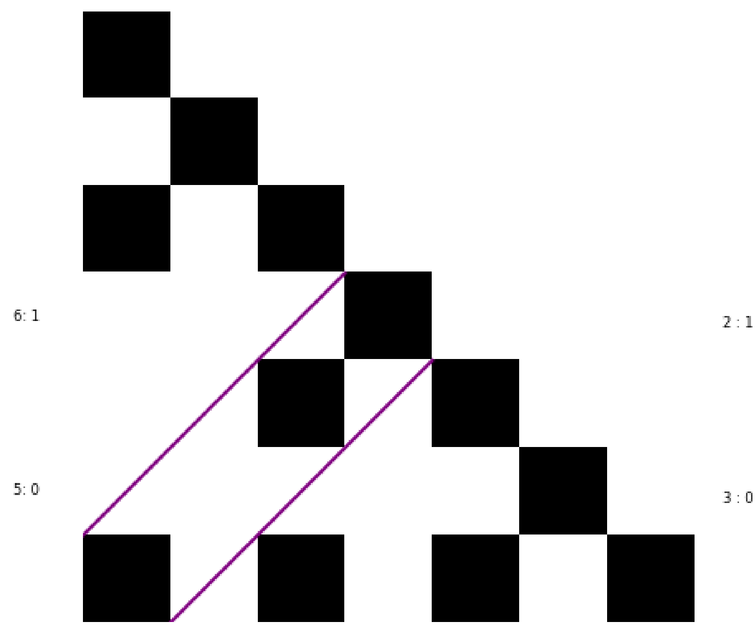
Matrices de booléens de divisibilité, invariance, symétrie
Denise Vella-Chemla, 10.2.2025

On étudie ici des matrices de booléens, triangulaires inférieures, dont certaines sont symétriques, de taille $(n-1) \times (n-1)$, n étant un nombre pair, et dont les pixels égaux à `Vrai`, ou 1, ont leurs indices de ligne et colonne qui respectent toujours certaines relations invariantes [1].

La matrice de taille 7×7, associée au nombre 8, dont on partira est celle-ci :



Chaque pixel de cette matrice représente une relation de divisibilité. Par exemple, la diagonale pleine de pixels représente le fait que 1 divise tout entier, la diagonale légèrement en dessous de la diagonale principale et contenant un pixel sur deux qui est coloré représente le fait que 2 divise un nombre sur deux, la troisième diagonale encore légèrement en-dessous de celle-ci représente le fait que le nombre 3 divise un nombre sur trois, etc. De ce fait, tout pixel coloré a la somme de ses indices qui est paire, comme on le voit sur la liste des pixels colorés de la matrice associée au nombre pair $n = 8$, représentés ci-dessous par leur couple d'indices :

$$(0,0),(1,1),(2,0),(2,2),(3,3),(4,2),(4,4),(6,0),(6,2),(6,4),(6,6).$$

On remarque que la somme des deux indices de tout pixel coloré est paire.

Les matrices pour les nombres pairs de 8 à 102 sont fournies en annexe.

On a indiqué sur ces matrices à fond blanc les nombres premiers, supérieurs à $\sqrt{n}$, par des traits fins colorés. La diagonale correspondant à un nombre premier ne contient aucun pixel coloré. Les pixels $(5,0),(4,1),(3,2)$ sont associés au nombre premier 5, par exemple, dans la matrice ci-dessus.

[1] Cette note fait suite aux deux notes https://denisevellachemla.eu/Conj-Goldbach-flip-mat-booleennes.pdf et https://denisevellachemla.eu/DG-matsymgrandit.pdf.

Sur la diagonale en question, tous les pixels (non colorés donc, puisqu'un nombre premier n'est pas divisible par des nombres qui lui seraient inférieurs) ont la somme de leurs indices de ligne et colonne qui est impaire.

Pour trouver les décomposants de Goldbach d'un nombre pair, on symétrise la matrice de divisibilité, pour que la diagonale correspondant à un nombre premier p n'ait aucun pixel sur sa diagonale (à part celui-de la diagonale principale) et qu'il en soit de même pour son complémentaire à n. Ceci s'écrit très simplement par des congruences élémentaires dans le langage des congruences de Gauss.

La symétrisation de la matrice consiste à "colorer" (à leur affecter le booléen `Vrai`) les pixels de la matrice d'indices (y, x) pour tout pixel coloré (x, y) de la matrice : cette opération n'affecte pas la parité de la somme des indices pour les pixels colorés. On souhaiterait que cette parité de la somme des indices des pixels colorés soit conservée d'une matrice à la suivante : on aurait alors mis au jour un invariant des matrices successives.

Comment passe-t-on de la matrice du nombre pair n à la matrice du nombre pair $n + 2$:

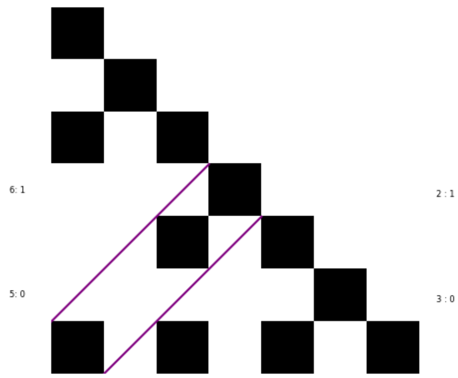
1) la matrice correspondant au nombre pair n est translatée à l'identique en bas à droite de la matrice correspondant au nombre pair $n+2$; les deux indices d'un pixel coloré sont augmentés de 2 chacun, la parité de la somme de leurs indices reste inchangée ;

2) les pixels des deux premières colonnes sont affectés, et respectent les relations invariantes qui les lient aux autres pixels [2]: sur la diagonale concernant la divisibilité par p, tout pixel a la même valeur qu'un autre pixel distant de lui d'un multiple de p ; en particulier, si le pixel $(x + p, y + p)$ est coloré, le pixel (x, y) doit l'être aussi. Lorsqu'on rajoute certains pixels colorés à l'ensemble des pixels colorés, lors du passage du nombre pair n au nombre pair $n + 2$, les pixels colorés ajoutés ont la somme de leurs indices (numéro de ligne+numéro de colonne) qui est paire.

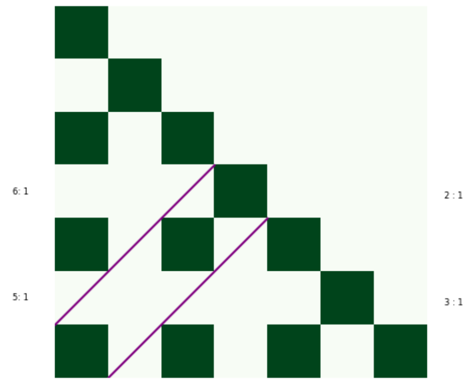
Les deux opérations ci-dessus n'ajoutent pas dans la matrice de pixel dont la somme des indices serait impaire. On ne peut donc pas, pour toute diagonale correspondant à un nombre premier, ajouter un pixel dont la somme des indices serait impaire, empêchant la diagonale en question d'être entièrement vide. Une certaine diagonale qui ne contenait pas de pixel coloré correspondant à un décomposant de Goldbach de n, se voit complétée par l'ajout d'un pixel supplémentaire qui n'est pas coloré et fournit un décomposant de Goldbach de $n+2$. Cet argument est non constructif. On sait que par l'invariant mis au jour concernant la somme des indices de ligne et colonne des pixels colorés, il existe forcément une diagonale de pixels non colorés mais on ne sait pas où est cette diagonale, i.e. on n'a pas de moyen calculatoire de passer d'un décomposant de Goldbach de n à un décomposant de Goldbach de $n + 2$ par une formule.

[2] Se reporter aux deux notes dont la référence a été fournie plus haut.

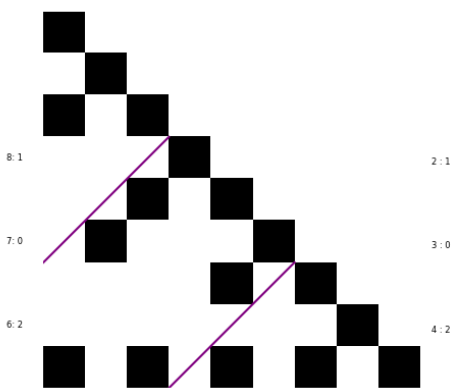
Annexe : Matrices associées aux nombres pairs n compris entre 8 et 102.



