Cours de Calcul opérationnel appliqué (transformation de Carson-Laplace)

M. Denis-Papin
(Ingénieur diplômé de l'Université de Grenoble)

Commandant A. Kaufmann
(Ingénieur I.R.G., Docteur de l'Université de Grenoble)

PRÉFACE

Le calcul opérationnel, méthode élégante et efficace d'étude des régimes transitoires, est enseigné en France depuis peu d'années seulement. Faut-il voir la cause de ce retard dans la présentation un peu hétérodoxe que lui a donnée son auteur Oliver Heaviside, qui se souciait davantage des résultats que de leur démonstration rigoureuse, ou est-ce parce que l'objet même du calcul, l'établissement des courants, ne presentait pas un attrait suffisant aux techniciens français, ou encore est-ce parce que ceux-ci, compatriotes de Fourier, préféraient les méthodes classiques pour les rares cas qu'ils avaient à traiter ?

Le premier obstacle est levé depuis une vingtaine d'années, grâce aux travaux de Carson, Paul Levy, Datsch, pour ne citer que les plus importants ; le calcul opérationnel forme maintenant un corps de doctrine cohérent, susceptible de supporter la censure des mathématiciens les plus exigeants.

Simultanément, au fur et à mesure que les états permanents et stationnaires étaient mieux connus, l'intérêt des physiciens et des ingénieurs s'est tourné davantage vers les régimes transitoires. Ces régimes attirent naturellement l'attention des spécialistes de la radio ou des télécommunications, pour la reproduction fidèle de la musique, et même, plus simplement, pour celles des consonnes du langage. Ils se sont imposés à l'étude des électrotechniciens "courant fort" depuis que la tension normale des lignes de transport de force est du même ordre que celle des coups de foudre ; les surtensions dangereuses étaient, autrefois, uniquement d'origine atmosphérique ; les régimes transitoires, lors des manoeuvres de coupure ou de fermeture, créent maintenant les surtensions les plus dangereuses et provoquent le plus d'accidents au matériel.

Cet intérêt s'est manifesté par la publication de nombreux ouvrages sur le calcul opérationnel, tant en France que dans le reste du monde. Le Cours rédigé par le Capitaine Kaufmann et M. Denis-Papin ne fera pas double emploi avec eux. Il est destiné aux techniciens et élèves-ingénieurs ; c'est dire que les auteurs ne présupposent pas une formation mathématique particulière : leur livre est accessible aux anciens élèves des classes de Mathématiques Spéciales, qui auront bien voulu retenir, de l'Enseignement reçu, autre chose que de simples mécanismes de calculs.

Référence du cours sur Gallica : https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k48050112/.
Traduction des 30 premières sections, Denise Vella-Chemla, novembre 2021.

L'exposé, comme dans tous les ouvrages récents, abandonne la méthode d'Heaviside, maintenant historique, pour s'appuyer sur la transformation de Laplace et l'intégrale de Carson. Les auteurs traitent de nombreuses applications et proposent des exercices variés, non seulement d'Électrotechnique, mais aussi de Mécanique. Par son allure concrète, cet ouvrage rappelle les livres anglo-saxons, ce qui plaira aux techniciens français.

Je souhaite à ce livre un vif succès, pour l'amour du calcul opérationnel d'abord, et ensuite pour les services qu'il pourra rendre. M. Denis-Papin est un spécialiste apprécié de la rédaction de livres pour ingénieurs ; le Capitaine Kaufmann, qui fut mon élève à Grenoble, me paraît quelquefois un peu égaré dans l'Armée, tant il a le goût de l'Enseignement. Sans doute écrira-t-il encore d'autres ouvrages didactiques, s'il obéit à ses penchants. Les lecteurs ne pourront qu'y gagner, et les militaires aussi, car l'Enseignement est, au fond, tâche essentielle de l'armée du temps de paix.

Espérons que cet ouvrage contribuera à une diffusion rapide du calcul opérationnel, en donnant aux ingénieurs des vues fécondes sur les phénomènes transitoires, et que tous les électriciens, tant constructeurs qu'exploitants, tant en haute qu'en basse fréquence, y trouveront leur profit.

F. ESCLANGON,
Janvier 1950.

AVERTISSEMENT POUR LA 2^{e} ÉDITION

Le succès de ce livre, tant à l'étranger qu'en France, son épuisement relativement rapide (eu égard à la nature du sujet et au caractère d'avant garde de la méthode d'exposition) nous ont fait un agréable devoir d'en publier une nouvelle édition soigneusement revue et corrigée, avec une bibliographie mise à jour.

Nous sommes très heureux d'avoir pu montrer à nos lecteurs fidèles, étudiants et ingénieurs, que les mathématiques ne sont pas uniquement une création abstraite de l'imagination humaine : elles constituent aussi, et surtout, un instrument très puissant qui permet à des hommes dont le cerveau est peut-être près des nuages, mais dont les pieds sont solidement posés sur terre, d'étudier et de dominer les phénomènes naturels.

Ce caractère pratique, nous l'avions souligné au moyen de nombreuses applications numériques venant à l'appui des divers exposés, puis en proposant d'encore plus nombreux exercices non résolus.

Les lecteurs qui auraient besoin d'être guidés dans la marche à suivre, ou qui voudraient vérifier leurs résultats, trouveront les solutions de ces exercices (entièrement développées, pour la plupart d'entre eux) dans notre ouvrage publié aux Editions Eyrolles : *Exercices de Calcul opérationnel avec leurs Solutions*[1].

*

*   *

La transformation employée dans le présent cours est celle de Carson-Laplace :

$$g(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt,$$

avec la notation (non reconnue par l'AFNOR, mais utilisée internationalement) :

$$\mathbf{L}h(t),$$

et non pas celle de Laplace proprement dite :

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt}pth(t)dt.$$

Cette préférence se justifie de la manière suivante.

Au moyen de la transformation de Carson-Laplace :

1^{o} La transformée d'une constante est une constante.

2^{o} Les équations aux dimensions (donc l'homogénéité) sont conservées dans la transformation.

1. Un ouvrage analogue concerne le Calcul matriciel et tensoriel.

3° Les considérations de Heaviside sur la notion d'opérateur différentiel sont conservées, sans multiplication par p de la transformée.

4° L'emploi des méthodes matricielles et tensorielles est difficilement compatible, sans risques d'erreurs lors des mises en équation, avec la transformation de Laplace proprement dite, où il faut prendre $\dfrac{f(O)}{p}$ pour valeur initiale de $f(t)$.

5° Pour rester conformes à la philosophie de l'enseignement des sciences physiques dans l'état actuel de nos connaissances, il est nécessaire d'employer Carson-Laplace quand le point de vue est *énergétique* : Laplace convient, au contraire, quand ce point de vue est *informationnel.*

*
* *

Le Professeur G. Aprile, de l'Université de Palerme, et M. P. Bertram, Ingénieur I. E. G., nous avaient gracieusement apporté leur concours, respectivement dans l'établissement de la Bibliographie, et dans la correction et la mise au point des épreuves de la 1re édition. M. Thouzery, Ingénieur-Electronicien, et M. R. Faure, ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure, nous ont, les premiers, puis fidèlement ensuite, signalé des erreurs matérielles et des perfectionnements possibles, dont bénéficie l'édition actuelle. Ce dernier nous a, au surplus, aidés puissamment à établir les solutions des exercices et à rédiger les ouvrages mentionnés ci-dessus.

Le Professeur F. Esclangon, alors directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique de Grenoble, avait accordé son haut patronage à notre entreprise (quelque peu révolutionnaire...). Nous saluons avec émotion, la mémoire de cet éminent savant tombé, le 5 mai 1956, au champ d'honneur de la Science [2]. Des élèves de la Promotion du Travail de Grenoble, nous étaient venus et nous viennent toujours de précieux encouragements ; également de l'illustre ingénieur américain Gabriel Kron, et de M. Pingoud, ingénieur de l'Université de Lausanne. A tous, nous tenons à exprimer publiquement notre profonde gratitude.

M. D. P. A. K.
Juin 1956.

P. S. On trouvera, dans l'*Aide-mémoire Dunod de Mathématiques générales*, par M. Denis-Papin, les tables numériques simplifiées de toutes les fonctions qui apparaissent dans l'ouvrage (exponentielles, circulaires, hyperboliques, de Bessel, d'erreur, etc.).

2. Le Professeur Esclangon est mort tragiquement, par électrocution, en faisant un cours sur les rayons X aux étudiants du P. C. B., il venait d'être nommé professeur à la Sorbonne, et directeur du Laboratoire central des Industries électriques.
Il avait préfacé nos *Cours opérationnel, matriciel et tensoriel* assurant par là-même leur succès.

