

Vibrations de disque (DV, le 2 mai 2015)

On essaie d'imaginer deux procédés physiques pour "voir" les nombres premiers comme les noeuds de vibrations stationnaires qui seraient imprimées à un disque dans le premier cas ou bien qui passeraient par des fentes de Young dans le second cas.

On a réalisé (sans le démontrer) dans une autre note que les nombres premiers inférieurs ou égaux à n sont les zéros de la fonction $sumsumcos(n)$ définie ainsi :

$$sumsumcos(n) = \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^i \cos \frac{2\pi n j}{i}$$

1) Première méthode : Figures de Chladni

Il faudrait que les nombres premiers "se lisent" sur des figures de Chladni qui s'obtiennent en faisant vibrer une plaque de cuivre saupoudrée de sable. La plaque aurait la forme d'un disque et on ferait imprimer des vibrations à la plaque par des archets frottant son bord.

Admettons qu'on se fixe simplement comme objectif de réussir à visualiser les 25 nombres premiers inférieurs ou égaux à 100, au nombre de 25. Ces nombres premiers peuvent être obtenus en testant la division des nombres de 8 à 100 par les 4 premiers nombres premiers 2, 3, 5 et 7 (puisque $11^2 = 121$ et $121 > 100$). On pourrait faire vibrer le premier archet à la fréquence $1/2$, le deuxième à la fréquence $1/3$, le troisième à la fréquence $1/5$ et le quatrième à la fréquence $1/7$.

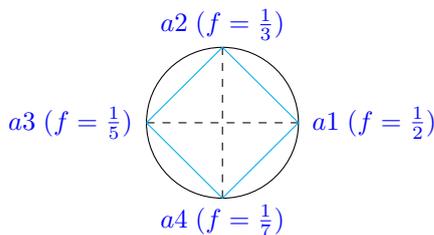
Problème 1 : faudrait-il disposer les 4 archets (notés a_1, a_2, a_3, a_4) aux 4 coins d'un carré inscrit dans le bord du disque ou bien faudrait-il les faire vibrer depuis 4 positions très proches les unes des autres, en se disant que 2π correspondant au nombre 100, il faudrait placer le premier archet à la position 7.2° correspondant au nombre 2, le second archet à la position 10.8° correspondant au nombre 3, le troisième archet à la position 18° correspondant au nombre 5 et le quatrième archet à la position 25.2° correspondant au nombre 7 ?

Problème 1 bis : dans le cas où on dispose les archets en carré, ne serait-il pas plus judicieux que l'archet de fréquence $1/2$ soit en face de l'archet de fréquence $1/3$, histoire d'équilibrer en quelque sorte les tempos lents, et de mettre les deux autres archets de fréquences $1/5$ et $1/7$ aux deux autres coins? Quand on généralise à une infinité de fréquences (chacune inverse d'un élément de l'ensemble infini des nombres premiers), comment faudrait-il disposer les archets ?

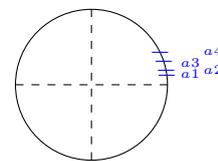
Problème 2 : fixer les conditions au bord. Comment faut-il faire pour imposer qu'au bord du disque les fonctions valent bien 1 (pour que ça "corresponde" bien aux cosinus souhaités) ?

Problème 3 : Où se liraient les nombres premiers ?

Le sable se disposerait-il par paquets, délimités par des lignes de sable, dessinant des sortes de bandes circulaires concentriques contenant justement 11, puis 13, puis 17, etc. zones délimitées ?



Archets aux 4 coins



Archets à leur "position numérique"

2) Deuxième méthode : Fentes de Young

On imagine un bac plein d'eau (comme une piscine à vagues mais en plus petit). On peut se reporter à ce dessin animé, à son instant une minute :

<https://www.youtube.com/watch?v=La64lUHfqs>

On place une plaque verticale dans le bac, percée de 4 fentes qui laisse passer l'eau. On est capable d'imposer à l'eau depuis 4 sources, disposées face aux 4 fentes, des fréquences différentes pour les vagues issues des 4 trous sous l'eau exactement comme dans le dispositif précédent (fréquence des vagues $f = 1/2$ pour la première source, $f = 1/3$ pour la seconde, $f = 1/5$ pour la troisième et $f = 1/7$ pour la quatrième).

On mesure au bout de la piscine la hauteur des vagues obtenues par interférences de ces 4 ondes aquatiques imposées et les nombres premiers pourraient peut-être apparaître au sein des différentes mesures.

A nouveau, de multiples problèmes techniques : La distance entre les fentes et le bout de la piscine, où on mesure les interférences obtenues a-t-elle de l'importance ? Où doit-on prendre les mesures sur le bord opposé de la piscine où viennent frapper les vagues ? La profondeur à laquelle sont situés les trous qui génèrent les ondes sous l'eau interfère-t-elle avec les résultats du dispositif ?

Rêve sonore, rêve aquatique, après un rêve, on se réveille. De toute façon, on n'a pas de piscine.