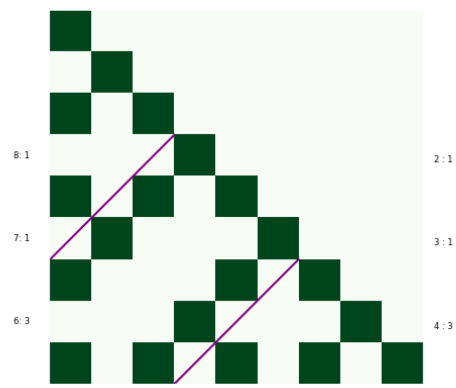
$n = 8$: divisibilités



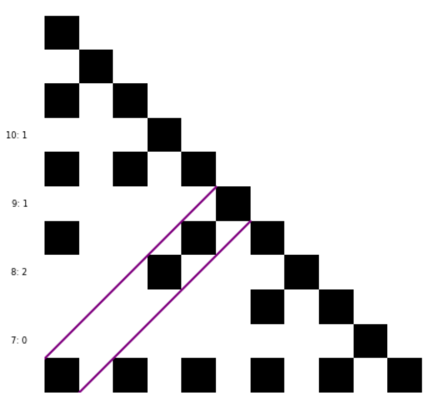
$n = 8$ matrice symétrisée



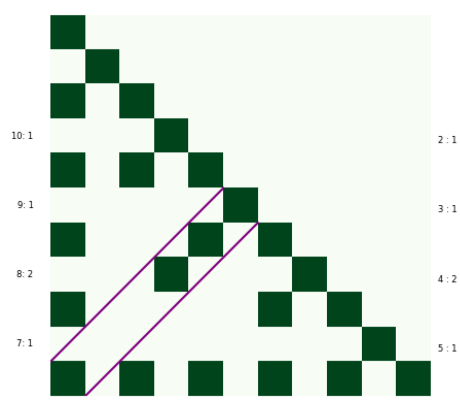
$n = 10$: divisibilités



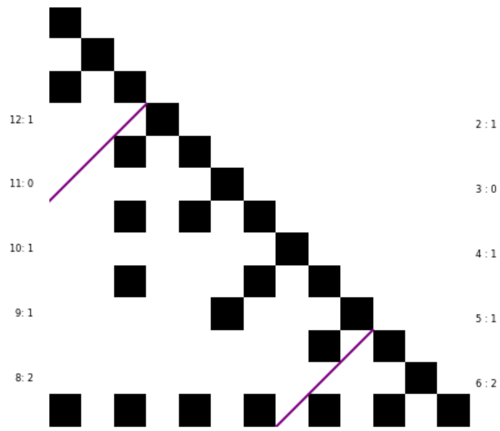
$n = 10$ matrice symétrisée



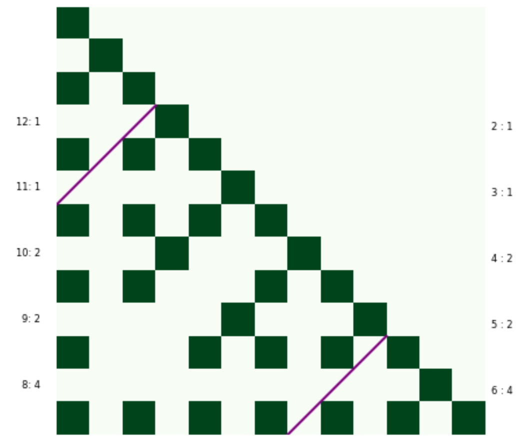
$n = 12$: divisibilités



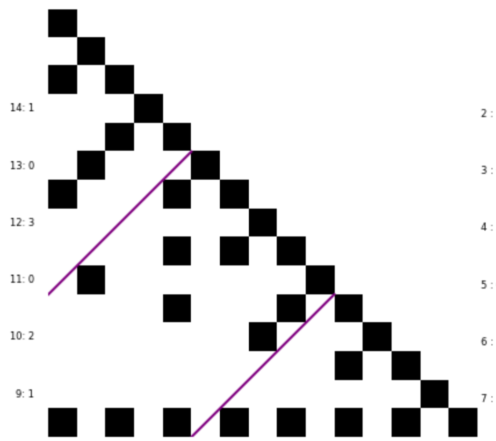
$n = 12$ matrice symétrisée



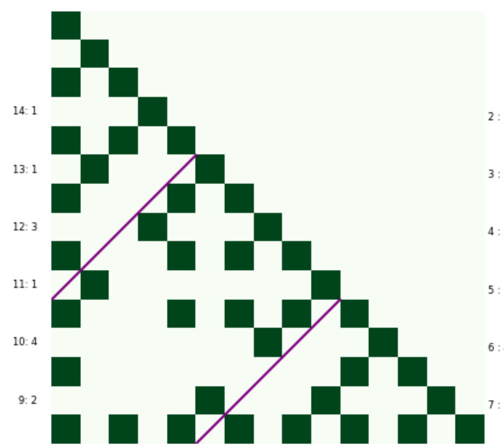
$n = 14$: divisibilités



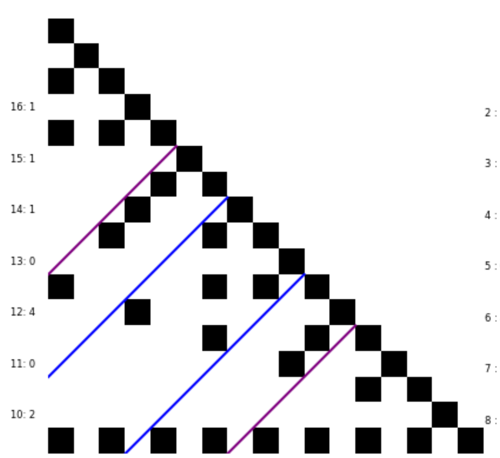
$n = 14$ matrice symétrisée



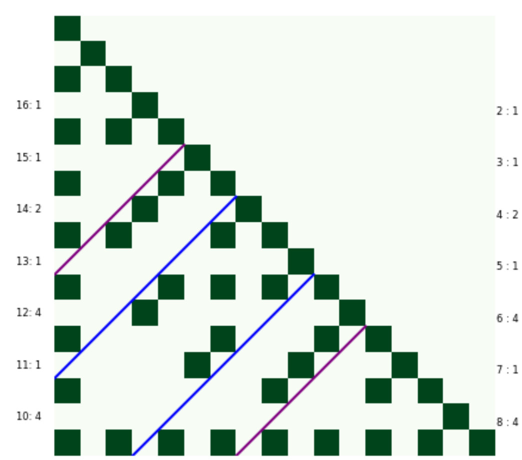
$n = 16$: divisibilités



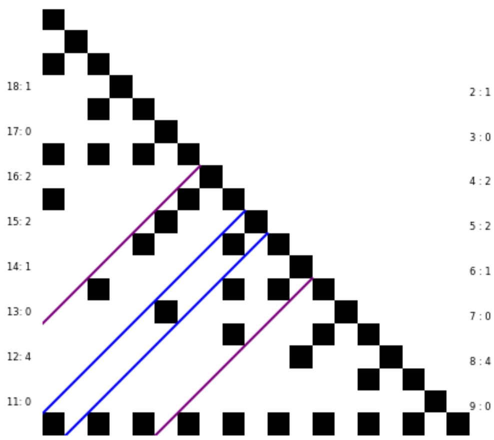
$n = 16$ matrice symétrisée



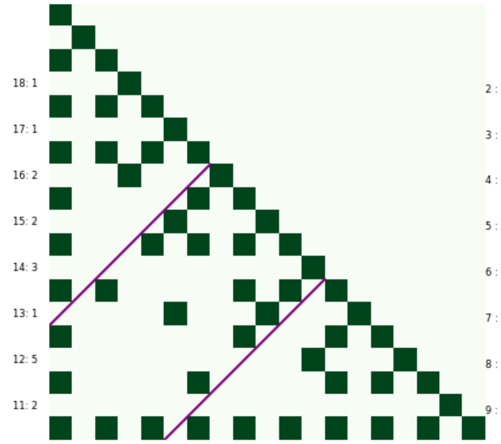
$n = 18$: divisibilités



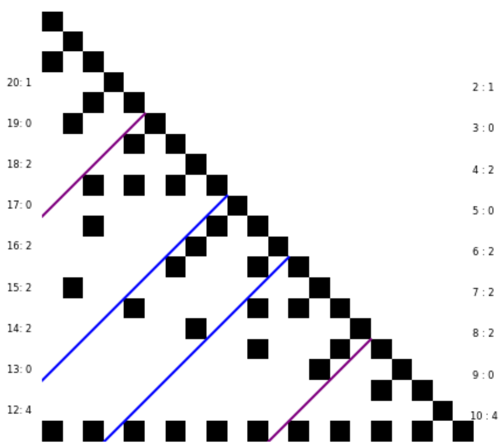
$n = 18$ matrice symétrisée



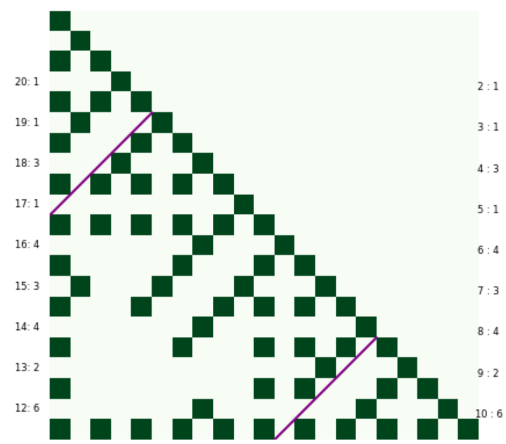
$n = 20$: divisibilités



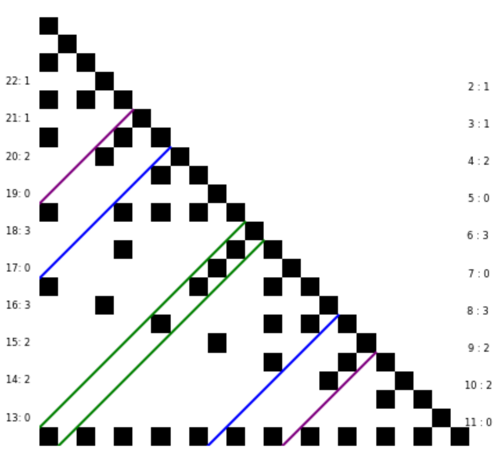
