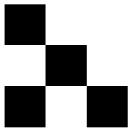
Une matrice qui grandit et fournit des décompositions de Goldbach
Denise Vella-Chemla, 8.2.2025

On étudie ici la conjecture de Goldbach en utilisant une matrice dont la taille croît, et dont les éléments respectent toujours certaines relations invariantes.

La matrice initiale de taille 3×3 est celle-ci :



Cette matrice s'étend "vers le nord-ouest" par ajout de 2 lignes et 2 colonnes, lors du passage de n, un nombre entier pair, à $n+2$:

- la matrice correspondant au nombre pair n est translatée à l'identique en bas à droite de la matrice correspondant au nombre pair $n+2$;
- les pixels des deux premières colonnes sont affectés, et respectent les relations invariantes qui les lient aux autres pixels.

En terme des éléments matriciels, cela s'écrit :

- (translater tous les éléments de la matrice correspondant au nombre pair n de 2 indices dans la matrice correspondant au nombre pair $n+2$) :

$$M_{n+2}(x,y) = M_n(x-2, y-2) \qquad \text{pour } \; x,y \in [2,k]$$

- (remplir "les coins" de la matrice correspondant au nombre pair $n+2$) :

$$M_{n+2}[0,0] = 1 \; ; \qquad M_{n+2}[1,1] = 1 \; ; \qquad M_{n+2}[n-2,0] = 1 \; ;$$

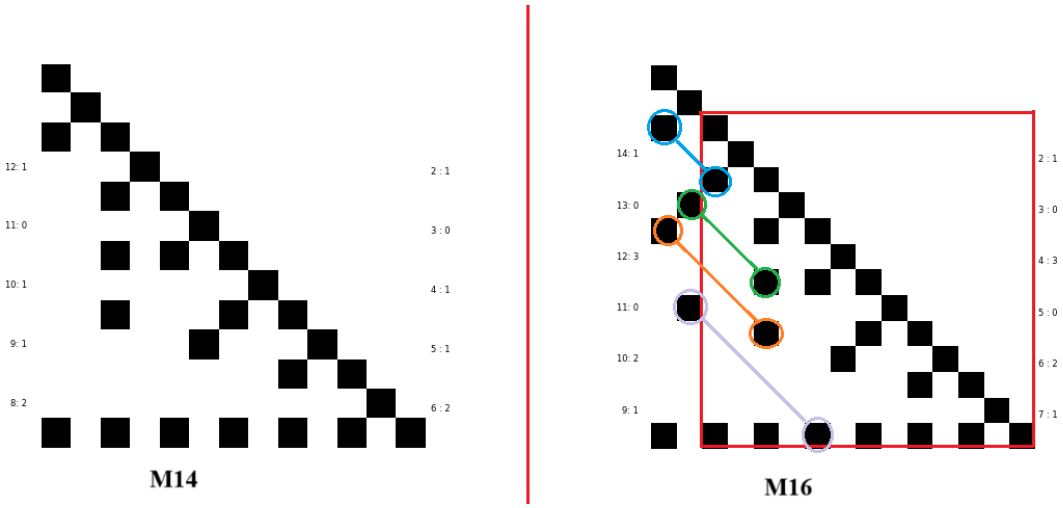
- (remplir la première colonne de la matrice correspondant au nombre pair $n+2$) :

$$M_{n+2}[x,0] = M_{n+2}\left[\frac{3x+2}{2}, \frac{x+2}{2}\right] \quad \text{pour } x \text{ pair} \; ;$$

- (remplir la seconde colonne de la matrice correspondant au nombre pair $n+2$) :

$$M_{n+2}[x,1] = M_{n+2}\left[\frac{3x+1}{2}, \frac{x+3}{2}\right] \quad \text{pour } x \text{ impair} \; ;$$

Voyons comment la matrice pour $n = 16$ est dérivée de la matrice pour $n = 14$, de façon à bien appréhender la manière dont la matrice s'étend ; on met notamment quelques petits traits de couleur entre des pixels liés de façon flagrante (sous prétexte qu'on les voit), sachant qu'en fait, un pixel est lié à tous ceux de sa diagonale par des contraintes semblables (et que de multiples autres relations entre pixels existent) :



On note sur les bords gauche et droit de la matrice le nombre de pixels par diagonale ascendante (*attention* : les nombres du côté droit d'une matrice sont à lire de haut en bas pour les diagonales lues de droite à gauche ! Cela se justifie par le fait qu'on souhaite voir, à la fin du processus décrit ci-dessous, horizontalement, après les opérations de flips, les nombres complémentaires à n sur une même ligne).

