Conjecture de Goldbach et centres d'un réseau

Denise Vella-Chemla

avril 2026

1 Définitions

On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \ldots\}$ l'ensemble des nombres premier.

Dans la suite, on définit une grille dont les ensembles de coordonnées sont :

$$\begin{aligned} X_n &= \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n-3,\ p_k \in \mathcal{P}\} \cup \{0, n\}, \\ Y_n &= \{n - p_k \mid p_k \in X_n\} \cup \{0, n\}. \end{aligned}$$

Fait : $\forall n \geq 6, X_n \neq \varnothing, Y_n \neq \varnothing$.

On définit un sous-ensemble R de points du plan euclidien $\mathbb{N}^2$:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in X_n,\ y \in Y_n\}.$$

On nécessite une fonction f de numérotation des points de R :

$$\begin{array}{rccl} f : & R & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y.\text{Card}(X_n) + 1 \end{array}$$

On associe à R le graphe (dit graphe-grille carrée) $G = (S, A)$ avec :

$$\begin{array}{ll} S & = \{s_i, 1 \leq i \leq (\text{Card}(X_n))^2\}, \\ A & = A_H \cup A_V \end{array}$$

où S est l'ensemble des sommets et A est l'ensemble des arêtes (horizontales et verticales) du graphe :

$$\begin{array}{ll} A_H & = \{(s_i, s_j) | (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i)) \wedge (f^{-1}(s_j) = (x_i, y_i + 1))\} \\ A_V & = \{(s_i, s_j) | (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i)) \wedge (f^{-1}(s_j) = (x_i + 1, y_i))\} \end{array}$$

On restreint le graphe carré G au graphe triangulaire épointé $T = (S_{\text{T}}, A_{\text{T}})$:

$$\begin{aligned} S_{\text{T}} &= \{s_i | (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i) \in S) \wedge (x_i \geq y_i)\} \\ A_{\text{T}} &= \{a_i | (a_i = (s_i, s_j)) \wedge (a_i \in A) \wedge (s_i \in S_{\text{T}}) \wedge (s_j \in S_{\text{T}})\} \end{aligned}$$

On doit étiqueter les arêtes de A_{T} avec les écarts entre nombres premiers successifs. Pour cela, on définit la suite séquentielle des écarts entre nombres premiers successifs (le premier écart est le nombre premier 3 et le dernier écart est la différence entre n et le plus grand nombre premier $\leq n-3$) :

$$\Delta_n = s_k(n) \text{ telle que } \begin{cases} s_1 = 3 \\ \\ s_k = p_{k+1} - p_k \text{ pour } 2 \leq k \leq \mathrm{Card}(X_n) - 2 \\ \\ s_{\mathrm{Card}(X_n)} = n - \max\{p_k | (3 \leq p_k \leq n-3) \wedge (p \in \mathcal{P})\} \end{cases}$$

La fonction d'étiquetage des arêtes du graphe est alors :

$$\begin{array}{rccl} g: & A_{\mathrm{T}} & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ & ((x_i, y_i), (x_i, y_i+1)) & \mapsto & \delta_i \in \Delta_n \\ & ((x_i, y_i), (x_i+1, y_i)) & \mapsto & \delta_i \in \Delta_n \end{array}$$

Il s'avère que la distance entre deux sommets s et s' de S correspond à la distance de Manhattan (ou distance de norme 1) dans le plan euclidien :

$$\begin{array}{rccl} d: & S \times S & \rightarrow & \mathbb{N}^+ \\ & ((x_i, y_i)(x_j, y_j)) & \mapsto & |x_j - x_i| + |y_j - y_i|. \end{array}$$

La distance entre 2 sommets est ainsi la longueur d'un chemin de longueur minimale menant de s à s' dans le graphe G_{T}.

Soit $s \in S$. L'excentricité de s, notée $e(s)$ est définie par :

$$e(s) = \max\{d(s, s'), \forall s' \in S\}.$$

Soit E_{T} l'ensemble des excentricités des sommets de T :

$$E_{\mathrm{T}} = \{e(s) | s \in S_{\mathrm{T}}\}.$$

Un centre d'un graphe est un sommet du graphe dont l'excentricité est égale au minimum de l'ensemble des excentricités de tous les sommets du graphe.