$n = 20$ matrice symétrisée



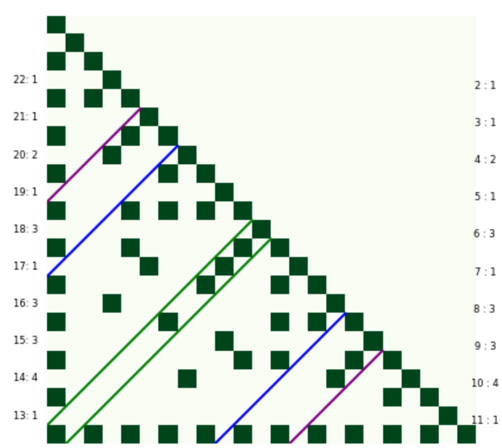
$n = 22$: divisibilités



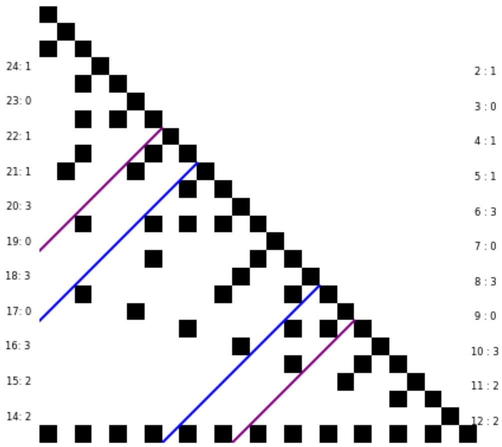
$n = 22$ matrice symétrisée



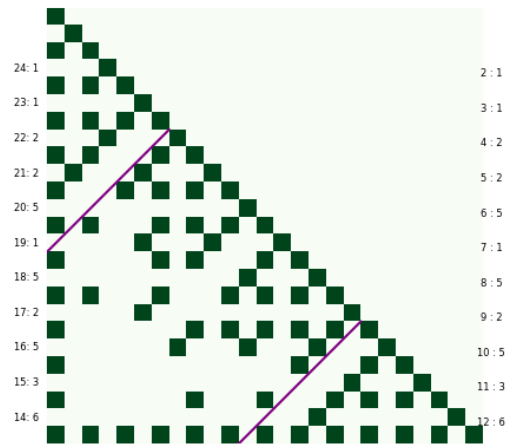
$n = 24$: divisibilités



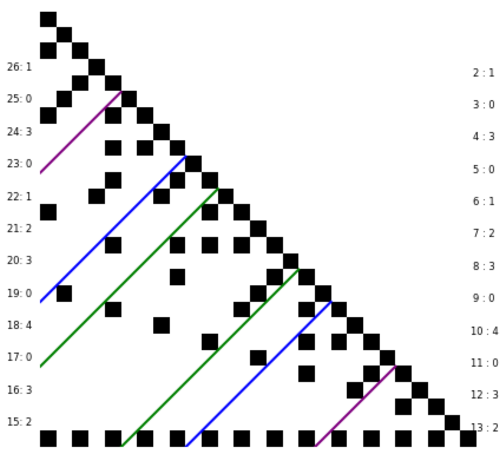
$n = 24$ matrice symétrisée



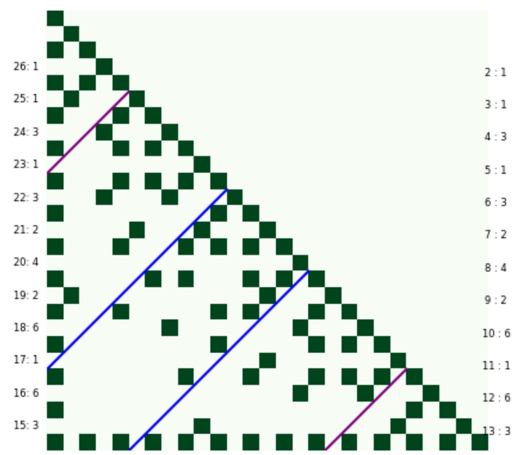
$n = 26$: divisibilités



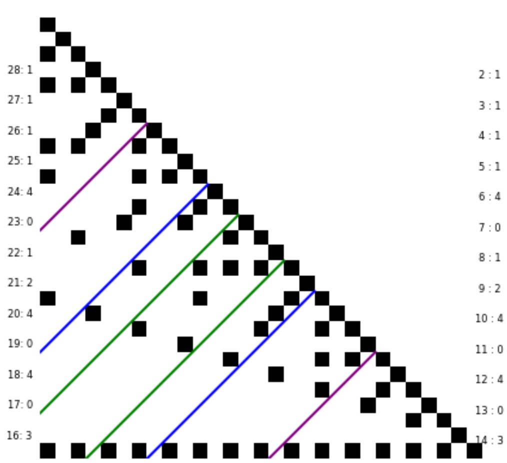
$n = 26$ matrice symétrisée



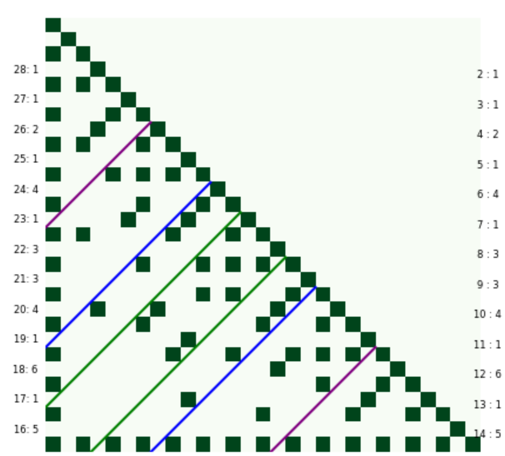
$n = 28$: divisibilités



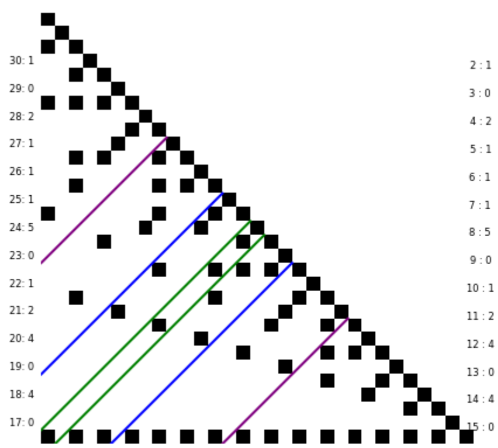
$n = 28$ matrice symétrisée



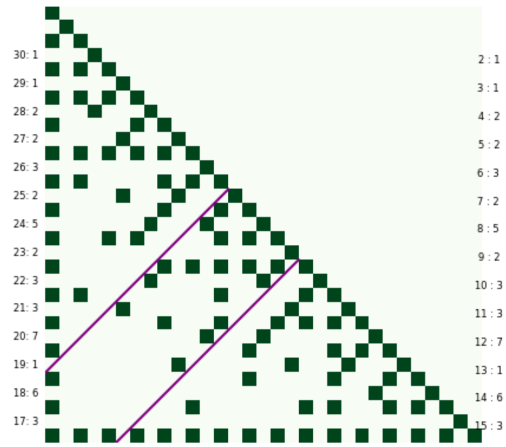
$n = 30$: divisibilités



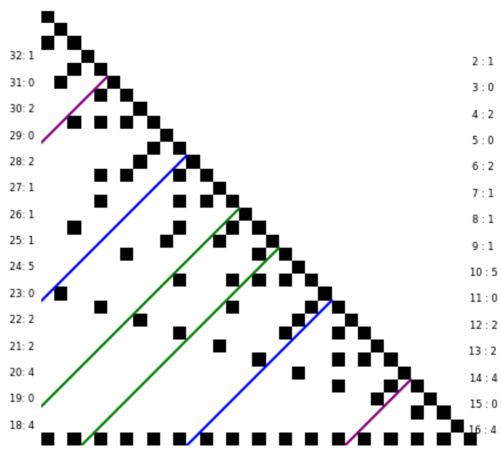
$n = 30$ matrice symétrisée



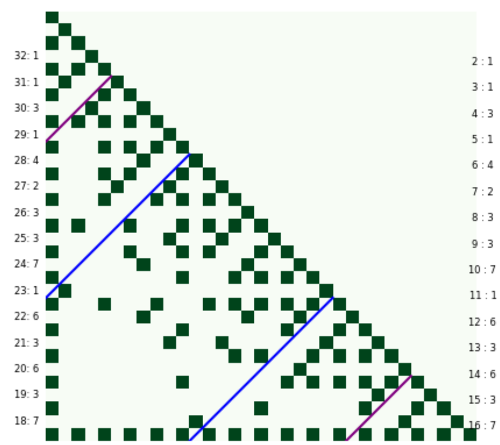
$n = 32$: divisibilités



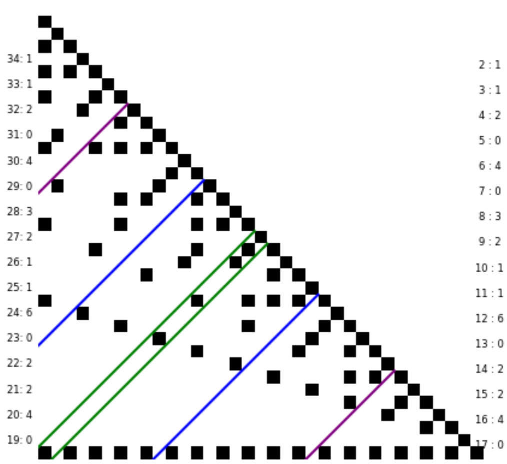
$n = 32$ matrice symétrisée



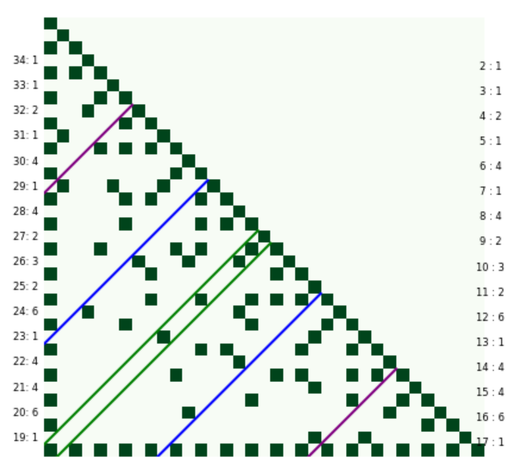
$n = 34$: divisibilités



