

Cette année, Donald Knuth a offert son traditionnel “arbre de Noël” : une conférence à l’Université de Stanford au sujet des Dancing links^{1 2}.

Les Dancing links sont des listes informatiques doublement pointées (dans les deux sens), ce qui rend l’effacement ou le rétablissement d’un élément (opération inverse de l’effacement) dans les listes en question aisés. La force de la structure réside en la conservation des liens entre éléments qui ne sont pas perdus lors des effacements et sont de fait aisément rétablissables. Le Professeur Knuth décrit ces structures de données comme très adaptées à la résolution de problèmes de couverture exacte.

Il est alors tentant d’imaginer et de présenter, sans phrases, d’une manière très visuelle, ce que pourrait être la découverte des décomposants de Goldbach d’un nombre en utilisant les algorithmes portant sur des Dancing links.

On reprend notre exemple fétiche de la recherche des décomposants de Goldbach de 98.

$$\begin{cases} 98 \equiv 0 \pmod{2} \\ 98 \equiv 2 \pmod{3} \\ 98 \equiv 3 \pmod{5} \\ 98 \equiv 0 \pmod{7} \end{cases}$$

Appelons s un décomposant potentiel de 98. s peut être congru, hormis 0, à tout ce à quoi 98 n’est pas congru. Le signe \vee dans le système ci-dessous est à lire comme un ou *exclusif*, son emploi étendu est à comprendre comme le fait de vérifier autant de systèmes de congruences que la combinatoire le permet.

$$\begin{cases} s \equiv 1 \pmod{2} \\ s \equiv 1 \pmod{3} \\ s \equiv 1 \vee 2 \vee 4 \pmod{5} \\ s \equiv 1 \vee 2 \vee 3 \vee 4 \vee 5 \vee 6 \pmod{7} \end{cases}$$

On se concentre sur les impairs, omettant la congruence à 1 (mod 2), les nombres premiers étant tous impairs sauf 2.

| | 1 (3) | 1 (5) | 1 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | | |
| 11 | | 1 | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | 1 |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | 1 | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | | 1 |
| 31 | 1 | 1 | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | 1 | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | 1 |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 2 (5) | 1 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | 1 | |
| 9 | | | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | 1 |
| 17 | | 1 | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | 1 | |
| 29 | | | 1 |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | 1 | |
| 39 | | | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | 1 |
| 45 | | | |
| 47 | | 1 | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 4 (5) | 1 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | 1 | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | 1 |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | 1 | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | 1 | 1 |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | 1 | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | 1 |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | 1 | |

1. Voir ici <http://denise.vella.chemla.free.fr/KDCT.html>.
 2. On s’était régalés, il y a longtemps, à essayer de résoudre le puzzle Eternity et JC, également admirateur de Knuth, avait codé la résolution de ce problème à l’aide de Dancing links.

| | 1 (3) | 1 (5) | 2 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | | 1 |
| 11 | | 1 | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | 1 | |
| 23 | | | 1 |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | 1 | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | 1 |
| 39 | | | |
| 41 | | 1 | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 2 (5) | 2 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | 1 | |
| 9 | | | 1 |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | 1 | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | | |
| 23 | | | 1 |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | 1 | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | 1 | 1 |
| 39 | | | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | 1 | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 4 (5) | 2 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | 1 | 1 |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | 1 | |
| 21 | | | |
| 23 | | | 1 |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | 1 | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | 1 |
| 39 | | 1 | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | 1 | |

| | 1 (3) | 1 (5) | 3 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | 1 |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | | |
| 11 | | 1 | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | 1 |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | 1 | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | 1 | 1 |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | | |
| 41 | | 1 | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | 1 |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 2 (5) | 3 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | 1 |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | 1 | |
| 9 | | | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | 1 | 1 |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | 1 | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | | 1 |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | 1 | |
| 39 | | | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | 1 |
| 47 | | 1 | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 4 (5) | 3 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | 1 |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | 1 | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | 1 |
| 19 | 1 | 1 | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | 1 | |
| 31 | 1 | | 1 |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | 1 | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | 1 |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | 1 | |