COURS DE CALCUL OPÉRATIONNEL APPLIQUÉ

"On pourrait dire assez justement que ces méthodes sont le romantisme des mathématiques. Comparées à nos pures et nobles méthodes classiques, elles représentent Victor Hugo à côté de Corneille ou de Racine."

Paul JANET

Chapitre I

La transformation de CARSON-LAPLACE

1. Introduction.

La transformation de Carson-Laplace permet de transformer des **équations linéaires** différentielles, intégrales ou aux différences en équations algébriques faciles à résoudre.

Nous attirons l'attention du lecteur sur la considération importante suivante : le calcul opérationnel n'est pas spécifiquement, un moyen d'*investigation mathématique*, mais surtout un *procédé commode et élégant* permettant le calcul des solutions des équations des phénomènes physiques.

2. La base mathématique. - L'intégrale de Carson-Laplace.

Considérons l'intégrale définie suivante :

(2.1) $$I = p\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt,$$

où $h(t)$ est une fonction réelle de t et p est un paramètre complexe indépendant de t.

Il importe que l'intégrale définie (2.1) ait un sens, pour cela il suffit puisque p est une grandeur complexe, que le module de (2.1) soit convergent ; or, nous pouvons écrire :

(2.2) $$\left|\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt\right| < \int_0^\infty |e^{-pt}h(t)|dt$$

et

(2.3) $$|e^{-pt}h(t)| = |e^{-pt}||h(t)| = e^{-ct}|h(t)|,$$

en posant :

(2.4) $$\operatorname{Re} p = c > 0,$$

où Re veut dire "partie réelle de".

En tenant compte de (2.3) et (2.4), (2.2) devient

(2.5) $$\left|\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt\right| < \int_0^\infty e^{-ct}|h(t)|dt$$

Donc, pour que l'intégrale (2.1) ait un sens il suffit que

(2.6) $$\int_0^\infty e^{-ct}|h(t)|dt \text{ soit convergente.}$$

Pour que cette intégrale soit convergente, il est nécessaire que $h(t)$ soit continue dans l'intervalle considéré [3] et d'ordre exponentiel.

On dit qu'une fonction est d'*ordre exponentiel* pour $t \to \infty$ si une constante réelle α existe de telle sorte que :

(2.7) $$\lim_{t\to\infty} e^{-\alpha t}h(t) = M \qquad \text{où M est une constante finie.}$$

Exemples

Les fonctions t^n et e^{4t} conviennent, car elles sont d'ordre exponentiel (ordre zéro et ordre 4). La fonction $e^{(t^2)}$ ne convient pas, elle n'est pas d'ordre exponentiel.

3. La transformation de Carson-Laplace.

Considérons une fonction $h(t)$ d'ordre exponentiel, continue, et telle que :

(3.1) $$h(t) = 0 \qquad \text{pour } t < 0.$$

Nous appellerons *transformée de Carson-Laplace* de $h(t)$ la fontion $g(p)$ obtenue au moyen de l'intégrale de Carson-Laplace [4].

(3.2) $$g(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt, \qquad \text{avec } \mathrm{Re}\, p = c > 0.$$

4. Écriture et symboles.

Pour simplifier l'écriture nous écrirons, au lieu de (3.2)

(4.1) $$g(p) = \mathbf{L}h(t),$$

où $\mathbf{L}h(t)$ veut dire “transformée de Carson-Laplace de $h(t)$”.

En utilisant le symbole $\mathbf{L}$ pour cette transformation, nous abandonnerons son utilisation pour les logarithmes népériens, nous utiliserons pour ceux-ci le symbole “*ln*”.

3. Propriété qui peut être étendue à une fonction présentant des variations brusques mais finies : exemple :

$$\begin{aligned} h(t) &= 0 \quad \text{pour } t < a \\ &= A \quad \text{pour } a < t < b \\ &= 0 \quad \text{pour } b < t. \end{aligned}$$

4. On la nomme aussi “intégrale” ou “transformée de Carson”. Voir chap. IV, § 67.

Certains auteurs écrivent en employant un signe dit "de correspondance".

(4.2) $$g(p) \quad \subset \quad h(t)$$

(4.3) $$g(p) \quad \doteqdot \quad h(t)$$

(4.4) $$g(p) \quad \bullet\!\!-\!\!\circ \quad h(t)$$

(4.5) $$\overline{h(p)} \quad = \quad h(t).$$

Ces signes qui représentent une égalité symbolique sont à déconseiller étant donné la confusion possible avec une égalité réelle.

On appelle souvent :

$h(t)$ "fonction objet" ou "original",
$g(p)$ "fonction image" ou "image".

Nous conseillons vivement la notation (4.1).

Par ailleurs, nous utiliserons souvent la notation

(4.6) $$h(t) = \mathbf{L}^{-1} g(p),$$

où $\mathbf{L}^{-1}$ est un symbole qui signifie "transformée inverse de". Nous montrerons plus loin que cette transformation inverse correspond à une intégration de $g(p)$ dans le plan complexe p. (Transformation de Mellin-Fourier).

5. Exemples de calcul de transformées.

1er exemple :

Soit

(5.1) $$\begin{aligned} h(t) &= at \qquad \text{pour} \qquad t > 0 \\ &= 0 \qquad \text{pour} \qquad t < 0, \end{aligned}$$

où a est une constante.

Calculons

(5.2) $$g(p) = \mathbf{L}\, at.$$

On a :

(5.3) $$\mathbf{L}\, at = p \int_0^\infty at\, e^{-pt} dt = ap \int_0^\infty te^{-pt} dt;$$

intégrons par parties :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}\,at &= \left.\frac{apt\,e^{-pt}}{-p}\right|_0^\infty - ap\int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{-p}dt \\
&= \left.-ate^{-pt}\right|_0^\infty - \left.\frac{a}{p}e^{-pt}\right|_0^\infty \qquad (5.4)\\
&= \frac{a}{p}.
\end{aligned}
$$

Donc : (5.5) $$\mathbf{L}\,at = \frac{a}{p}$$

2e exemple :

Soit

(5.6)
$$
\begin{aligned}
h(t) &= e^{-mt} \quad \text{pour} \quad t > 0 \\
&= 0 \quad \text{pour} \quad t < 0.
\end{aligned}
$$

Calculons $\mathbf{L}\,e^{-mt}$.

Nous aurons :

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}\,e^{-mt} &= p\int_0^\infty e^{-pt}e^{-mt}dt \\
&= p\int_0^\infty e^{-(p+m)t}dt \\
&= p\left.\frac{e^{-(p+m)t}}{-(p+m)}\right|_0^\infty \qquad (5.7)\\
&= \frac{p}{p+m}
\end{aligned}
$$

donc

(5.8) $$\mathbf{L}\,e^{-mt} = \frac{p}{p+m}.$$

6. Tables de transformées de Carson-Laplace.

Les mathématiciens ont établi des tables donnant les transformés Carson-Laplace correspondant à un grand nombre de fonctions. Nous verrons dans divers exemples comment utiliser ces tables. A la fin du présent ouvrage nous donnerons une table suffisamment complète pour les divers problème que nous examinerons.

Par exemple, par lecture sur la table on peut voir que :

(6.1) $$\mathbf{L}\,e^{-at} = \frac{p}{p+a}, \qquad (N^{\text{o}}\ 9)$$

(6.2) $$\mathbf{L}\ \ t\ \mathrm{e}^{-at} = \frac{p}{(p+a)^2}, \qquad (N^{\text{o}}\ 26)$$

$$\mathbf{L} \quad t \sin t = \frac{2p^2}{(p^2+1)^2}, \tag{6.3}$$
(N^o 85)

7. Unicité des transformées directes et inverses.

Nous savons qu'à chaque fonction $h(t)$ correspond une fonction $g(p)$ obtenue au moyen de l'intégrale de Carson-Laplace. L'intégration donne une fonction $g(p)$ unique si la fonction $h(t)$ est définie et uniforme dans l'intervalle d'intégration. Au sens mathématique du mot “unicité” on ne peut pas dire que chaque fonction $g(p)$ a une transformée inverse $h(t)$ unique, en effet, les 2 fonctions $h_1(t)$ et $h_2(t)$ suivantes ont même transformée.