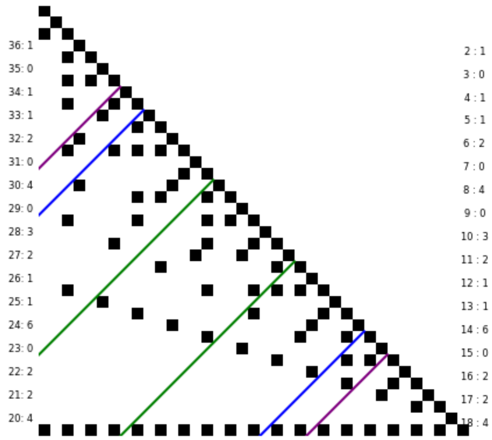
$n = 34$ matrice symétrisée



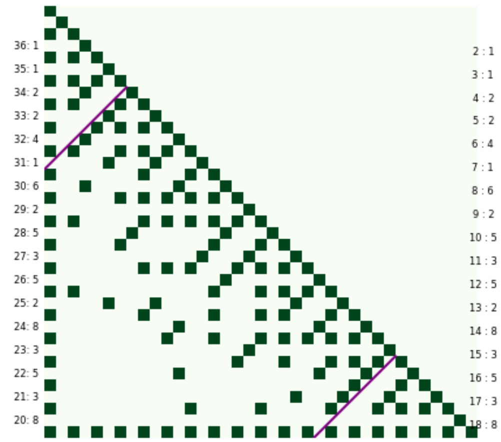
$n = 36$: divisibilités



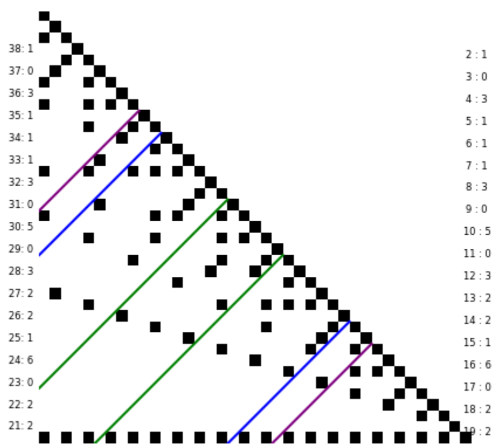
$n = 36$ matrice symétrisée



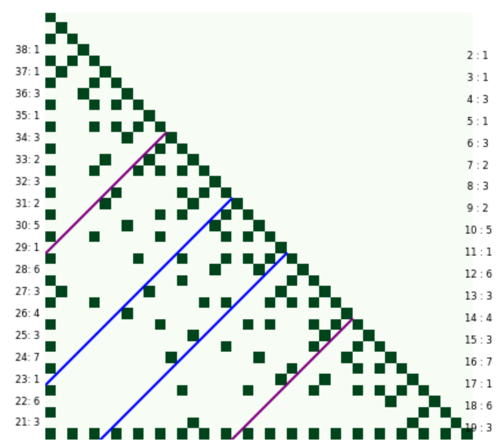
$n = 38$: divisibilités



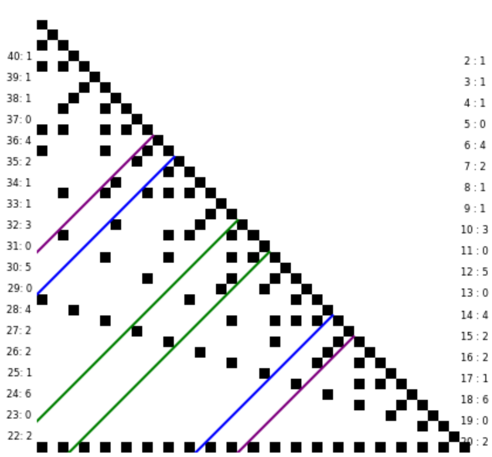
$n = 38$ matrice symétrisée



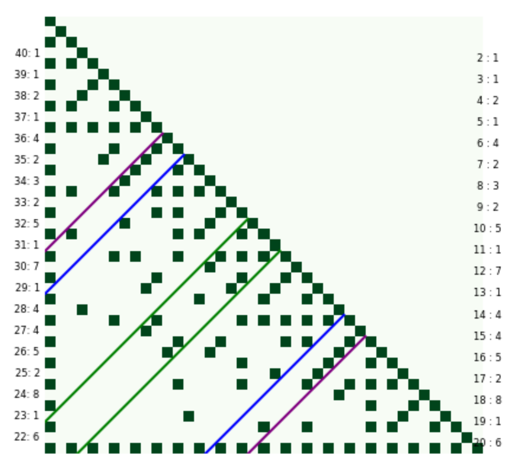
$n = 40$: divisibilités



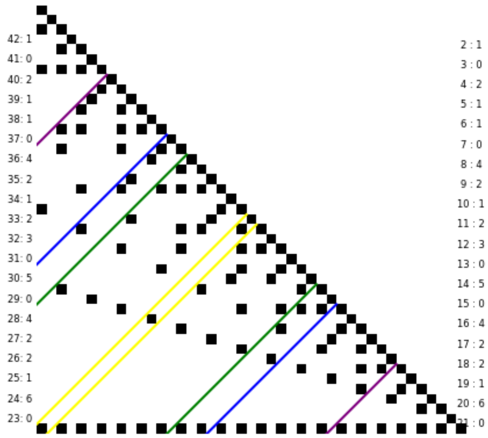
$n = 40$ matrice symétrisée



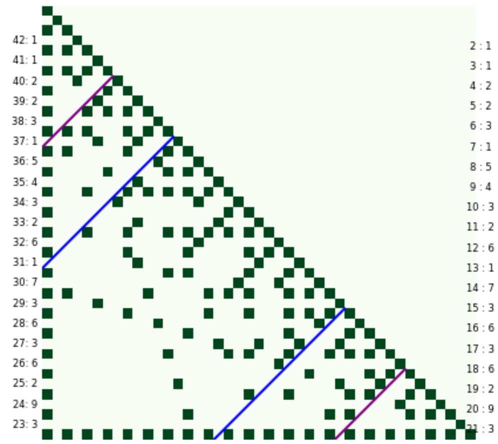
$n = 42$: divisibilités



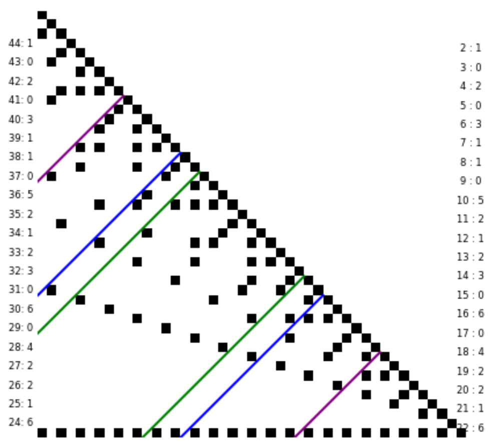
$n = 42$ matrice symétrisée



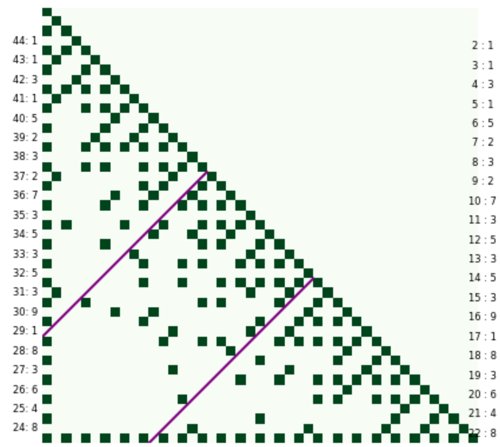
$n = 44$: divisibilités



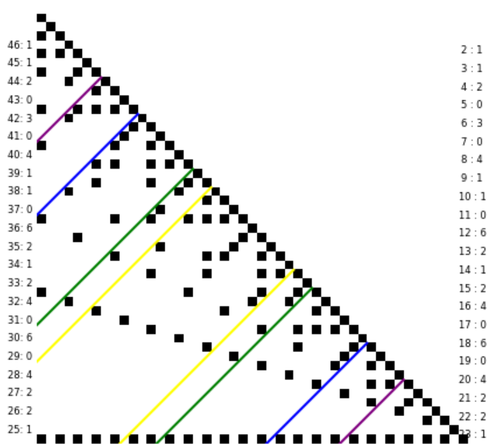
$n = 44$ matrice symétrisée



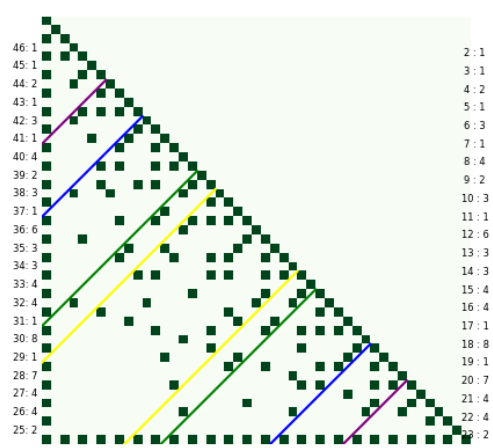
$n = 46$: divisibilités



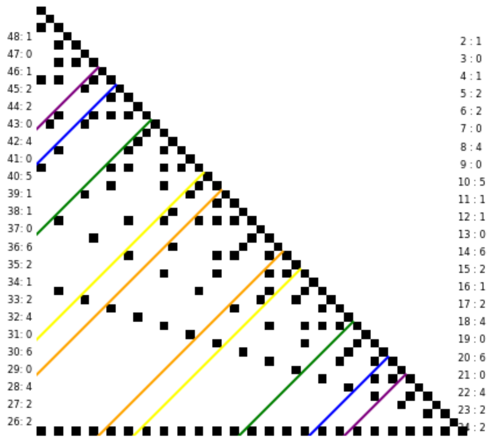
$n = 46$ matrice symétrisée



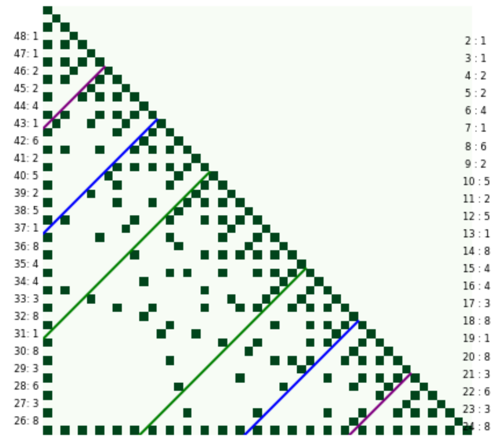