Les éléments d'une matrice de la séquence de matrices successives M_k, abrégé M ci-dessous, vérifient les relations invariantes suivantes :

- sur une diagonale d'indice pair : $\forall x, y, M[x, y] = M\left[x + \frac{x+2}{2}, y + \frac{x+2}{2}\right]$;
- sur une diagonale d'indice impair : $\forall x, y, M[x, y] = M\left[x + \frac{x+1}{2}, y + \frac{x+1}{2}\right]$.

Pour trouver les décompositions de Goldbach d'un nombre pair, on fait subir à la matrice obtenue selon la procédure ci-dessus deux opérations l'une après l'autre :

1) une symétrie par rapport à sa diagonale principale sud-ouest / nord-est [1].
2) puis un `ou` logique entre la matrice initiale et sa matrice symétrisée [2].

Les matrices (initiales (colorées en noir et blanc) et complétées par symétrie puis par `ou` logique ($\vee$) (colorées en vert pâle et vert forêt)) ont été stockées à l'adresse https://denisevellachemla.eu/toutes-matrices-triangulaires.pdf.

Le programme utilisé pour calculer les matrices est le suivant :

[1] Pour effectuer cette symétrie par programme, on utilise les instructions `np.fliplr` et `np.flipud` (du package `numpy` qui réalisent une symétrie verticale et une symétrie horizontale de la matrice).

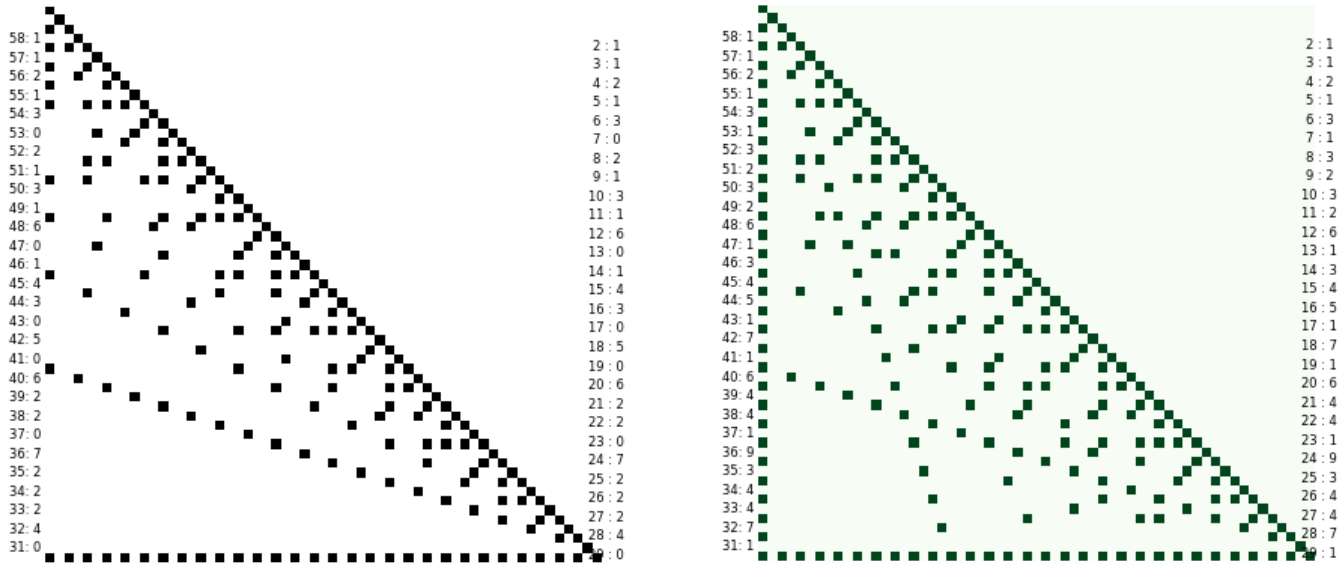
[2] Pour effectuer cette opération "`ou`" logique, on utilise l'instruction python `np.fmax`, appliquée terme à terme entre les éléments des deux matrices ; le `max` calcule la disjonction entre deux booléens, dans la mesure où on a fait le choix de représenter *True* par 1 et *False* par 0.

