

Analyse géométrique de la méthode cristal appliquée à la conjecture de Goldbach, Denise Vella-Chemla pilotant l'ia gemini, juillet 2026

Dans ces deux notes note 1 et note 2, je trouvais les décomposants de Goldbach de $n = 400$ et les nombres premiers jumeaux inférieurs ou égaux à $n = 600$ en éliminant les points appartenant à certaines droites de congruences. J'ai essayé de voir si gemini pouvait m'amener plus loin dans ces idées, sans succès.

1. Introduction et formalisation du réseau

Soit n un entier pair à décomposer sous la forme $n = p + q$, où p et q sont des nombres premiers supérieurs à \sqrt{n} . On considère un réseau géométrique triangulaire affine $\Lambda \subset \mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{3}$, dont les nœuds représentent les entiers successifs $m \in \{1, \dots, n\}$.

Afin de préserver les propriétés de divisibilité par 2 et 3, le réseau est structuré en un parallélogramme de largeur fixe $L = 6K \approx \sqrt{n}$. Chaque entier m est repéré par le point complexe :

$$z_m = (m \pmod{L}) + \lfloor m/L \rfloor e^{i\pi/3}$$

2. Le couple crible affine

Pour tout nombre premier $p_k \leq \sqrt{n}$, la méthode *Cristal* consiste à éliminer graphiquement deux familles de droites parallèles :

1. Les droites passant par les multiples de p_k (car $p \not\equiv 0 \pmod{p_k}$).
2. Les droites passant par les entiers $m \equiv n \pmod{p_k}$ (pour assurer que $n - m$ ne soit pas composé).

Le fait majeur mis en évidence par D. Vella-Chemla est que lorsque p_k divise n , ces deux familles de droites se confondent. L'élimination ne consomme alors qu'une seule classe de reste au lieu de deux.

3. Pourquoi l'argument géométrique continu est insuffisant

L'intuition physique suggère d'associer à chaque droite une bande d'exclusion d'épaisseur ϵ . L'aire totale disponible après crible dans le domaine continu décroît selon le produit combinatoire :

$$A_{\text{libre}} = A_{\text{totale}} \times \prod_{p_k | n} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \prod_{p_k \nmid n} \left(1 - \frac{2}{p_k}\right)$$

Pour que cette intuition géométrique devienne une preuve rigoureuse reposant sur le **Théorème de Minkowski**, deux obstacles majeurs doivent être franchis :

3.1. Le problème de la connexité et de la mesure (l'aire restante)

Le produit infini $\prod(1 - 2/p_k)$ diverge vers 0 lorsque la borne supérieure tend vers l'infini. À l'état continu, les bandes interdites finissent par former un crible dont l'aire limite peut devenir nulle ou ne laisser que des ensembles de mesure positive mais sans intérieur (similaires à des tapis de Sierpinski ou des poussières de Cantor). On ne peut donc pas garantir *a priori* qu'un "disque ouvert"

de taille fixe subsiste.

3.2. Le problème fondamental du point entier

Minkowski affirme qu'un domaine convexe **symétrique par rapport à l'origine** contenant une aire supérieure à $4 \times$ maille contient un point du réseau.

Or, dans le cas du Cristal :

- Les zones libres résiduelles ne sont pas centrées en l'origine, ce sont de petits espaces polygonaux excentrés.
- Même si l'aire géométrique macroscopique restante est strictement positive (par exemple, s'il reste l'équivalent de la surface de 5 mailles répartie sur tout le graphique), rien ne garantit que cette surface se concentre sous la forme d'un domaine d'un seul tenant capable d'englober un nœud discret du réseau. Elle pourrait être morcelée en micro-zones vides situées *entre* les points du réseau.

4. Conclusion

La méthode Cristal fournit une superbe cartographie de la symétrie des restes et valide visuellement la suprématie des multiples de 6 ($6k$). Cependant, transformer cette visualisation en preuve par la géométrie des nombres nécessite de démontrer que la **divergence** (l'écart de répartition entre les droites continues et les points discrets) est strictement inférieure au rayon des espaces libres générés par le réseau triangulaire.

Annexe : programme python

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def est_premier(num):
    if num < 2: return False
    for i in range(2, int(np.sqrt(num)) + 1):
        if num % i == 0: return False
    return True

def simuler_cristal_hexagonal(n):
    largeur = max(12, int(np.ceil(np.sqrt(n) / 6) * 6))
    limite_crible = int(np.floor(np.sqrt(n)))
    primes = []
    for i in range(2, limite_crible + 1):
        is_p = True
        for j in range(2, int(np.sqrt(i)) + 1):
            if i % j == 0:
                is_p = False
                break
        if is_p:
```

```

        primes.append(i)
decomposants = set()
for p in range(2, n // 2 + 1):
    if est_premier(p) and est_premier(n - p):
        decomposants.add(p)
        decomposants.add(n - p)
plt.figure(figsize=(8, 8))
for m in range(1, n + 1):
    y = m // largeur
    x = m % largeur
    x_cart = x + y * np.cos(np.pi / 3)
    y_cart = y * np.sin(np.pi / 3)
    if m in decomposants:
        plt.scatter(x_cart, y_cart, color='red', s=60, zorder=5)
        plt.text(x_cart, y_cart+0.15, str(m), fontsize=8, ha='center',
                 color='red', weight='bold')
    elif est_premier(m) and m > limite_crible:
        plt.scatter(x_cart, y_cart, color='blue', s=60, zorder=4)
        plt.text(x_cart, y_cart+0.15, str(m), fontsize=8, ha='center',
                 color='blue')
    else:
        plt.scatter(x_cart, y_cart, color='lightgray', s=30, zorder=3)
un_moins_sur_p = 1.0
for p in primes:
    if n % p == 0:
        un_moins_sur_p *= (1 - 1/p)
    else:
        un_moins_sur_p *= (1 - 2/p)
nb_theorique_survivants = n * un_moins_sur_p
plt.title(f"Methode Cristal pour n = {n} (Largeur de maille :
         {largeur})\n"
         f"Modules de crible p_k <= {limite_crible} : {primes}\n"
         f"Estimation brute de points restants :
         {nb_theorique_survivants:.2f}", fontsize=12)
plt.axis('equal')
plt.axis('off')
plt.tight_layout()
plt.show()
'''
for n in range(6,104,2):
    simuler_cristal_hexagonal(n)
'''
simuler_cristal_hexagonal(400)

```

Résultat du programme : alignements pour $n = 400$

Methode Cristal pour $n = 400$ (Largeur de maille : 24)
Modules de crible $p_k \leq 20$: [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19]
Estimation brute de points restants : 20.82