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} h_1(t) &= 0 && \text{pour} && t < 0 \\ &= at && \text{pour} && t > 0. \end{aligned}$$

$$(7.2) \qquad \begin{aligned} h_2(t) &= 0 && \text{pour} && t < 0 \\ &= at && \text{pour} && 0 < t < d, \quad \text{où } A \text{ a une valeur quelconque} \\ &= A && \text{pour} && t = d \\ &= at && \text{pour} && d < t < \infty. \end{aligned}$$

Autrement dit $h_2(t)$ est égal à $h_1(t)$, avec en plus un point isolé. En intégrant $h_1(t)$ nous avons trouvé :

$$\mathbf{L}\, at = \frac{a}{p}. \tag{7.3}$$

En intégrant $h_2(t)$ nous obtiendrons :

$$\mathbf{L}\, h_2(t) = p\int_0^d at\, e^{-pt}dt + p\int_d^d A\, e^{-pt}dt + p\int_d^\infty at\, e^{-pt}dt \tag{7.4}$$

Mais l'intégrale :

$$\int_d^d A\, e^{-pt}dt \tag{7.5}$$

est évidemment nulle, il en résulte que

$$\mathbf{L}\, h_2(t) = p\int_0^\infty at\, e^{-pt}dt = \frac{a}{p}. \tag{7.6}$$

Les 2 fonctions $h_1(t)$ et $h_2(t)$ ont même transformée $g(p)$, il en résulte que $g(p)$ admet une infinité de transformées inverses (A et d sont quelconques) toutes différentes de $h_1(t)$ par un ou plusieurs points isolés.

Comme ces points isolés n'ont aucun sens au point de vue physique et que nous destinons la présente méthode de calcul à l'étude des phénomènes physiques, nous dirons que les fonctions $h(t)$ et $g(p)$ sont réciproquement uniques.

8. Théorème 1.

La transformée d'une constante est cette constante.

$$\mathbf{L}\, A = A \qquad \text{où} \qquad A \text{ est une constante.} \tag{8.1}$$

En effet :

(8.2) $$\mathbf{L}\,A = \int_0^\infty A\,e^{-pt}dt = A\,p\int_0^\infty\, e^{-pt}dt = A\,p\,\frac{e^{-pt}}{-p}\Big|_0^\infty =\; A.$$

9. Théorème 2.

Si (9.1) $$\mathbf{L}\,h(t) = g(p),$$

on a

(9.2) $$\mathbf{L}\,A\,h(t) = A\,g(p).$$

En effet :

(9.3) $$\mathbf{L}, A\,h(t) = p\int_0^\infty A\,h(t)\,e^{-pt}dt = A\,p\int_0^\infty\, h(t)\,e^{-pt}dt = A\,g(p).$$

10. Théorème 3.

La transformée d'une somme de fonctions est égale à la somme des transformées.

(10.1) $$\mathbf{L}[h_1(t) + h_2(t)] = \mathbf{L}h_1(t) + \mathbf{L}h_2(t)$$

Ceci est une propriété des intégrales ; on sait que l'intégrale d'une somme de fonctions est égale à la somme des intégrales.

11. Théorème 4.

(11.1) Si $$\mathbf{L}\,h(t) = g(p),$$

(11.2) alors $$\mathbf{L}\frac{dh}{dt} = p\,g(p) - p\,h(0),$$

où $h(0)$ veut dire $h(t)$ pour $t = 0$, t tendant vers zéro par les valeurs positives [5].

De même :

(11.3) $$\mathbf{L}\frac{d^2h}{dt^2} = p^2g(p) - p^2h(0) - p\,h'(0),$$

(11.4) $$\mathbf{L}\frac{d^3h}{dt^3} = p^3g(p) - p^3h(0) - p^2h'(0) - p\,h''(0),$$

Et pour une dérivée d'ordre n :

(11.5) $$\mathbf{L}\frac{d^nh}{dt^n} = p^ng(p) - \sum_{r=0}^{r=n-1} h^{(r)}(0)p^{n-r}, \qquad \text{où } h^{(r)}(0) = \frac{d^{(r)}h}{dt^r} \text{ pour } t = 0.$$

Pour démontrer (11.2), nous ferons une intégration par parties :

(11.6) $$\begin{aligned}\mathbf{L}\frac{dh}{dt} &= p\int_0^\infty \frac{dh}{dt}e^{-p}dt = p\,h(t)\,e^{-pt}\Big|_0^\infty + p^2\int_0^\infty h(t)\,e^{-pt}dt\\ &= p\mathbf{L}h(t) - p\,h(0).\end{aligned}$$

5. Dans tout ce qui suivra, $h(0)$ signifiera $h(+0)$, valeur de h pour t tendant vers zéro par les valeurs positives.

Pour démontrer (11.3), (11.4) et (11.5),on procédera de même en intégrant par parties autant de fois qu'il sera nécessaire.

12. Théorème 5.

Si

(12.1) $$\mathbf{L}h(t) = g(p),$$

on a

(12.2) $$\mathbf{L}\int_0^t h(u)du = \frac{g(p)}{p}.$$

En effet, posons :

(12.3) $$\varphi(t) = \int_0^t h(u)du,$$

il vient

(12.4) $$\varphi(0) = 0,$$

et

(12.5) $$\frac{d\varphi(t)}{dt} = h(t).$$

On a donc :

(12.6) $$\mathbf{L}\frac{d\varphi(t)}{dt} = p\mathbf{L}\varphi(t) = p\mathbf{L}\int_0^t h(u)du.$$

Mais d'après (12.5) :

(12.7) $$\mathbf{L}\frac{d\varphi(t)}{dt} = \mathbf{L}h(t) = g(p)$$

en comparant (12.6) et (12.7) on trouve bien (12.2).

De la même façon on peut démontrer que :

(12.8) $$\mathbf{L}\int_0^t \int_0^\tau h(\lambda)d\lambda d\tau = \frac{g(p)}{p^n}.$$

et d'une façon générale :

(12.9) $$\mathbf{L}\underbrace{\int_0^t \int_0^\tau \dots \int_0^\nu}_{n \text{ sommations}} h(\mu)d\mu \dots d\tau = \frac{g(p)}{p^n}.$$

13. Théorème 6.

(13.1) Si $$\mathbf{L}h(t) = g(p),$$

on a

(13.2) $$\mathbf{L}h(kt) = g\left(\frac{p}{k}\right)$$

En effet :
(13.3) $$\mathbf{L}h(kt) = p\int_0^\infty e^{-pt}h(kt)dt.$$

Posons (13.4) $$kt = u, \quad \text{il vient :}$$

(13.5) $$\mathbf{L}h(kt) = \frac{p}{k}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{k}u}h(u)du = g\left(\frac{p}{k}\right).$$

14. Théorème 7.

(14.1) Si $$\mathbf{L}h(t) = g(p),$$

alors :
(14.2) $$\mathbf{L}[e^{at}h(t)] = \frac{p}{p-a}g(p-a).$$

En effet :

(14.3)
$$\begin{aligned}\mathbf{L}[e^{at}h(t)] &= p\int_0^\infty e^{-pt}e^{at}h(t)dt \\ &= p\int_0^\infty e^{-(p-a)t}h(t)dt \\ &= \frac{p}{p-a}.(p-a)\int_0^\infty e^{-(p-a)t}h(t)dt \\ &= \frac{p}{p-a}g(p-a).\end{aligned}$$

15. Exemples concernant l'utilisation des théorèmes 4 à 7.

1^er^ *exemple.* Théorème 4.

(15.1) Calculer $$\mathbf{L}\cos\ at.$$

Nous utiliserons la formule (11.3) ;
Soit
(15.2) $$h(t) = \cos\ at.$$

[Sous-entendu : $h(t) = 0$ pour $t < 0$; $h(t) = \cos\ at$ pour $t > 0$.].
Nous avons aussi :
(15.3) $$\frac{dh}{dt} = -a\sin\ at,$$

(15.4) $$\frac{d^2h}{dt^2} = -a^2\cos\ at,$$

si nous remarquons que :
(15.5) $$\sin\ at = 0 \qquad \text{pour} \qquad t = 0.$$

Il vient :

(15.6) $$-\mathbf{L}a^2\cos\ at = p^2\mathbf{L}\cos\ at - p^2,$$

ou

(15.7) $$-a^2\mathbf{L}\cos\ at = p^2\mathbf{L}\cos\ at - p^2,$$

ce qui donne

(15.8) $$\mathbf{L}\cos\ at = \frac{p^2}{p^2+a^2}.$$

2e exemple. Théorème 5.

(15.9) Calculer $$\mathbf{L}t^n \qquad \text{où} \qquad n = 1, 2, 3, 4, ...$$

On peut écrire :

(15.10) $$\int_0^t\int_0^\tau\dots\int_0^\nu d\mu\dots d\tau = \frac{t^n}{n!}\ ;$$

mais d'après (12.9),

(15.11) $$\mathbf{L}\int_0^t\int_0^\tau\dots\int_0^\nu d\mu\dots d\tau = \frac{1}{p^n}$$

Donc :

(15.12) $$\mathbf{L}\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{p^n}$$

et

(15.13) $$\mathbf{L}t^n = \frac{n!}{p^n}$$

3e exemple. Théorème 6.