$n = 48$: divisibilités



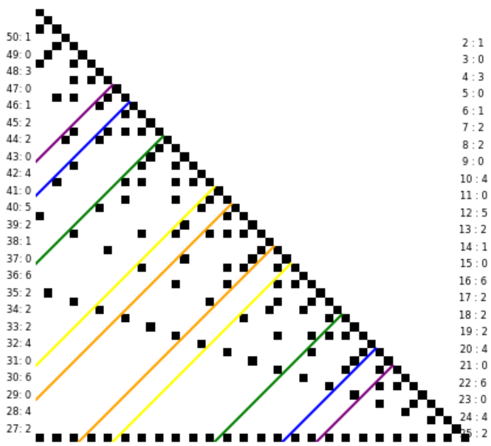
$n = 48$ matrice symétrisée



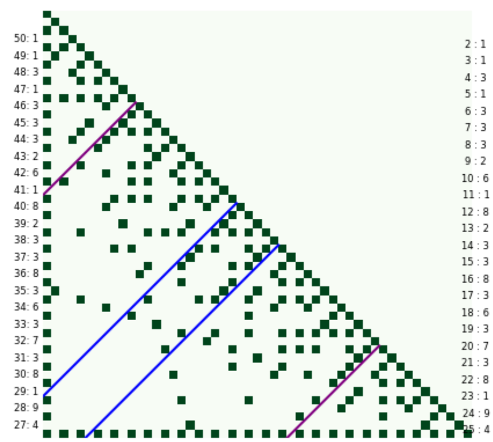
$n = 50$: divisibilités



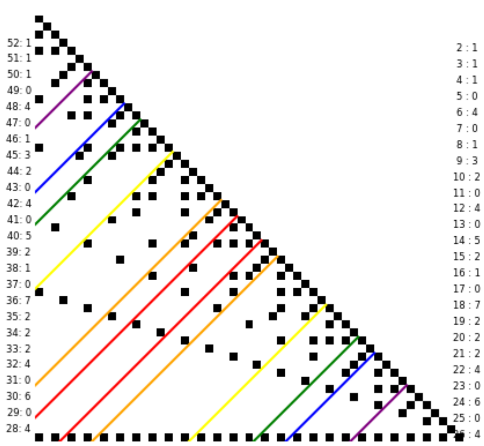
$n = 50$ matrice symétrisée



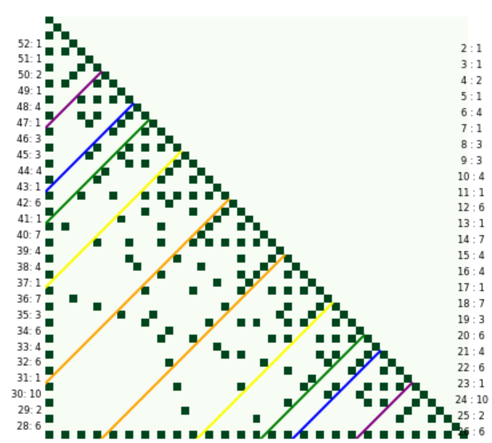
$n = 52$: divisibilités



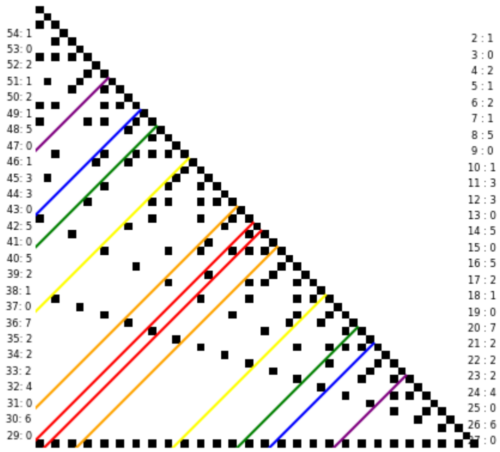
$n = 52$ matrice symétrisée



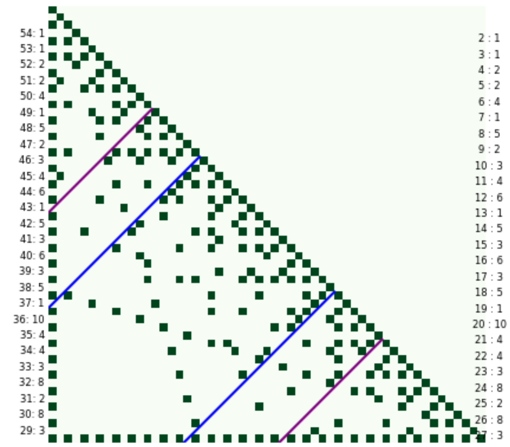
$n = 54$: divisibilités



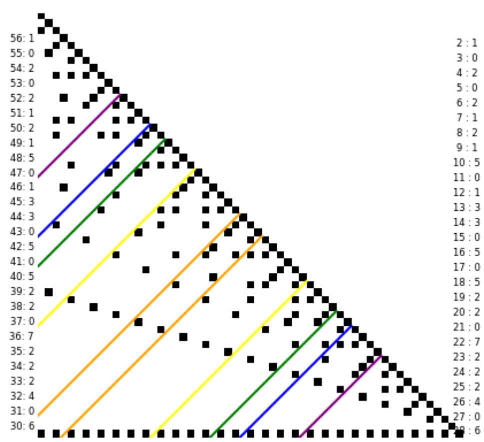
$n = 54$ matrice symétrisée



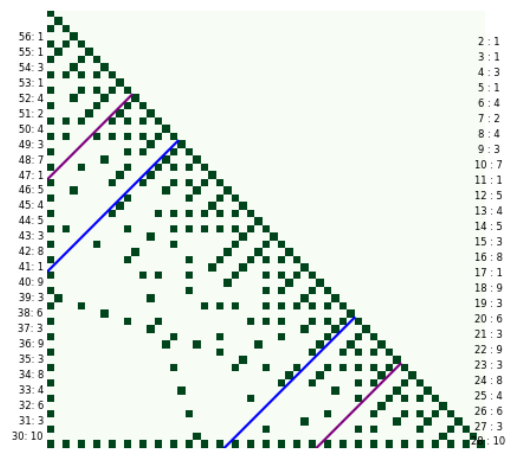
$n = 56$: divisibilités



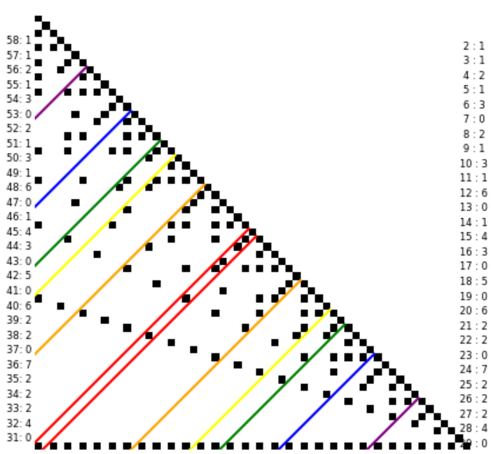
$n = 56$ matrice symétrisée



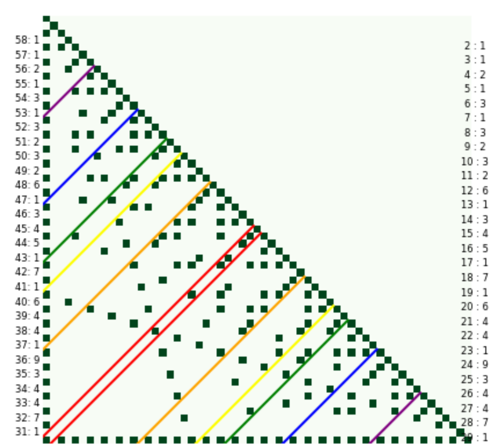
$n = 58$: divisibilités



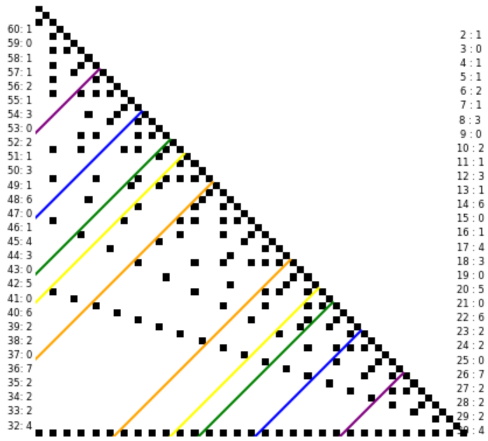
$n = 58$ matrice symétrisée



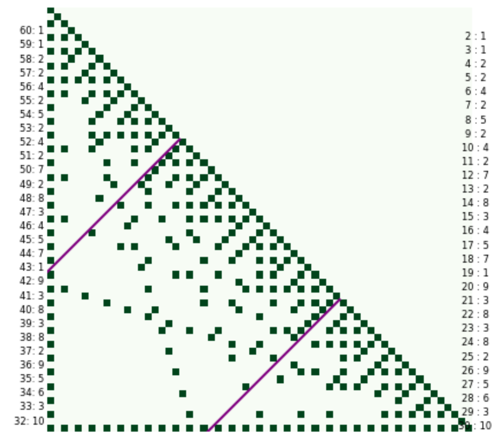
$n = 60$: divisibilités



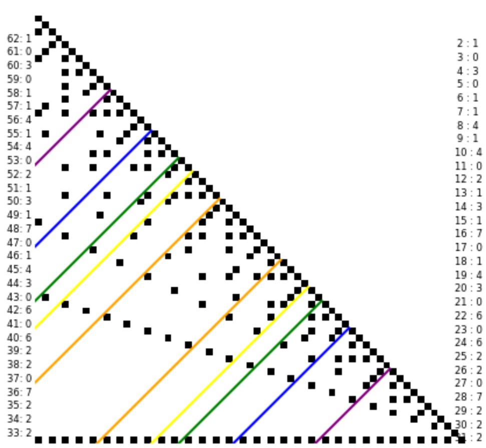
$n = 60$ matrice symétrisée