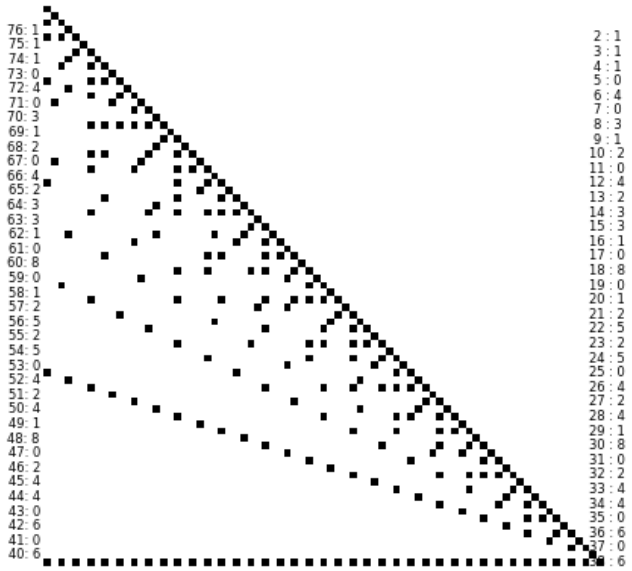
```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def ecrimat(m,couleur):
    plt.imshow(m, cmap=couleur, aspect='equal', origin='upper')
    taille, taille = m.shape
    for k in range(0,n-2,2):
        somme = 0
        x = 0
        y = k-x
        while y != 0:
            somme = somme+m[y,x]
            x = x+1
            y = y-1
        if somme>0:
            plt.text(-1, k+1, f'{n-(k+2)//2}: {somme-1}',fontsize=6,ha='right',
    va='center')
            plt.text(n-1, k+1, f'{((k+2)//2)} : {somme-1}',fontsize=6,va='top',
    ha='center')
    plt.grid(False)
    plt.axis('off')
    if couleur == 'Grays':
        nomfic = 'fig'+str(n)+'-1'
        plt.savefig(nomfic)
        plt.close()
    else:
        nomfic = 'fig'+str(n)+'-2'
        plt.savefig(nomfic)
        plt.close()
    plt.show()

def symparrapportdiagoasc(m):
    taille,taille = m.shape
    m2 = np.zeros((taille,taille),dtype='int')
    for x in range(taille):
        for y in range(taille):
            m2[x,y] = m[y,x]
    return(m2)

trianglinf = np.array([[1,0,0],[0,1,0],[1,0,1]])
for n in range(4,104,2):
    print('n = ',n)
    M = np.zeros((n,n),dtype='int')
    sudestcourant = np.zeros((n-1,n-1),dtype='int')
    trianglinfcourant = np.zeros((n-1,n-1),dtype='int')
    for x in range(2,n-1):
        for y in range(2,n-1):
            M[x,y] = trianglinf[x-2,y-2]
    M[0,0] = 1
    M[1,1] = 1
    M[n-2,0] = 1
    for x in range(2,n,2):
        if x+(x+2)//2 < n :
            M[x,0] = M[(3*x+2)//2,(x+2)//2]
    for x in range(3,n,2):
```