(15.14) Sachant que $$\mathbf{L}\,\mathrm{ch}\ t = \frac{p^2}{p^2-1}$$

(15.15) trouver $$\mathbf{L}\,\mathrm{ch}\ at$$

En appliquant la formule (13.2), il vient :

(15.16) $$\mathbf{L}\,\mathrm{ch}\ at = \frac{\frac{p^2}{a^2}}{\frac{p^2}{a^2}-1} = \frac{p^2}{p^2-a^2}.$$

4e exemple. Théorème 7.

(15.17) Calculer : $$\mathbf{L}e^{at}\sin mt.$$

On a :

(15.18) $$\mathbf{L}\sin mt = \frac{pm}{p^2+m^2}.$$

En appliquant la formule (14.2), il vient :

(15.19) $$\mathbf{L}e^{at}\sin mt = \frac{p}{p-a}\cdot\frac{(p-a)m}{(p-a)^2+m^2} = \frac{pm}{(p-a)^2+m^2}.$$

16. Théorème 8.

(16.1) Si $$\mathbf{L}h(t) = g(p),$$

(16.2) $$\mathbf{L}[th(t)] = -p\frac{d}{dp}\left[\frac{g(p)}{p}\right]$$

En effet :

(16.3) $$\frac{g(p)}{p} = \int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt$$

et

(16.4) $$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\left[\frac{g(p)}{p}\right] &= \int_0^\infty \frac{d}{dp}e^{-pt}h(t)dt = \int_0^\infty e^{-pt}[-th(t)]dt \\ &= -\frac{1}{p}\mathbf{L}[th(t)].\end{aligned}$$

17. Théorème 9.

(17.1) Si $$\mathbf{L}h(t) = g(p),$$

(17.2) $$\mathbf{L}\left[\frac{h(t)}{t}\right] = p\int_p^\infty \frac{g(\lambda)}{\lambda}d\lambda.$$

En effet, posons :

(17.3) $$g(\lambda) = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t)dt,$$

(17.4) $$\frac{g(\lambda)}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t)dt,$$

(17.5) $$\int_p^m \frac{g(\lambda)}{\lambda}d\lambda = \int_p^m\int_0^\infty e^{-\lambda t}h(t)dtd\lambda$$
$$= \int_0^\infty h(t)\int_p^m e^{-\lambda t}dtd\lambda = \int_0^\infty \frac{h(t)}{t}[e^{-pt}-e^{-mt}]dt.$$

Lorsque $m \to \infty$, il vient :

(17.6) $$\int_p^\infty \frac{g(\lambda)}{\lambda}d\lambda = \int_0^\infty \frac{h(t)}{t}e^{-pt}dt = \frac{1}{p}\mathbf{L}\frac{h(t)}{t}.$$

18. Théorème 10.

Si $g(p)$ a la forme $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ où $N(p)$ et $D(p)$ sont des polynômes en p dans lesquels le degré de $N(p)$ est inférieur à celui de $D(p)$, on peut décomposer $g(p)$ en fractions rationnelles simples. On opère exactement comme pour l'intégration des intégrales de forme $\int \dfrac{N(x)}{D(x)}dx$.

Rappelons la méthode employée en calcul intégral : on identifie

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{A_m}{(p-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(p-a)^{m-1}} + \underline{\qquad} + \frac{A}{p-a} \quad \text{si } a \text{ est une racine réelle d'ordre } m$$

$$+\frac{B_n}{(p-b)^n} + \frac{B_{n-1}}{(p-b)^{n-1}} + \underline{\qquad} + \frac{B}{p-b} \quad \text{si } b \text{ est une racine réelle d'ordre } n$$

....

$$+\frac{H_r + K_r p}{(p^2+\alpha p+\beta)^r} + \frac{H_{r-1} + K_{r-1} p}{(p^2+\alpha p+\beta)^{r-1}} + \underline{\qquad} + \frac{H_1 + K_1 p}{p^2+\alpha p+\beta} \quad \text{si } p^2+\alpha p+\beta \text{ est un trinôme de racines imaginaires.}$$

....

Rappelons aussi la formule commode utilisée dans le cas où les racines sont simples (réelles ou imaginaires).

Si a est une racine simple de $D(p)$ alors le coefficient du terme en $p-a$ est

(18.2) $$A = \frac{N(a)}{D'(a)} \qquad \text{où} \qquad D'(a) = \left.\frac{dD}{dp}\right|_{p=a}.$$

19. Exemples concernant l'utilisation des théorèmes 8 à 10.

1er exemple. Théorème 8.

(19.1) Calculer $\mathbf{L}te^{kt}$

On a :

(19.2) $$\mathbf{L}te^{kt} = \frac{p}{p-k}.$$

Calculons

(19.3) $$\frac{d}{dp}\left(\frac{g(p)}{p}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-k}\right) = -\frac{1}{(p-k)^2};$$

il vient donc d'après (16.2) :

(19.4) $$\mathbf{L}[th(t)] = \mathbf{L}[te^{kt}] = -p\left[-\frac{1}{(p-k)^2}\right] = \frac{p}{(p-k)^2}.$$

2e exemple. Théorème 9.

(19.5) Calculer : $$\mathbf{L}\frac{\sin at}{t}.$$

On a :

(19.6) $$\mathbf{L}\ \sin at = \frac{pa}{p^2+a^2}.$$

(19.7) Calculons $$\int_p^\infty \frac{a d\lambda}{\lambda^2+a^2} = \frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\frac{p}{a};$$

(19.8) mais $$\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\frac{p}{a} = \text{arc cotg}\frac{p}{a}.$$

Donc :

(19.8*bis*) $$\mathbf{L}\frac{\sin\ at}{t} = p\,\text{arc cotg}\,\frac{p}{a}.$$

3e exemple. Théorème 10.

Décomposer en fractions simples, puis donner la transformée inverse de :

(19.9) $$\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}.$$

Écrivons :

(19.10) $$\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+2p+5}.$$

En identifiant on trouve :

(19.11) $$A = 1, \qquad B = -1, \qquad C = 2.$$

Ce qui donne

(19.12) $$\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} = \frac{1}{p-1} + \frac{-p+2}{p^2+2p+5}.$$

En consultant la table aux numéros 12, 34 et 36, nous obtenons :

(19.13) $$\mathbf{L}^{-1}\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)} = -1 + e^t - \frac{e^{-t}}{2}\sin\ 2t + \frac{2}{5}\left[1 - \frac{\sqrt{5}}{2}e^{-t}\sin(2t+\Phi)\right],$$

où

(19.14) $$\Phi = \text{arctg}\ 2.$$

4e exemple. Théorème 10.

Décomposer en fractions simples :

(19.15) $$\frac{7p}{(p-a)(p-b)}.$$

Utilisons (18.2).

Soit $\quad A$ le coeff. de $\dfrac{1}{p-a}$,

et B celui de $\dfrac{1}{p-b}$.

On a :

(19.16) $$A = \frac{N(a)}{D'(a)},$$

(19.17) $$N(a) = 7p|_{p=a} = 7a$$

(19.18) $$D(p) = (p-a)(p-b) = p^2 - (a+b)p + ab,$$

(19.18) $$D'(p) = 2p - (a+b),$$

(19.19) $$D'(a) = 2a - (a+b) = a - b,$$

Donc :

(19.20) $$A = \frac{7a}{a-b};$$

on trouvera de même en remplaçant b par a et a par b :

(19.21) $$B = \frac{7b}{b-a};$$

Il vient donc :

(19.22) $$\frac{7p}{(p-a)(p-b)} = \frac{7}{a-b}\left[\frac{a}{p-a} - \frac{b}{p-b}\right],$$

et

(19.23) $$\begin{aligned} \mathbf{L}^{-1}\frac{7p}{(p-a)(p-b)} &= \frac{7}{a-b}[e^{at} - 1 - e^{bt} + 1] \\ &= \frac{7}{a-b}(e^{at} - e^{bt}). \end{aligned}$$

20. Théorème 11.

Si

(20.1) Si $$g(p) = \mathbf{L}h(t),$$

alors

(20.2) $$\begin{array}{llll} \mathbf{L}^{-1}e^{-\tau p}g(p) & = 0 & \text{pour} & t < \tau \\ & = h(t-\tau) & \text{pour} & t > \tau \\ & \text{où } \ \tau > 0. & & \end{array}$$

La démonstration est facile.