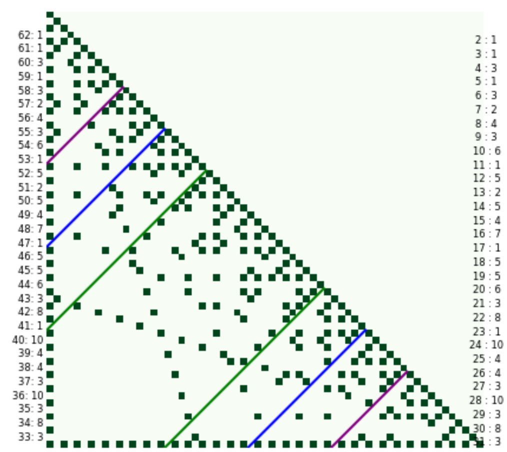
$n = 62$: divisibilités



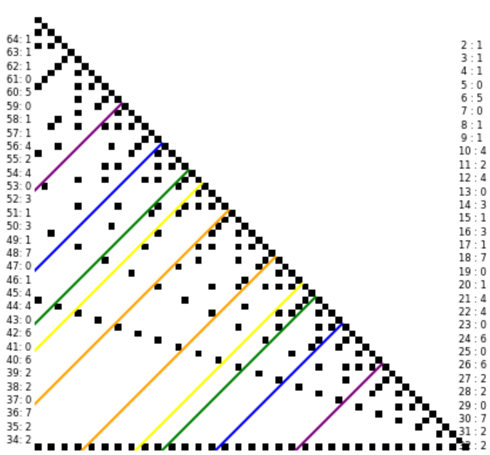
$n = 62$ matrice symétrisée



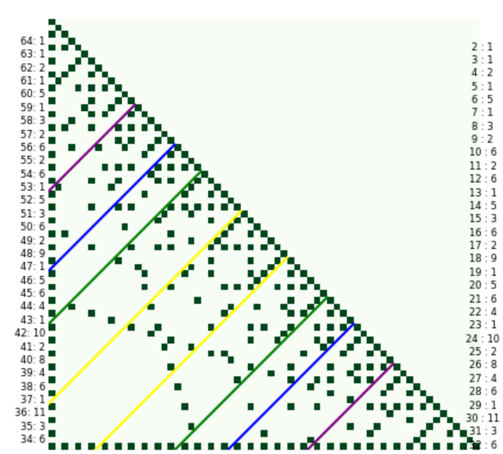
$n = 64$: divisibilités



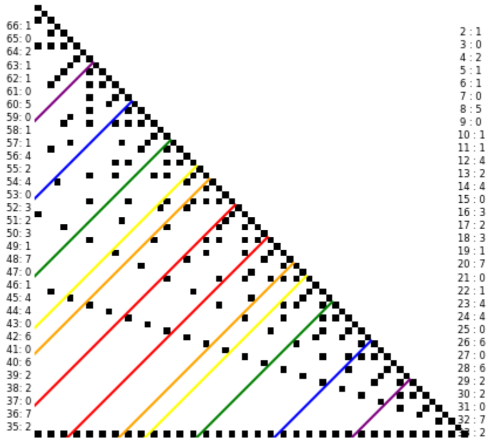
$n = 64$ matrice symétrisée



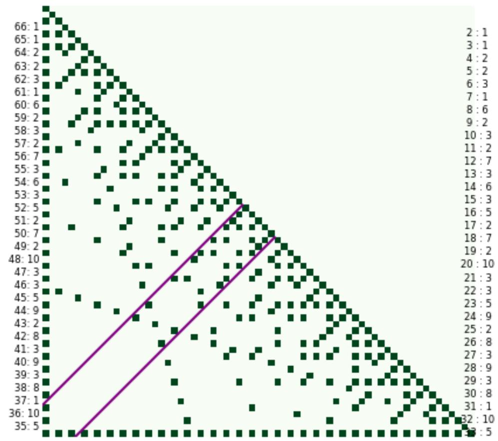
$n = 66$: divisibilités



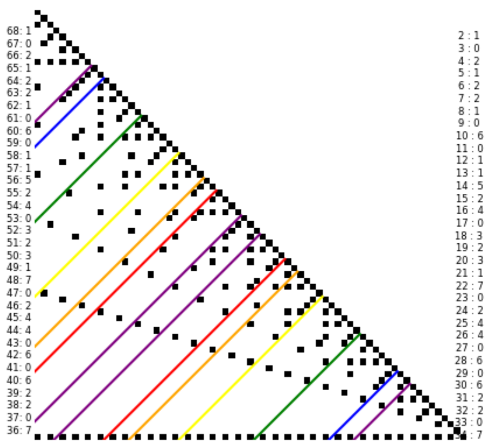
$n = 66$ matrice symétrisée



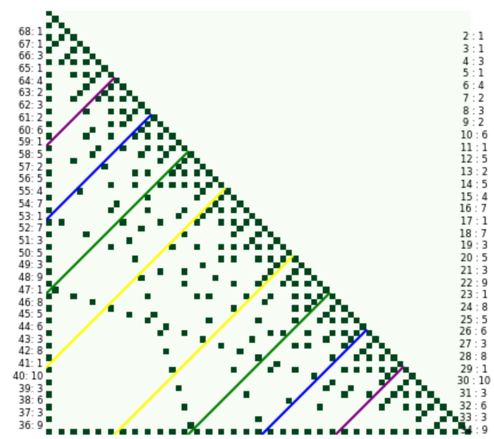
$n = 68$: divisibilités



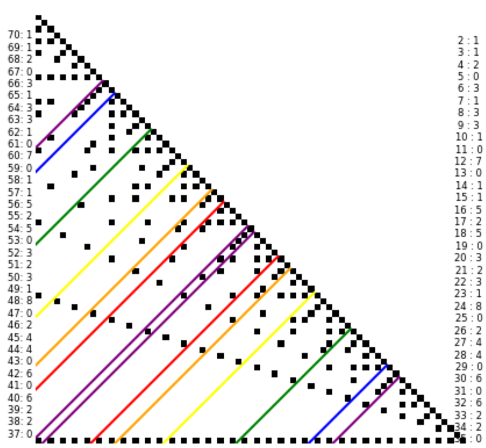
$n = 68$ matrice symétrisée



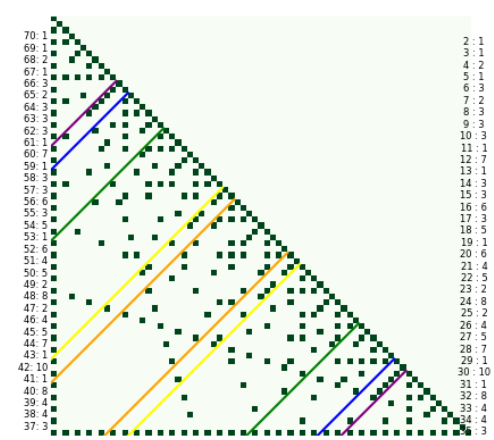
$n = 70$: divisibilités



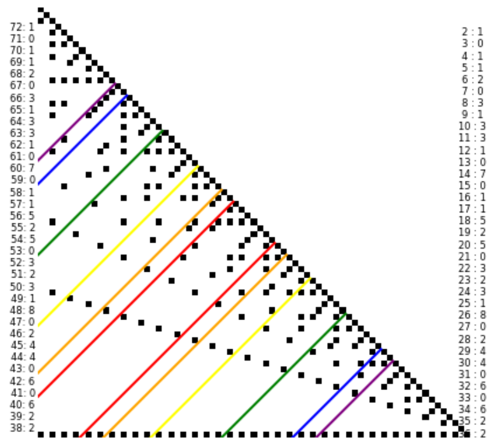
$n = 70$ matrice symétrisée



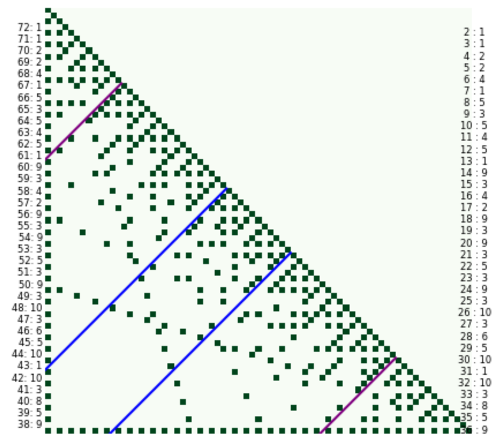
$n = 72$: divisibilités



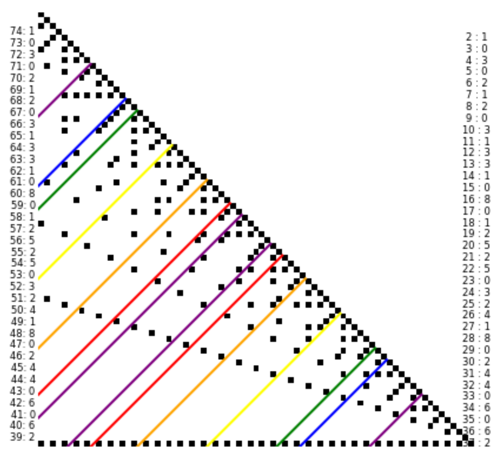
$n = 72$ matrice symétrisée



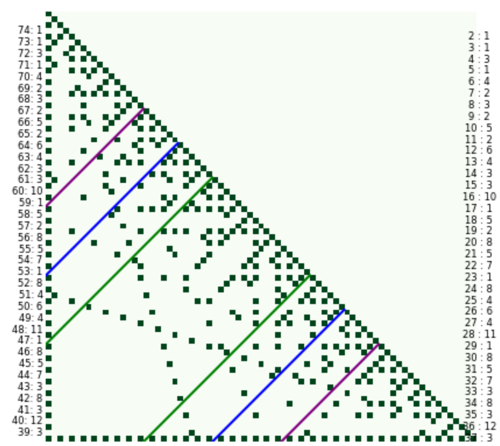
$n = 74$: divisibilités



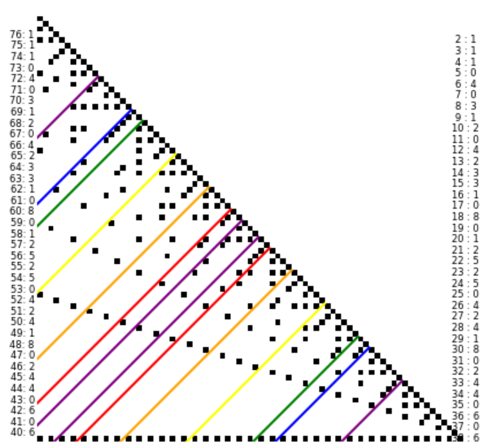