| | 1 (3) | 1 (5) | 4 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | | |
| 11 | | 1 | 1 |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | 1 | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | 1 |
| 27 | | | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | 1 | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | | 1 |
| 41 | | 1 | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 2 (5) | 4 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | 1 | |
| 9 | | | |
| 11 | | | 1 |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | 1 | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | 1 |
| 27 | | 1 | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | 1 | |
| 39 | | | 1 |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | 1 | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 4 (5) | 4 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | 1 | |
| 11 | | | 1 |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | 1 | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | 1 |
| 27 | | | |
| 29 | | 1 | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | 1 | 1 |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | 1 | |

| | 1 (3) | 1 (5) | 5 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | 1 |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | | |
| 11 | | 1 | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | | 1 |
| 21 | | 1 | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | 1 | |
| 33 | | | 1 |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | | |
| 41 | | 1 | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | 1 |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 2 (5) | 5 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | 1 |
| 7 | 1 | 1 | |
| 9 | | | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | 1 | |
| 19 | 1 | | 1 |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | 1 | |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | 1 |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | 1 | |
| 39 | | | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | 1 | 1 |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 4 (5) | 5 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | 1 |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | 1 | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | 1 | 1 |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | |
| 29 | | 1 | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | 1 |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | 1 | |
| 41 | | | |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | 1 |
| 49 | 1 | 1 | |

| | 1 (3) | 1 (5) | 6 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | | |
| 11 | | 1 | |
| 13 | 1 | | 1 |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | 1 | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | 1 |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | 1 | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | | |
| 41 | | 1 | 1 |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 2 (5) | 6 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | 1 | |
| 9 | | | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | 1 |
| 15 | | | |
| 17 | | 1 | |
| 19 | 1 | | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | 1 | 1 |
| 29 | | | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | 1 | |
| 39 | | | |
| 41 | | | 1 |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | 1 | |
| 49 | 1 | | |

| | 1 (3) | 4 (5) | 6 (7) |
|----|-------|-------|-------|
| 3 | | | |
| 5 | | | |
| 7 | 1 | | |
| 9 | | 1 | |
| 11 | | | |
| 13 | 1 | | 1 |
| 15 | | | |
| 17 | | | |
| 19 | 1 | 1 | |
| 21 | | | |
| 23 | | | |
| 25 | 1 | | |
| 27 | | | 1 |
| 29 | | 1 | |
| 31 | 1 | | |
| 33 | | | |
| 35 | | | |
| 37 | 1 | | |
| 39 | | 1 | |
| 41 | | | 1 |
| 43 | 1 | | |
| 45 | | | |
| 47 | | | |
| 49 | 1 | 1 | |

Les décomposants de Goldbach de 98 (que sont 19, 31 et 37) ont été enluminés en rouge et bleu. L'utilisation des couleurs permettrait peut-être de n'avoir qu'un seul tableau qui contiendrait directement les \vee exclusifs selon chaque module premier, obligeant la couverture à contenir exactement un 1 dans la seconde colonne correspondant au module 3, exactement un 1 dans l'une des 3 colonnes correspondant au module 5 (colonnes 3, 4 et 5 du tableau ci-dessous) et exactement un 1 dans l'une des 6 colonnes correspondant au module 7 (colonnes 6ème et suivantes).

| | 1 (3) | 1 (5) | 2 (5) | 4 (5) | 1 (7) | 2 (7) | 3 (7) | 4 (7) | 5 (7) | 6 (7) |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 3 | | | | | | | 1 | | | |
| 5 | | | | | | | | | 1 | |
| 7 | 1 | | 1 | 1 | | | | | | |
| 9 | | | | | | 1 | | | | |
| 11 | | 1 | | | | | | 1 | | |
| 13 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 15 | | | | | 1 | | | | | |
| 17 | | | 1 | | | | 1 | | | |
| 19 | 1 | | | | 1 | | | | 1 | |
| 21 | | 1 | | | | | | | | |
| 23 | | | | | | 1 | | | | |
| 25 | 1 | | | | | | | 1 | | |
| 27 | | | 1 | | | | | | | 1 |
| 29 | | | | 1 | 1 | | | | | |
| 31 | 1 | 1 | | | | | 1 | | | |
| 33 | | | | | | | | | 1 | |
| 35 | | | | | | | | | | |
| 37 | 1 | | 1 | | | 1 | | | | |
| 39 | | | | 1 | | | | 1 | | |
| 41 | | 1 | | | | | | | | 1 |
| 43 | 1 | | | | 1 | | | | | |
| 45 | | | | | | | 1 | | | |
| 47 | | | 1 | | | | | | 1 | |
| 49 | 1 | | | 1 | | | | | | |