(20.3) $$g(p) = p\int_0^\infty e^{-pt}h(t)dt,$$

changeons t en $t-\tau$

(20.4) $$g(p) = p\int_{-\tau}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} h(t-\tau)dt;$$

mais, puisque $h(t) = 0$ pour $t < 0$ on a :

(20.5) $$h(t-\tau) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t < \tau.$$

alors nous pouvons donc écrire :

(20.6) $$\begin{aligned} g(p) &= p\int_{0}^{\infty} e^{-p(t-\tau)} h(t-\tau)dt \\ &= pe^{\tau p}\int_{0}^{\infty} e^{-pt} h(t-\tau)dt, \end{aligned}$$

soit encore

(20.7) $$e^{-\tau p} g(p) = p\int_{0}^{\infty} e^{-pt} h(t-\tau)dt$$

et

$$\mathbf{L}^{-1} e^{-\tau p} g(p) = h(t-\tau) \qquad \text{pour} \qquad t > \tau.$$

21. Théorème 12.

Soit une fonction :

(21.1) $$h(t) = 0 \qquad \text{pour} \qquad t < \tau.$$

Si nous posons :

(21.2) $$g(p) = \mathbf{L}h(t),$$

alors

(21.3) $$\mathbf{L}^{-1} e^{\tau p} g(p) = h(t+\tau).$$

attention : la condition (21.1) est très importante.

La démonstration est la suivante :

soit

(21.4) $$\varphi(p) = p\int_{0}^{\infty} e^{-pt} h(t+\tau)dt\ ;$$

faisons le changement de variable :

(21.5) $$u = t+\tau.$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\varphi(p) &= p\int_{\tau}^{\infty} e^{-p(u-\tau)}h(u)du \\
&= e^{p^{\tau}} p\int_{\tau}^{\infty} e^{-pu}h(u)du \qquad (21.6)\\
&= e^{p^{\tau}}\left[p\int_{0}^{\infty} e^{-pu}h(u)du - p\int_{0}^{\tau} e^{-pu}h(u)du\right],
\end{aligned}$$

avec la condition (21.1), on a finalement :

$$\varphi(p) = e^{p^{\tau}} p\int_{0}^{\infty} e^{-pu}h(u)du = e^{p^{\tau}} g(p). \qquad (21.7)$$

Nous pouvons résumer les théorèmes 11 et 12 au moyen des figures 21.1 et 21.2.

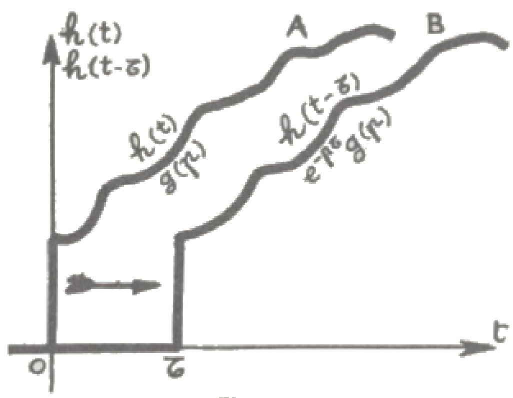

Fig. 21.1

A représente une fonction h(t) (nulle pour $t < 0$) et B la fonction h($t-\tau$) (nulle pour $t < \tau$).
Effet d'une translation à droite.

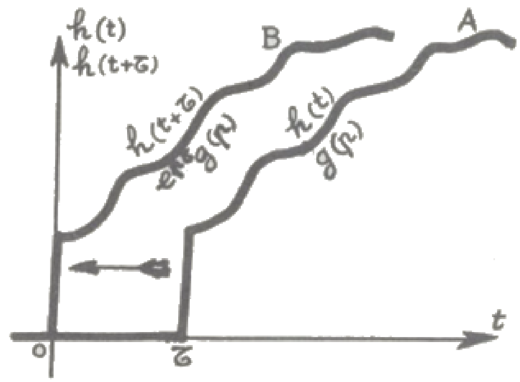

Fig. 21.2

A représente une fonction h(t) (nulle pour $t < \tau$) et B la fonction h($t+\tau$) (nulle pour $t < 0$)
Effet d'une translation à gauche.

Nous attirons l'attention de la lectrice sur une erreur souvent commise en appliquant les théorèmes 11 et 12. On confond les 2 fonctions suivantes :

$$h(t-a) \quad \text{nulle pour} \quad t < 0, \qquad (21.8)$$

(21.9) $$h(t-a) \quad \text{nulle pour} \quad t < a.$$

Ces 2 fonctions n'ont pas la même transformée. Voici un exemple :

(21.10) soit
$$\begin{aligned} h_1(t) &= t-a && \text{pour} \quad t > 0 \\ &= 0 && \text{pour} \quad t < 0 \end{aligned}$$
(figure 21.3).

la transformée de cette fonction est :

(21.11) $$g_1(p) = \mathbf{L}h_1(t) = \frac{1}{p} - a.$$

Maintenant,

(21.12) soit :
$$\begin{aligned} h_1(t) &= t-a && \text{pour} \quad t > a \\ &= 0 && \text{pour} \quad t < a \end{aligned}$$
(figure 21.4).

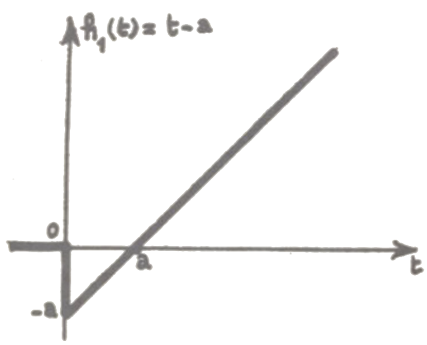

Fig. 21.3

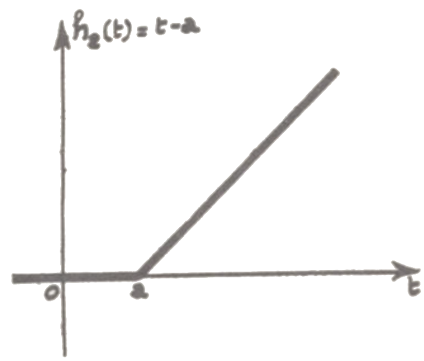

Fig. 21.4

Cette fonction n'est autre que la fonction

(21.13)
$$\begin{aligned} h(t) &= t && \text{pour} \quad t > 0 \\ &= 0 && \text{pour} \quad t < 0 \end{aligned}$$

décalée de a vers la droite, ainsi :

(21.14) $$g_2(p) = \mathbf{L}h_2(t) = \frac{e^{-ap}}{p}.$$

Comme on le voit :
$$g_2(p) \neq g_1(p).$$

22. Exemples concernant l'utilisation des théorèmes 11 et 12.

Nous allons étudier les transformées de quelques fonctions discontinues.

1er exemple. (figure 22.1).
Soit :

(22.1)
$$\begin{aligned} h_1(t) &= 0 && \text{pour} \quad 0 < t < \tau \\ h_1(t) &= E && \text{pour} \quad t > \tau\ ; \end{aligned}$$

or

(22.2) $$\mathbf{L}h_2(t) = E \quad \text{si} \quad h_2(t) = E \quad \text{pour} \quad 0 < t.$$

$h_1(t)$ est égal à $h_2(t)$ décalée de τ à droite, donc :

(22.3) $$\mathbf{L}h_1(t) = Ee^{-p\tau}.$$

2e exemple.

Calcul d'une transformée d'une fonction "impulsion" (figure 22.2).

1°) *Calcul direct.*

(22.4) $$\mathbf{L}h(t) = p\int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt = p\int_{\tau_1}^{\tau_2} Ee^{-pt}dt = E\left[e^{-\tau_1 p} - e^{-\tau_2 p}\right].$$

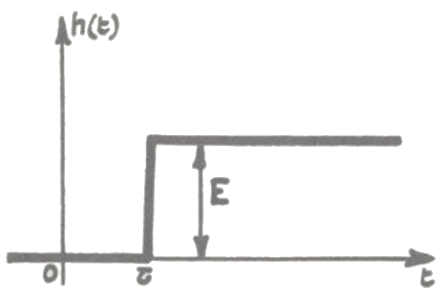

Fig. 22.1

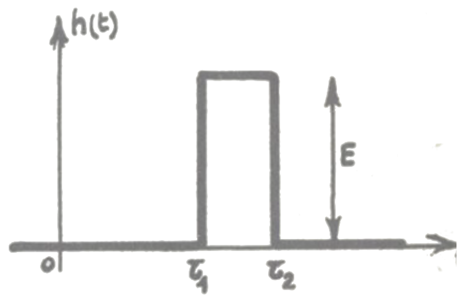

Fig. 22.2

2°) *Calcul en utilisant le résultat du 1er exemple.*

Pour obtenir la fonction $h(t)$ définie par la figure (22.2) on peut faire la somme des 2 fonctions suivantes : (figure 22.3).