$n = 74$ matrice symétrisée



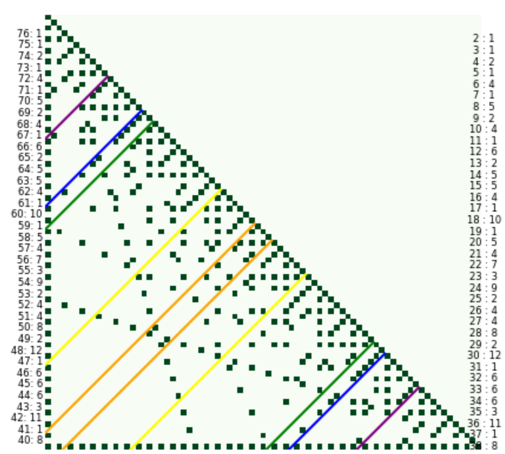
$n = 76$: divisibilités



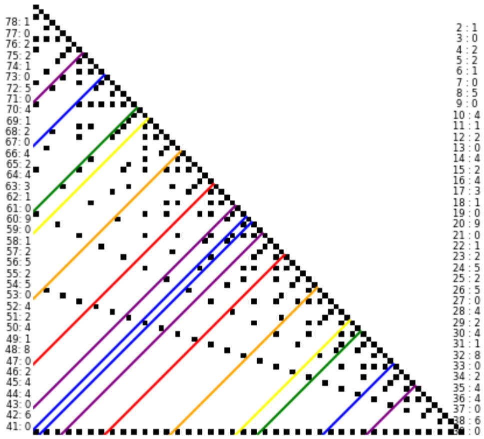
$n = 76$ matrice symétrisée



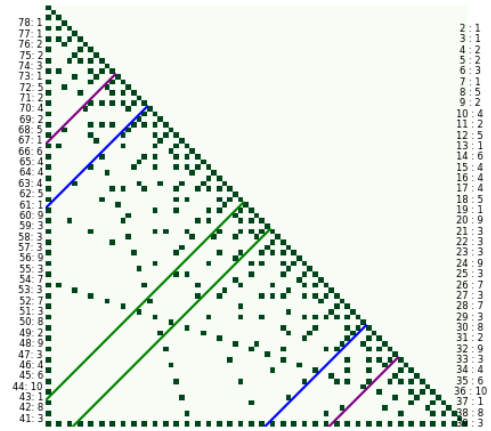
$n = 78$: divisibilités



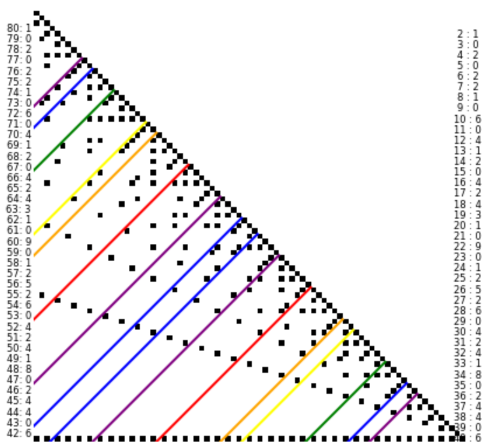
$n = 78$ matrice symétrisée



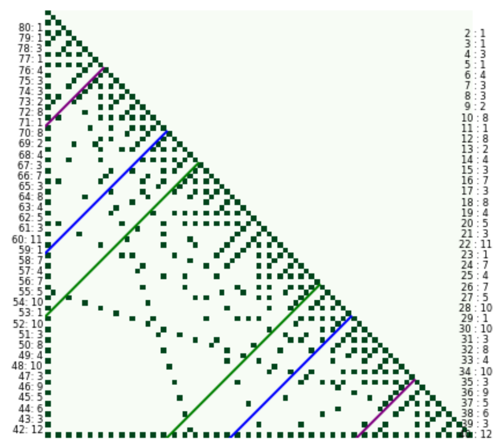
$n = 80$: divisibilités



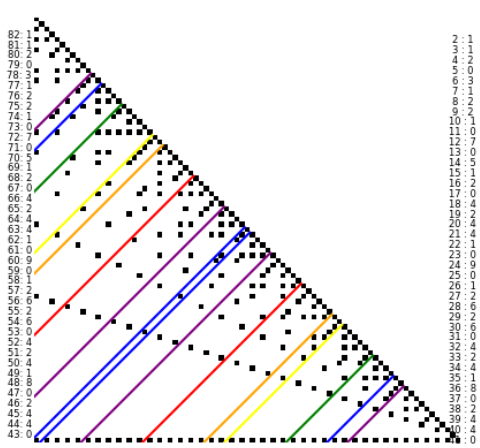
$n = 80$ matrice symétrisée



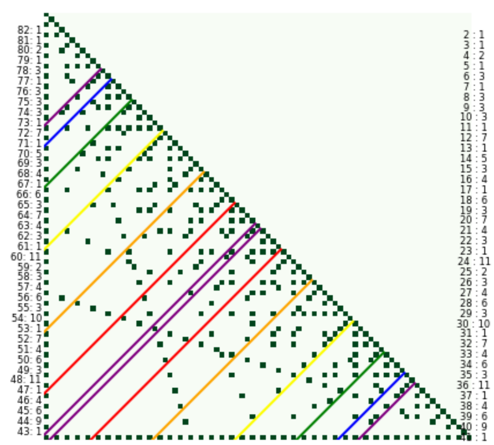
$n = 82$: divisibilités



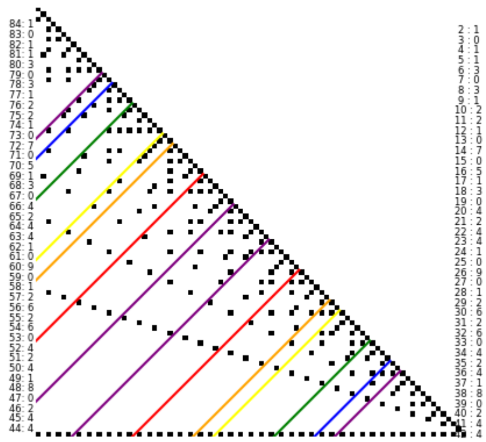
$n = 82$ matrice symétrisée



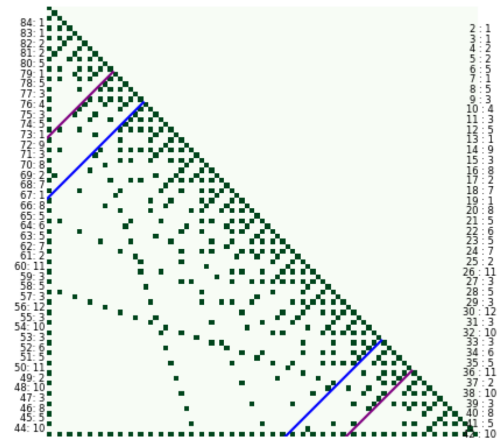
$n = 84$: divisibilités



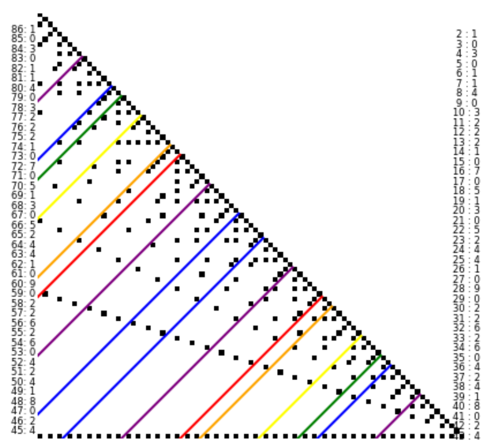
$n = 84$ matrice symétrisée



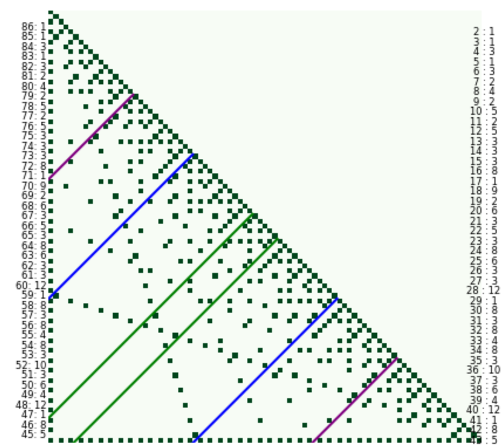
$n = 86$: divisibilités



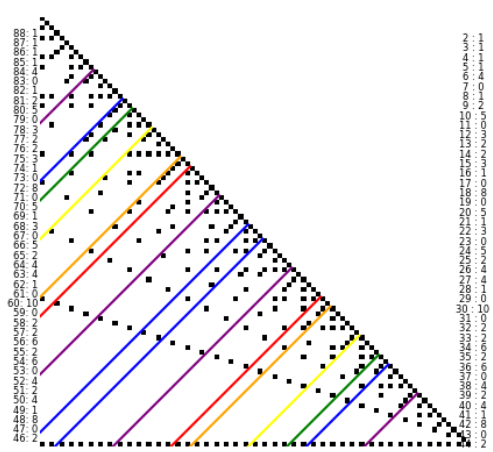
$n = 86$ matrice symétrisée



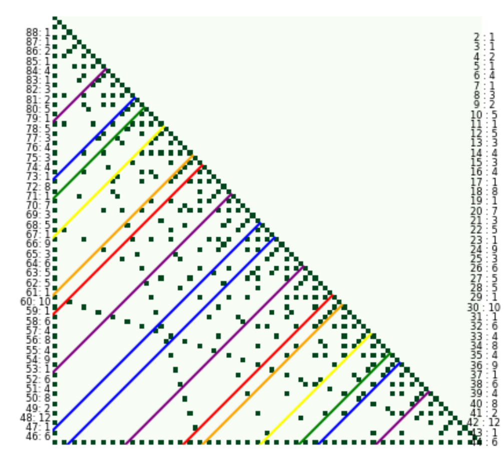
$n = 88$: divisibilités



