu'ici que dans un espace de Hilbert séparable.

5) Soit U un unitaire réel (c'est-à-dire de matrice réelle par rapport à une base orthonormale). Nous utilisons, encore ici, toute la théorie du spectre. Le spectre de U (sur le cercle $|z| = 1$) est symétrique (compte tenu de la multiplicité) par rapport à l'axe $\mathcal{I} z = 0$. Il existe donc une symétrie S_V de $\mathcal{H}$ telle que

$$S_V U S_V^{-1} = U^* = U^{-1}.$$

On a alors

$$(S_V U)^2 = 1,$$

de sorte que l'unitaire $S_V U$ est une symétrie S_W. Donc

$$U = S_V S_W.$$

Le comportement de U dépend encore de *la position relative de* V *et* W.

Proposition 8 : Tout unitaire réel est un produit de deux symétries.

6) Revenant à des procédés très-élémentaires, soit V_1, V'_1, ayant le même nombre de dimensions, orthogonales complémentaires dans $\mathcal{H}$. Soit A un op. l. f. dans V_1, V_2 son image par rapport à V_1, V'_1, U, où U est une symétrie échangeant V_1, V'_1. Supposons A dans le cas p (dans V_1) pour simplifier; V_1 et V_2 sont alors en position p. Soit J (resp. J') un op. isométrique tel que

$$D_J = V_2, \quad \Delta_J = V_1 \quad (\text{resp. } D_{J'} = V'_2, \quad \Delta_{J'} = V_1).$$

a) Soit Z un vecteur quelconque de V_2. On a

$$A(P_{V_1}Z) = UP_{V'_1}Z.$$

Donc, en posant

$$X = P_{V_1}Z, \qquad Y = JZ,$$

on a

$$X = P_{V_1}J^{-1}Y, \qquad AX = UP_{V'_1}J^{-1}Y;$$

$P_{V_1}J^{-1}$ et $UP_{V'_1}J^{-1}$ sont des op. l. f. bornés dans le cas p, dans V_1, soit A_1 et A_2. On a ainsi

$$A = A_2 A_1^{-1}. \tag{9}$$

[Ce résultat et cette démonstration se trouvent dans [3].]

b) Donnons une autre décomposition du même type. En projetant l'égalité $Z = P_{V_1}Z + P_{V'_1}Z$ sur $V'_2 (Z \in V_2)$, on obtient

$$o = P_{V'_2}P_{V_1}Z + P_{V'_2}P_{V'_1}Z.$$

Soit $\overline{Y} = J'P_{V'_2}X$. On a

$$P_{V'_2}X = P_{V'_2}P_{V_1}Z = J'^{-1}\overline{Y} = -P_{V'_2}P_{V'_1}Z = -P_{V'_2}UAX,$$

donc

$$\overline{Y} = -J'P_{V'_2}UAX.$$

$J'P_{V'_2}$ et $-J'P_{V'_2}U$ sont des op. l. f. bornés dans le cas p dans V_1, soit $\overline{A}_1, \overline{A}_2$. On a ainsi

(10) $$A = A_2^{-1}A_1.$$

[On peut passer de (9) à (10) en considérant les adjoints]. Naturellement on peut démontrer (9) et (10) par l'emploi de la décomposition canonique des op. l. f. et de la représentation spectrale des op. auto-adjoints, mais c'est un procédé beaucoup moins élémentaire.

(10) présente sur (9) l'avantage suivant : si l'on prend deux op. l. f. bornés dans le cas p, $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$, l'op. l. $\overline{A} = \overline{A}_2^{-1}\overline{A}_1$ est f.. On ne peut en dire autant à propos de la formule (9). On examine dans [1] les problèmes suivants : 1) étant donné A, quelles sont toutes les représentations du type (10) ou (9) ; 2) quels sont les op. représentés par une formule du type (9).

VI. — INVARIANTS UNITAIRES DE LA FIGURE CONSTITUÉE PAR DEUX VARIÉTÉS FERMÉES.

1. — Réduction du problème.