(22.5) $$\begin{aligned} h_1(t) &= 0 && \text{pour} \quad 0 < t < \tau_1 \\ &= E && \text{pour} \quad t > \tau_1 \end{aligned}$$

(22.6) et $$\begin{aligned} h_2(t) &= 0 && \text{pour} \quad 0 < t < \tau_2 \\ &= -E && \text{pour} \quad t > \tau_2 \ ; \end{aligned}$$

on obtient (22.4).

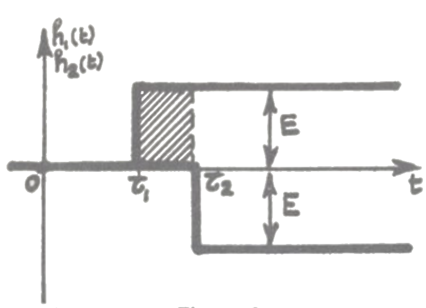

Fig. 22.3

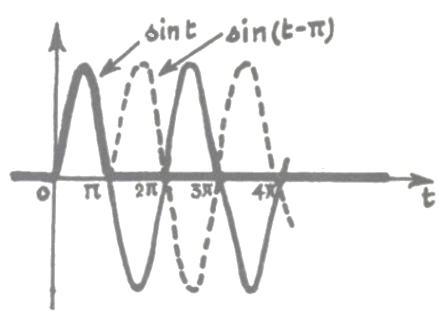

Fig. 22.4

3e exemple.

Calculer la transformée de la fonction impulsion

(22.7)
$$\begin{aligned} h(t) &= \sin\ t \qquad \text{pour} \qquad 0 < t < \pi \\ &= 0 \qquad\quad \text{pour} \qquad \pi < t \end{aligned}$$

c'est-à-dire un arc de sinusoide de 0 à π (figure 22.4).

Nous obtiendrons la transformée de (22.7) en prenant la somme de 2 fonctions.

1°) La fonction $h_1(t)$ définie par :

(22.8)
$$\begin{aligned} h_1(t) &= \sin\ t \qquad \text{pour} \qquad t > 0 \\ &= 0 \qquad\quad \text{pour} \qquad t < 0 \end{aligned}$$

Pour éviter toute confusion avec la fonction sin t définie quel que soit t, en trigonométrie, nous écrirons :

(22.9)
$$h_1(t) = \mathrm{Sin}\, t$$

2°) La fonction $h_2(t)$ définie par :

$$h_2(t) = \mathrm{Sin}(t - \pi).$$

(l'écriture Sin au lieu de sin implique que $h_2(t) = 0$ pour $t < \pi$).

On a donc :

(22.10)
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) = \mathrm{Sin}\, t + \mathrm{Sin}(t - \pi).$$

Or : d'après le n° 13 de la table, et le théorème 11 :

(22.11)
$$\mathbf{L}\,\mathrm{Sin} t = \frac{p}{p^2 + 1},$$

(22.12)
$$\mathbf{L}\,\mathrm{Sin}(t - \pi) = \frac{p}{p^2 + 1} e^{-\pi p}\ ;$$

ainsi

$$\mathbf{L}\, h(t) = \frac{p}{p^2 + 1} + \frac{p}{p^2 + 1} e^{-\pi p} = \frac{p}{p^2 + 1}(1 + e^{--\pi p}).$$

23. Théorème 13.

Transformée des fonctions périodiques non sinusoïdales.

(23.1) Soit
$$h(t) = h(t + 2a) = h(t + 2ka),$$

où $k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Ce qui définit une fonction $h(t)$ périodique de période $2a$ (figure 23.1).

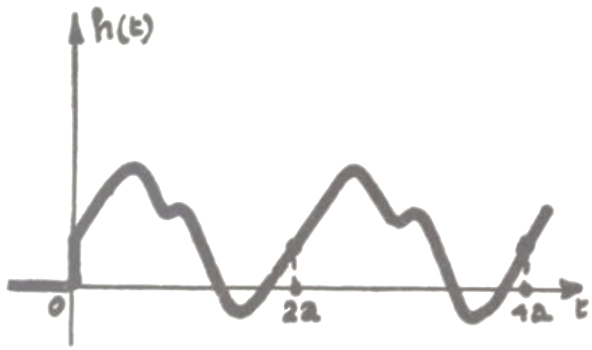

Fig. 23.1

La transformée d'une telle fonction est donnée par :

$$\mathbf{L}h(t) = \frac{p}{1-e^{-2pa}} \int_0^{2a} e^{-pt} h(t) dt. \tag{23.2}$$

Voici la démonstration.

Puisque $h(t)$ est périodique, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}h(t) &= p\int_0^{\infty} e^{-pt}h(t)dt = p\int_0^{2a} e^{-pt}h(t)dt \\ &\quad + p\int_{2a}^{4a} e^{-pt}h(t)dt + \_\_\_\_\_\_ + p\int_{2na}^{2(n+1)a} e^{-pt}h(t)dt + \_\_\_\_\_\_ \\ &= p\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_{2na}^{2(n+1)a} e^{-pt}h(t)dt. \end{aligned} \tag{23.3}$$

Posons :

$$u = t - 2na, \qquad \text{soit} \qquad t = u + 2na\ ; \tag{23.4}$$

il vient :

$$h(t) = h(u+2na). \tag{23.5}$$

Mais, en se référant à (23.1), on peut encore écrire :

$$h(u) = h(u+2na). \tag{23.6}$$

Opérons maintenant sur (23.3) le changement de variable (23.4), il vient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}h(t) &= p\sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^{2a} e^{-p(u+2na)}h(u)du \\ &= p\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-2pna} \int_0^{2a} e^{-pu}h(u)du \end{aligned} \tag{23.7}$$

$$= \left[\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-2pna}\right] p\int_0^{2a} e^{-pu}h(u)du\ ; \tag{23.8}$$

mais

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} e^{-2pna} = 1 + e^{-2pa} + e^{-4pa} + \_\_\_\_\_\_ = \frac{1}{1-e^{-2pa}},$$

donc :

(23.9)
$$\mathbf{L}h(t) = \frac{p}{1-e^{-2pa}} \int_0^{2a} e^{-pu} h(u) du.$$

24. Théorème 14.

Si $2a$ est la période d'une fonction "antipériodique" (fonction périodique à alternances égales), figure (24.1), la transformée est donnée par :

(24.1)
$$\mathbf{L}h(t) = \frac{1-e^{-pa}}{1-e^{-2pa}} p \int_0^a e^{-pt} h(t) dt,$$

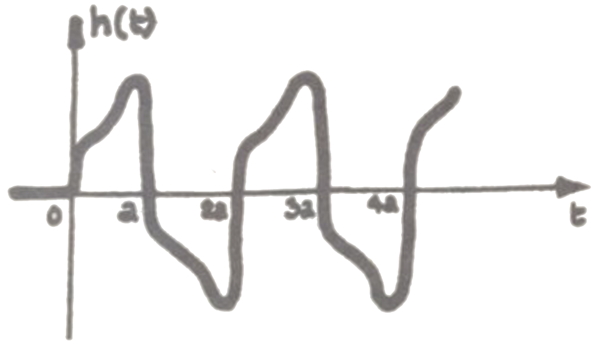

Fig. 24.1

ou, en simplifiant :

(24.2)
$$\mathbf{L}h(t) \frac{p}{1+e^{-pa}} \int_0^a e^{-pt} h(t) dt.$$

Rappelons qu'une fonction périodique "antipériodique" est telle que :

(24.3)
$$h(t) = h(t + 2ka).$$

et

(24.4)
$$h(t) = -h(t + a).$$

Pour démontrer (24.2) nous partirons de la formule (23.9). Dans le cas d'une fonction antipériodique nous pouvons écrire :

(24.5)
$$\begin{aligned} \int_0^{2a} e^{-pu} h(u) du &= \int_0^a e^{-pu} h(u) du + \int_a^{2a} e^{-p(u+a)} h(u) du \\ &= \int_0^a e^{-pu} h(u) du - e^{-pa} \int_0^a e^{-pu} h(u) du \\ &= (1 - e^{-pa}) \int_0^a e^{-pu} h(u) du, \end{aligned}$$

soit

(24.6)
$$\int_a^{2a} e^{-pu} h(u) du = (1 - e^{-pa}) \int_0^a e^{-pu} h(u) du.$$

En portant (24.6) dans (23.9) on retrouve (24.1) et de là (24.2).