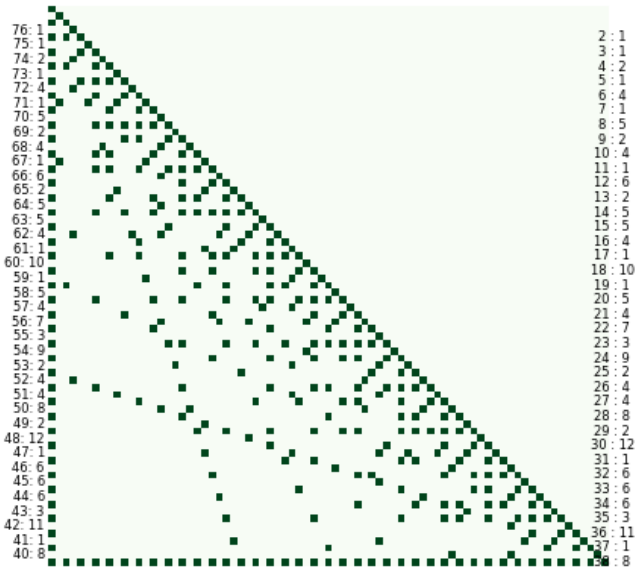
```
        if x+(x+1)//2 < n:
            M[x,1] = M[(3*x+1)//2,(x+3)//2]
    for x in range(n-1):
        for y in range(n-1):
            sudestcourant[x,y] = M[x,y]
    ecrimat(sudestcourant,'Grays')
    for x in range(n-1):
        for y in range(n-1):
            print(sudestcourant[x,y],end='')
        print('')
    trianglinf = sudestcourant
    miroir = symparrapportdiagoasc(trianglinf)
    miroir2 = np.fliplr(miroir)
    miroir3 = np.flipud(miroir2)
    dg = np.fmax(trianglinf,miroir3)
    ecrimat(dg,'Greens')
```

Démontrer la conjecture de Goldbach revient à démontrer que toute matrice, obtenue comme indiqué, contient 2 diagonales sud-ouest / nord-est symétriques par rapport à la diagonale principale sud-ouest / nord-est, et qui ne contiennent chacune qu'un pixel coloré sur l'autre diagonale principale (nord-ouest / sud-est), i.e. que ces deux diagonales ont chacune 1 comme nombre de pixels.

On fournit ci-dessous les matrices avant (en noir et blanc) et après transformations (en vert clair et vert forêt) pour les cas $n = 60$ et $n = 78$. Les décomposants de Goldbach de 60 supérieurs à $\sqrt{60} = 7.7$ se lisent de part et d'autre du graphique, ils n'ont qu'un pixel sur leur diagonale : $13 + 47 = 17 + 43 = 19 + 41 = 23 + 37 = 29 + 31$. Les décomposants de Goldbach de 78 supérieurs à $\sqrt{78} = 8.8$ sont : $11 + 67 = 17 + 61 = 19 + 59 = 31 + 47 = 37 + 41$.




76: 1
75: 1
74: 1
73: 0
72: 4
71: 0
70: 3
69: 1
68: 2
67: 0
66: 4
65: 2
64: 3
63: 3
62: 1
61: 0
60: 8
59: 0
58: 1
57: 2
56: 5
55: 2
54: 5
53: 0
52: 4
51: 2
50: 4
49: 1
48: 8
47: 0
46: 2
45: 4
44: 4
43: 0
42: 6
41: 0
40: 6
2 : 1
3 : 1
4 : 1
5 : 0
6 : 4
7 : 0
8 : 3
9 : 1
10 : 2
11 : 0
12 : 4
13 : 2
14 : 3
15 : 3
16 : 1
17 : 0
18 : 8
19 : 0
20 : 1
21 : 2
22 : 5
23 : 2
24 : 5
25 : 0
26 : 4
27 : 2
28 : 4
29 : 1
30 : 8
31 : 0
32 : 2
33 : 4
34 : 4
35 : 0
36 : 6
37 : 0
38 : 6


76: 1
75: 1
74: 2
73: 1
72: 4
71: 1
70: 5
69: 2
68: 4
67: 1
66: 6
65: 2
64: 5
63: 5
62: 4
61: 1
60: 10
59: 1
58: 5
57: 4
56: 7
55: 3
54: 9
53: 2
52: 4
51: 4
50: 8
49: 2
48: 12
47: 1
46: 6
45: 6
44: 6
43: 3
42: 11
41: 1
40: 8
2 : 1
3 : 1
4 : 2
5 : 1
6 : 4
7 : 1
8 : 5
9 : 2
10 : 4
11 : 1
12 : 6
13 : 2
14 : 5
15 : 5
16 : 4
17 : 1
18 : 10
19 : 1
20 : 5
21 : 4
22 : 7
23 : 3
24 : 9
25 : 2
26 : 4
27 : 4
28 : 8
29 : 2
30 : 12
31 : 1
32 : 6
33 : 6
34 : 6
35 : 3
36 : 11
37 : 1
38 : 8