Soit $V_1, V_2, \mathring{V}_1, \mathring{V}_2$ quatre var. l. f. de $\mathcal{H}$. Posons

$$\mathcal{H} \ominus \mathring{V}_1 = \mathring{V}'_1, \quad \mathring{V}_1 \cap \mathring{V}_2 = \mathring{v}_{12}, \quad \ldots$$

S'il existe un unitaire U tel que

$$U(V_1) = \mathring{V}_1, \quad U(V_2) = \mathring{V}_2,$$

on aura

$$U(V'_1) = \mathring{V}'_1, \quad U(V'_2) = \mathring{V}'_2;$$

$$U(v_{12}) = \mathring{v}_{12}, \quad U(v_{12'}) = \mathring{v}_{12'}, \quad U(v_{1'2}) = \mathring{v}_{1'2}, \quad U(v_{1'2'}) = \mathring{v}_{1'2'};$$

$$U(H) = \mathring{H}, \quad U(W_1) = \mathring{W}_1, \quad U(W_2) = \mathring{W}_2.$$

Donc v_{12} et $\mathring{v}_{12}$ ont même nombre de dimensions ; de même $v_{12'}$ et $\mathring{v}_{12'}$, $v_{1'2}$ et $\mathring{v}_{1'2}$, $v_{1'2'}$ et $\mathring{v}_{1'2'}$, H et $\mathring{H}$; et il existe un op. isométrique $\overline{U}$ (la restriction de U à H) qui transforme W_1 en $\mathring{W}_1$, W_2 en $\mathring{W}_2$.

Réciproquement, si les conditions précédentes sont vérifiées, il est immédiat qu'il existe un unitaire qui transforme V_1 et V_2 respectivement en $\mathring{V}_1$ et $\mathring{V}_2$.

Nous sommes donc ramenés à chercher les conditions d'existence de $\overline{U}$, c'est-à-dire les invariants unitaires de W_1 et W_2 dans l'espace H. Or (lemme 4), W_1 et W_2 sont en position p dans H. Nous supposerons donc désormais que V_1 et V_2 d'une part, $\mathring{V}_1$ et $\mathring{V}_2$ d'autre part, sont en position p (dans $\mathcal{H}$).

2. — Cas où V_1 et V_2 sont en position p (ainsi que $\mathring{V}_1$ et $\mathring{V}_2$).

Proposition 9 : Pour que la figure constituée par V_1 et V_2 en position p soit unitairement équivalente à la figure constituée par $\mathring{V}_1$ et $\mathring{V}_2$ en position p, il faut et il suffit que les op. A et $\mathring{A}$ soient unitairement équivalents.

Démonstration : *a)* La condition est nécessaire. Si

$$U(V_1) = \mathring{V}_1, \quad U(V_2) = \mathring{V}_2,$$

pour un unitaire U, on a

$$UAU^{-1} = \mathring{A}.$$

b) La condition est suffisante. Supposons l'existence d'un U tel que $UAU^{-1} = \mathring{A}$. La restriction J de U à V_0, qui transforme isométriquement V_0 en $\mathring{V}_0$, transforme la partie positive de A (induite par A dans V_0) en la partie positive de $\mathring{A}$ (induite par $\mathring{A}$ dans $\mathring{V}_0$). Définissons un op. J', qui transformera isométriquement V'_0 en $\mathring{V}'_0$, en posant, pour tout $X \in V_0$,

$$J'(S_{V_0}X) = S_{\mathring{V}_0}(JX).$$

[On sait que S_{V_0} échange V_0 et V'_0, et que $S_{\mathring{V}_0}$ échange $\mathring{V}_0$ et $\mathring{V}'_0$]. J et J' définissent dans tout $\mathcal{H}$ un op. unitaire U', qui, par construction, est tel que

$$U'S_{V_0} = S_{\mathring{V}_0}U',$$

dans V_0 et V'_0, donc dans tout $\mathcal{H}$. Donc

(11) $$U'S_{V_0}U'^{-1} = S_{\mathring{V}_0}.$$

D'autre part :

S_{V_0} transforme la partie positive de A en la partie négative de A

$S_{\mathring{V}_0}$ — — $\mathring{A}$ — — $\mathring{A}$

J — — A — positive de $\mathring{A}$.