25. Théorème 15.

Si $h(t)$ est une fonction antipériodique de période $2a$, la fonction périodique $h_1(t)$ obtenue en *redressant une seule alternance* (figure 25.1) a pour transformée :

(25.1) $$\mathbf{L}h_1(t) = \frac{\mathbf{L}h(t)}{1 - e^{-pa}}.$$

Reportons-nous à (24.5), si on abandonne l'alternance négative, par exemple, de a à $2a$, il vient

(25.2) $$\int_0^{2a} e^{-pu} h_1(u)du = \int_0^a e^{-pu} h(u)du.$$

En comparant (24.6) et (25.2) et en se reportant à la formule générale (23.8) on trouve (25.1).

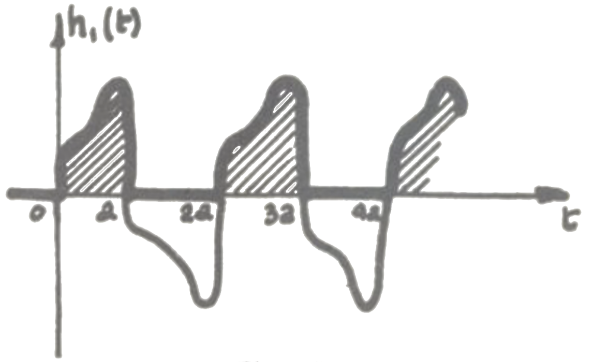

Fig. 25.1

La lectrice tiendra compte de ce que les formules de redressement utilisées dans les théorèmes 15 et 16 s'appliquent seulement dans le cas où une suppression des alternances négatives a lieu pour :

$$(2k+1)a < t < 2(k+1)a, \qquad \text{avec } k = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

26. Théorème 16.

Si $h(t)$ est une fonction antipériodique de période $2a$, la fonction périodique $h_2(t)$ obtenue en *redressant 2 alternances* (figure 26.1) soit

(26.1) $$h_2(t) = |h(t)|$$

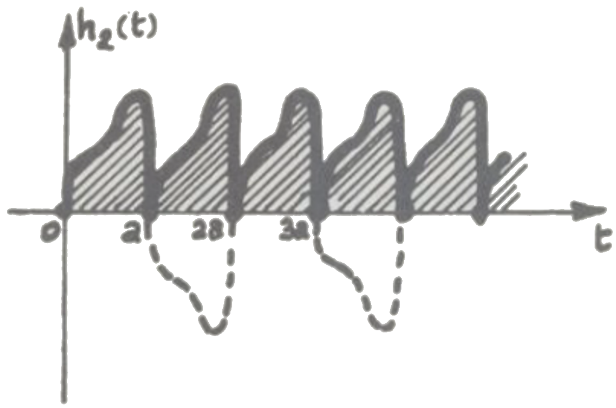

Fig. 26.1

a pour transformée :

(26.2) $$\mathbf{L}h_2(t) = \frac{1+e^{-pa}}{1-e^{-pa}}\mathbf{L}h(t)$$

Nous pouvons considérer $h_2(t)$ comme la somme de $h_1(t)$ et de $h_1(t-a)$, c'est-à-dire $h_1(t)$ décalée de a vers la droite

(26.3) $$h_2(t) = h_1(t) + h_1(t-a).$$

Or, d'après le théorème 11 :

$$\mathbf{L}h_1(t-a) = e^{-ap}\mathbf{L}h_1(t),$$

d'où

(26.4) $$\mathbf{L}h_2(t) = \mathbf{L}h_1(t) + e^{-ap}\mathbf{L}h_1(t) = (1+e^{-ap})\mathbf{L}h_1(t).$$

Et en portant (25.1) dans (26.4) il vient

(26.5) $$\mathbf{L}h_2(t) = \frac{1+e^{-ap}}{1-e^{-ap}}\mathbf{L}h(t).$$

Remarquons que :

(26.6) $$\frac{1+e^{-ap}}{1-e^{-ap}} = \coth\frac{ap}{2}.$$

Nous pouvons donc écrire :

(26.7) $$\mathbf{L}h_2(t) = \coth\frac{ap}{2}\mathbf{L}h(t).$$

27. Exemples concernant l'utilisation des théorèmes 13-14-15 et 16.

1er exemple.

Calcul de la transformée de la fonction "méandres" (oscillations rectangulaires).

Soit la fonction périodique ci-contre (figure 27.1) dite "fonction méandres" ou oscillations rectangulaires :

(27.1) $$M(t) = E \qquad 2na < t < (2n+1)a,$$

$$(27.2) \qquad M(t) = -E \qquad (2n+1)a < t < 2(n+1)a.$$

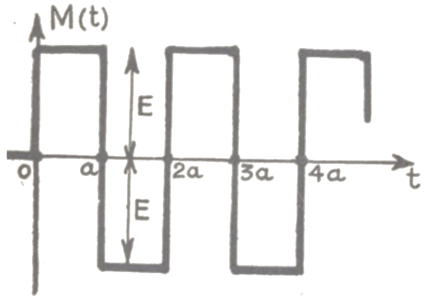

Fig. 27.1

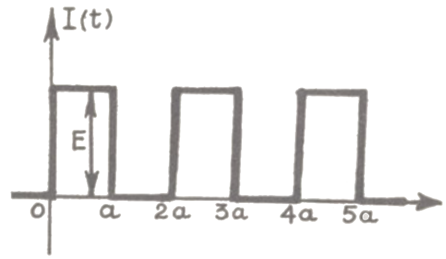

Fig. 27.2

Appliquons la formule (23.8) il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}M(t) &= \frac{p}{1-e^{-2pa}} \int_0^{2a} e^{-pt} M(t)dt \\
&= \frac{pE}{1-e^{-2pa}} \left[\int_0^a e^{-pt}dt - \int_a^{2a} e^{-pt}dt \right] \qquad (27.3) \\
&= \frac{E}{1-e^{-2pa}} \left(1 - e^{-pa} - e^{-pa} + e^{-2pa} \right) \\
&= \frac{E}{1-e^{-2pa}} \left(1 - e^{-pa} \right)^2 \\
&= E\frac{1-e^{-pa}}{1+e^{-pa}} = E \text{ th } \frac{pa}{2}.
\end{aligned}$$

Calcul de la transformée de la fonction "impulsions rectangulaires".

Cette fonction n'est pas autre chose que la fonction "méandres" redressée à une alternance (figure 27.2).

D'après (27.3) nous pouvons écrire :

$$(27.4) \qquad \mathbf{L}M(t) = E\frac{1-e^{-pa}}{1+e^{-pa}} \;;$$

d'après le théorème 15 nous pouvons écrire :

$$\mathbf{L}I(t) = \frac{\mathbf{L}M(t)}{1-e^{-pa}}.$$

Il vient donc :

$$(27.5) \qquad \mathbf{L}I(t) = E\frac{1}{1+e^{-pa}}.$$

2e exemple.

Calcul de la transformée de la fonction sinusoïdale redressée à 1 alternance (figure 27.3).

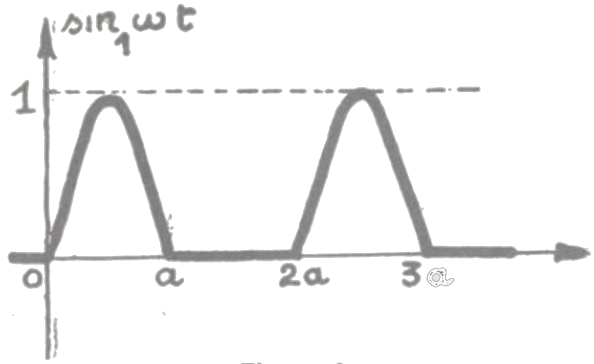

Fig. 27.3

Puisque la transformée de la fonction $\sin \omega t$ est d'après le n° 13 de la table :

(27.6) $$\mathbf{L} \sin \omega t = \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2},$$

nous avons d'après le théorème 15 et en appelant $\sin_1 \omega t$ la fonction $\sin \omega t$ redressée à une alternance

(27.7) $$\mathbf{L} \sin_1 \omega t = \frac{\mathbf{L} \sin \omega t}{1 - e^{-pa}} = \frac{p\omega}{(p^2 + \omega^2)\left(1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)}.$$

En redressant les 2 alternances nous obtiendrons, d'après le théorème 16 :

(27.8) $$\mathbf{L} |\sin \omega t| = \coth \frac{pa}{2} \mathbf{L} \sin \omega t = \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \coth \frac{p\pi}{2\omega}.$$

3e exemple.

Calcul de la transformée de la fonction "dents de scie". (Figure 27.4).