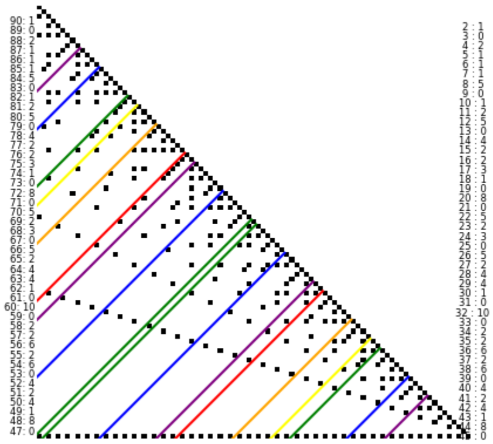
$n = 88$ matrice symétrisée



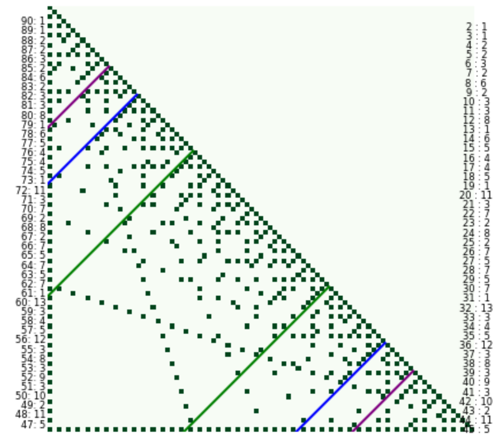
$n = 90$: divisibilités



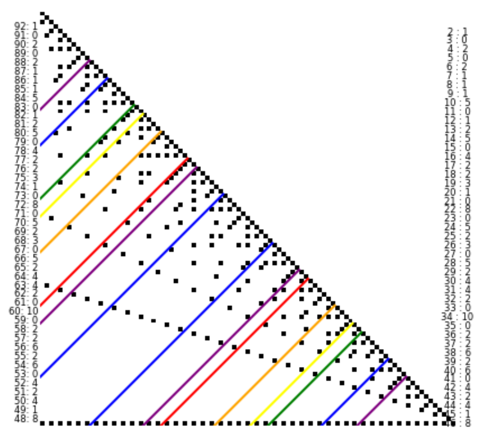
$n = 90$ matrice symétrisée



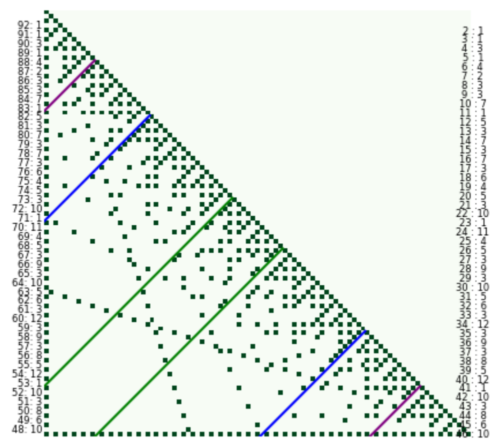
$n = 92$: divisibilités



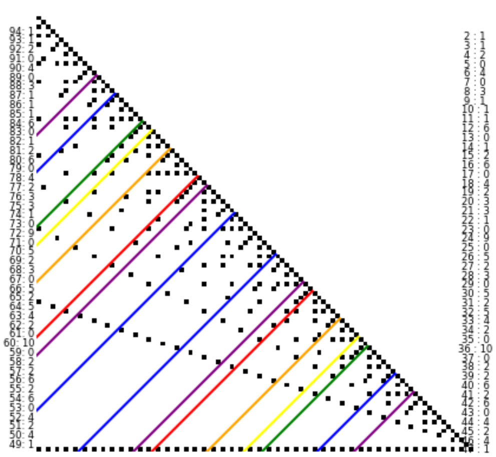
$n = 92$ matrice symétrisée



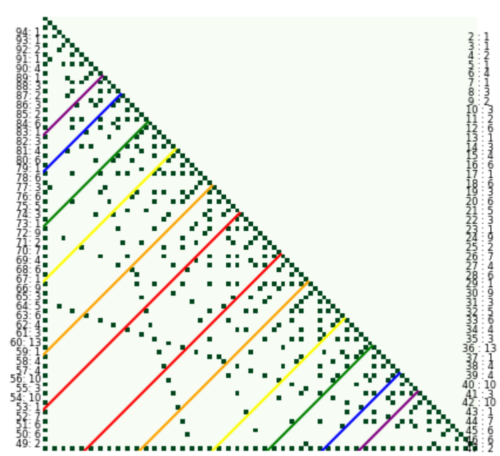
$n = 94$: divisibilités



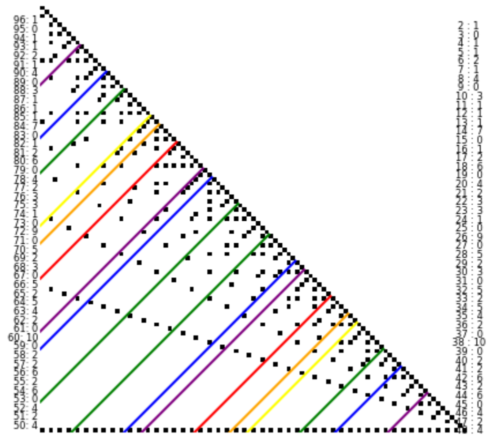
$n = 94$ matrice symétrisée



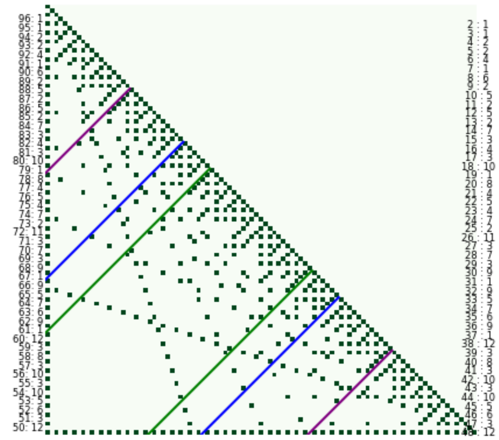
$n = 96$: divisibilités



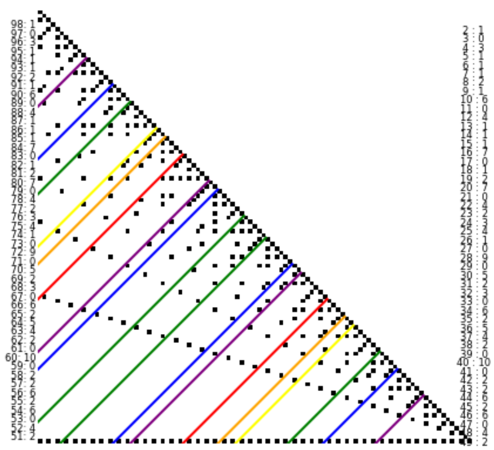
$n = 96$ matrice symétrisée



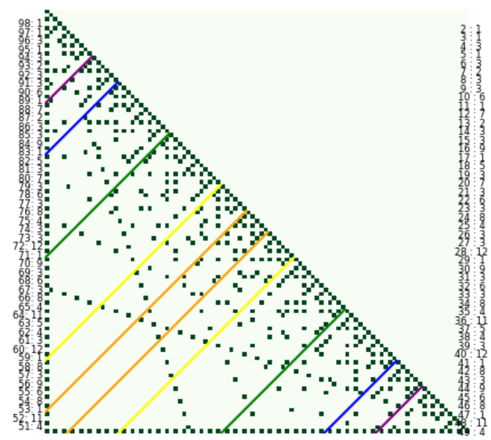
$n = 98$: divisibilités



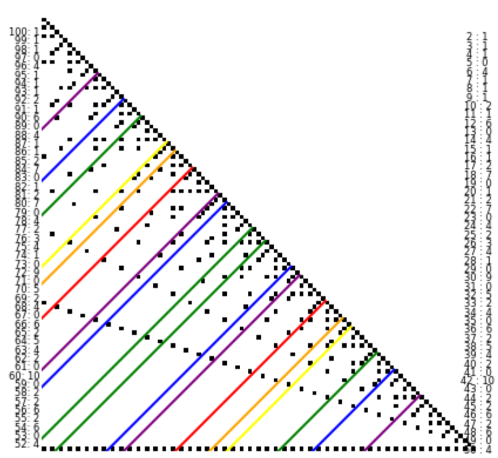
$n = 98$ matrice symétrisée



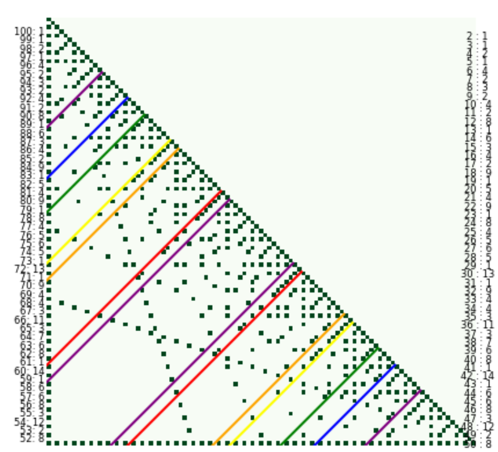
$n = 100$: divisibilités



$n = 100$ matrice symétrisée



$n = 102$: divisibilités



$n = 102$ matrice symétrisée