Donc :

J' transforme la partie négative de A en la partie négative de $\mathring{A}$.

Donc U' transforme A en $\mathring{A}$:

(12) $$U'AU'^{-1} = \mathring{A};$$

(11) et (12) donnent, d'après la proposition 3,

(13) $$U'BU'^{-1} = \mathring{B};$$

(12) et (13) donnent

$$U'P_{V_1}U'^{-1} = P_{\mathring{V}_1}, \quad U'P_{V_2}U'^{-1} = P_{\mathring{V}_2},$$

ou

$$U'(V_1) = \mathring{V}_1, \quad U'(V_2) = \mathring{V}_2.$$

[L'introduction de U' est nécessaire, car on peut montrer qu'en général on n'a pas :

$$U(V_1) = \mathring{V}_1, \quad U(V_2) = \mathring{V}_2.]$$

THÉORÈME 12 : *Pour que la figure constituée par V_1 et V_2 en position p soit unitairement équivalente à la figure constituée par $\mathring{V}_1$ et $\mathring{V}_2$ en position p, il faut et il suffit que le spectre de la partie positive de A soit identique (compte tenu de la multiplicité) au spectre de la partie positive de $\mathring{A}$. Ce spectre constitue donc un système complet d'invariants unitaires de la figure considérée.*

Démonstration : La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante, car, si elle est remplie, le spectre de A est identique, compte tenu de la multiplicité, au spectre de $\mathring{A}$, puisque S_{V^0} (resp. $S_{\mathring{V}^0}$) échange les parties positive et négative de A (resp. $\mathring{A}$) ; donc A et $\mathring{A}$ sont unitairement équivalents d'après la théorie de l'équivalence unitaire des op. auto-adjoints bornés (que nous devons donc utiliser ici) ; il suffit alors d'appliquer la proposition 9.

Remarque : Le théorème 10 montre que le spectre introduit dans le théorème 12 peut être choisi arbitrairement sur l'intervalle ouvert $]0,1[$.

(manuscrit reçu le 5 avril 1948)

BIBLIOGRAPHIE

[1] DIXMIER (J.) : Étude sur les variétés et les opérateurs de JULIA, avec quelques applications (à paraître au *Bulletin de la Société mathématique de France*).

[2] DIXMIER (J.) : Sur une classe nouvelle de variétés linéaires et d'opérateurs linéaires de l'espace de HILBERT *(C. R. Ac. Sc.*, **223**, 1946, p. 971).

[3] JULIA (G.) : Sur les projections des systèmes orthonormaux de l'espace hilbertien *(C. R. Ac. Sc.*, **218**, 1944, p. 892). Les projections des systèmes orthonormaux de l'espace hilbertien et les opérateurs bornés *(C. R. Ac. Sc.*, **219**, 1944, p. 8). Sur la représentation analytique des opérateurs bornés ou fermés de l'espace hilbertien *(C. R. Ac. Sc.*, **219**, 1944, p. 225).

[4] JULIA (G.) : Les symétries dans l'espace hilbertien *(C. R. Ac. Sc.*, **221**, 1945, p. 81).

[5] JULIA (G.) : Sur les racines carrées hermitiennes d'un opérateur hermitien positif donné *(C. R. Ac. Sc.*, **222**, 1946, p. 707).

[6] MURRAY (F. J.) & NEUMANN (J. v.) : On rings of operators *(Ann. of Math.*, **37**, 1936, p. 116).

[7] MURRAY (F. J.) & NEUMANN (J. v.) : On rings of operators, II *(Trans. Amer. Math. Soc.*, **41**, 1937, p. 208).

[8] NEUMANN (J. v.) : Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren *(Math. Ann.*, **102**, 1929, p. 370).

[9] NEUMANN (J. v.) : Über adjungierte Funktionaloperatoren *(Ann. of Math.*, **33**, 1932, p. 294).

[10] Sz. NAGY (B. v.) : Spektraldarstellung linearer transformationen des Hilbertschen Raumes *(Erg. der. Math.*, **5**, 1942).

[11] WECKEN (F.) : Unitärinvarianten selbstadjungierter Operatoren *(Math. Ann.*, **116**, 1939, p. 422).