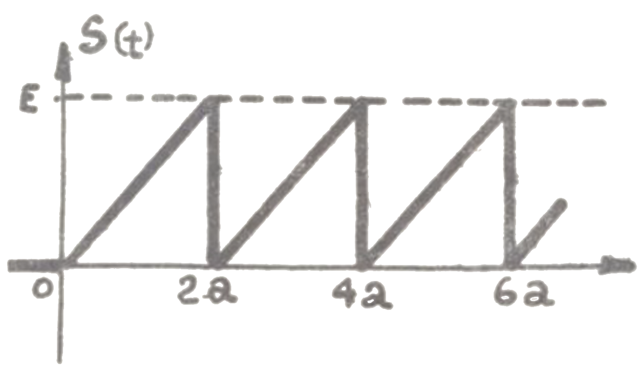

Fig. 27.4

Nous avons d'après la figure 27.4 :

(27.9) $$S(t) = E \frac{t}{2a} \quad \text{pour} \quad 0 < t < 2a,$$

il vient donc, d'après (23.2) :

$$\mathbf{L}S(t) = \frac{p}{1-e^{2-pa}} \int_0^{2a} \frac{Et}{2a} e^{-pt} dt. \tag{27.10}$$

Calculons $\displaystyle\int_0^{2a} te^{-pt} dt.$

Une intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}\int_0^{2a} te^{-pt} dt &= -\frac{te^{-pt}}{p}\Big|_0^{2a} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^{2a} \\ &= -\frac{2a}{p}e^{-2pa} - \frac{e^{-2pa}}{p^2} + \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-e^{-2pa}}{p^2} - \frac{2a}{p}e^{-2pa}\end{aligned} \tag{27.11}$$

En portant (27.11) dans (27.10) nous avons :

$$\mathbf{L}S(t) = \frac{E}{2ap} - \frac{E}{2}[\coth ap - 1]. \tag{27.12}$$

28. Théorème 17. (Théorème de Borel)

$$\text{Si} \qquad g_1(p) = \mathbf{L}h_1(t), \tag{28.1}$$

$$g_2(p) = \mathbf{L}h_2(t), \tag{28.2}$$

on a

$$\frac{g_1(p).g_2(p)}{p} = \mathbf{L}\int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau = \mathbf{L}\int_0^1 h_2(\tau)h_1(t-\tau)d\tau. \tag{28.3}$$

Nous ne ferons qu'une démonstration intuitive réservant au prochain chapitre la démonstration plus complète de ce théorème.

D'après le théorème 11, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^{-1}[e^{-p\tau}g_2(p)] &= 0 && \text{pour} \quad 0 < t < \tau \\ &= h_2(t-\tau) && \text{pour} \quad t > \tau\end{aligned} \tag{28.4}$$

ce qui peut s'écrire :

$$e^{-p\tau}g_2(p) = p\int_0^\infty e^{-pu}h_2(u-\tau)du. \tag{28.5}$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire :

$$\frac{g_1(p)}{p} = \int_0^\infty e^{-p\tau}h_1(\tau)d\tau. \tag{28.6}$$

Maintenant, multiplions les 2 membres de (28.6) par $g_2(p)$, il vient :

$$\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)}{p} = \int_0^\infty e^{-p\tau}h_1(\tau)g_2(p)d\tau. \tag{28.7}$$

Dans cette intégrale,remplaçons $e^{-p\tau}g_2(p)$ par sa valeur tirée de (28.5), il vient :

(28.8) $$\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)}{p} = p\int_0^\infty h_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-pu}h_2(u-\tau)du.$$

Changeons l'ordre d'intégration :

(28.9) $$\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)}{p} = p\int_0^\infty e^{-pu}du\int_0^\infty h_1(\tau)h_2(u-\tau)d\tau.$$

dτ.

mais, puisque $h_2(t) = 0$ pour $t < 0$, on a :

$$h_2(\mu-\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \mu < \tau \quad \text{soit} \quad \tau > u.$$

L'expression (28.9) peut donc s'écrire

(28.10) $$\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)}{p} = p\int_0^\infty e^{-pu}du\int_0^u h_1(\tau)h_2(u-\tau)d\tau.$$

Posons :

(28.11) $$\Phi(u) = \int_0^u h_1(\tau)h_2(u-\tau)d\tau,$$

il vient :

(28.12) $$\begin{aligned}\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)}{p} &= p\int_0^\infty e^{-pu}\Phi(u)du = \mathbf{L}\Phi(u)\\ &= \mathbf{L}\int_0^u h_1(\tau)h_2(u-\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Et en utilisant pour l'écriture, t à la place de u, on trouve bien (28.3). Par un raisonnement identique on trouvera :

(28.13) $$\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)}{p} = \mathbf{L}\int_0^u h_2(\tau)h_1(u-\tau)d\tau.$$

Certains auteurs appellent l'opération définie par (28.3) une *"composition"* et utilisent le symbole suivant :

(28.14) $$h_1(t) * h_2(t) = \int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau\ ;$$

on voit d'après (28.3) que :

(28.15) $$h_1(t) * h_2(t) = h_2(t) * h_1(t).$$

On peut, de même, montrer que :

(28.16) $$\frac{g_1(p)\,.\,g_2(p)\,.\,g_3(p)}{p^2} = \mathbf{L}(h_1 * h_2 * h_3).$$

Le théorème de Borel est extrêmement important en calcul opérationnel.

29. Théorème 18.

C'est un corollaire du théorème de Borel.

(29.1) $$g_1(p)\,.\,g_2(p) = \mathbf{L}\frac{d}{dt}\int_0^t h_1(\tau)h_2(t-\tau)d\tau\ ;$$

soit

(29.2) $$g_1(p) \,.\, g_2(p) = \mathbf{L}\frac{d}{dt}(h_1 * h_2) = \mathbf{L}\frac{d}{dt}(h_2 * h_1).$$

30. Exemples concernant l'utilisation des théorèmes 17 et 18.

1er exemple.

(30.1) Calculer $$\mathbf{L}^{-1}\frac{1}{p(p-a)}$$ au moyen du théorème de Borel.

Nous pouvons écrire :

(30.2) $$\mathbf{L}^{-1}\left[\frac{1}{p(p-a)}\right] = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{p-a}}{p}\right] \;;$$

or :

(30.3) $$\mathbf{L}^{-1}\frac{1}{p} = t \qquad \mathbf{L}^{-1}\frac{p}{p-a} = e^{at}.$$

On a donc :

(30.4) $$\mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p-a)}\right) = \int_0^t (t-\tau)e^{a\tau}d\tau = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1).$$

2^e exemple.

Calculer

(30.5) $$\mathbf{L}^{-1}\frac{p^2}{(p^2+k^2)^2}.$$

On a :

(30.6) $$\mathbf{L}^{-1}\frac{p^2}{(p^2+k^2)^2} = \mathbf{L}^{-1}\left[\frac{\frac{p^2}{p^2+k^2}\cdot\frac{p^2}{p^2+k^2}}{p}\right] = \cos\ kt \star \cos\ kt$$

$$= \int_0^t \cos\ k\tau\ \cos k(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2k}[\sin\ kt + kt\cos\ kt].$$

Nous montrerons de nombreuses utilisations de ce théorème dans divers chapitres.

3^e exemple.

Montrer que $\dfrac{1}{\sqrt{p+1}}$ est la transformée de Laplace de la fonction erf$\sqrt{t}$ où

(30.7) $$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\mu^2}d\mu$$

(erf x est la fonction erreur).

Nous pouvons écrire :

(30.8) $$\mathbf{L}^{-1}\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)} = e^t \star \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = e^t \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\tau}}{2\sqrt{\tau}} d\tau \ ;$$

faisons le changement de variable

(30.9) $$\mu^2 = \tau \ ,$$

alors (30.8) devient :

(30.10) $$\mathbf{L}^{-1}\frac{p}{\sqrt{p}(p-1)} = e^t \ . \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\mu^2} d\mu = e^t.\mathrm{erf}(\sqrt{t}).$$

Mais, d'après le théorème 7 (voir formule 14.2), si nous multiplions $e^t.\mathrm{erf}\sqrt{t}$ par e^{-t}, il faut modifier la transformée ; au lieu de :

(30.12) $$g(p) = \frac{p}{\sqrt{p}(p-1)} = \mathbf{L}\ e^t \mathrm{erf}\sqrt{t}\,,$$

on a

(30.13) $$\frac{p}{p+1} g(p+1) = \frac{p}{p+1} \ . \ \frac{p+1}{p\sqrt{p+1}} = \frac{1}{\sqrt{p+1}} = \mathbf{L}\ \mathrm{erf}\sqrt{t}.$$