Le sommet s est un centre du graphe $G = (S, A)$ si et seulement si

$$e(s) = m \text{ avec } m = \min\{e(s') | s' \in S\}.$$

Dans le cas du graphe particulier T qui nous intéresse, un sommet s de S_{T} est un centre de T si et seulement si $e(s) = \min(E_{\mathrm{T}})$.

2 Assertions

Lemme : *Le graphe G est fortement connexe.*

Lemme : *Le graphe T (triangulaire épointé) est fortement connexe.*

Lemme : *L'ensemble des sommets S_{T} et l'ensemble des arêtes A_{T} étant deux ensembles finis non vides, l'ensemble des excentricités des points du graphe E_{T} est bien défini et non vide. L'ensemble du ou des points d'excentricité minimum est bien défini et est non vide.*

(**Lemme** : *S (la source) et P (le puits) sont les points du graphe qui ont une excentricité qui est le maximum des excentricités ; l'excentricité maximum a pour valeur $2n$.*)

Théorème 1 : *Les centres du graphe triangulaire épointé correspondent aux décomposants de Goldbach de n. Le chemin permettant de parvenir à ces points depuis le point source S (de coordonnées $(0,0)$ est composé d'une partie du chemin ne contenant que des arêtes verticales du graphe et dont la somme des étiquettes est égale à p avec p un nombre premier et d'une partie du chemin ne contenant que des arêtes horizontales du graphe et dont la somme des étiquettes est égal à q où q est également premier.*

Découle des définitions.

Théorème 2 : *Le graphe triangulaire épointé contient au moins un centre.*

Cela découle de l'existence d'un minimum et d'un maximum pour tout ensemble d'entiers non vide.

Théorème 3 : *Tout nombre pair admet au moins une décomposition de Goldbach.*

Découle des théorème 1 (d'isomorphisme entre les décomposants de Goldbach de n et les centres du graphe G_{T}) et théorème 2 (d'existence obligatoire d'un centre dans le graphe G_{T}).

3 Illustrations : cas $n = 16$

$$\mathrm{X}_{16} = \{3, 5, 7, 11, 13\} \qquad \mathrm{Y}_{16} = \{13, 11, 9, 5, 3\}$$

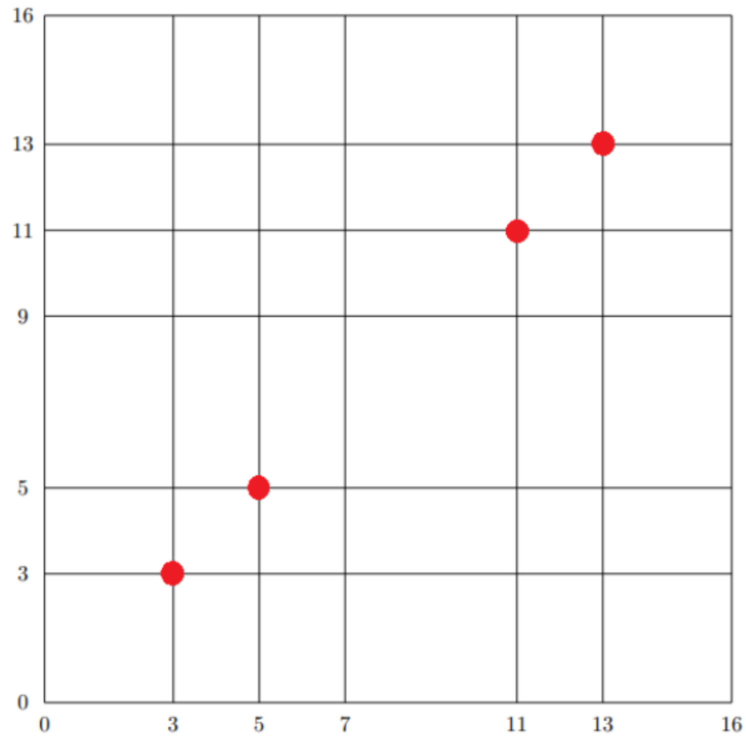


FIGURE 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$. Les points correspondants aux décomposants de Goldbach de 16 qui sont $\{3, 5, 11, 13\}$, i.e. les points $(3, 3), (5, 5), (11, 11), (13, 13)$ sont colorés en rouge sur la diagonale ascendante.

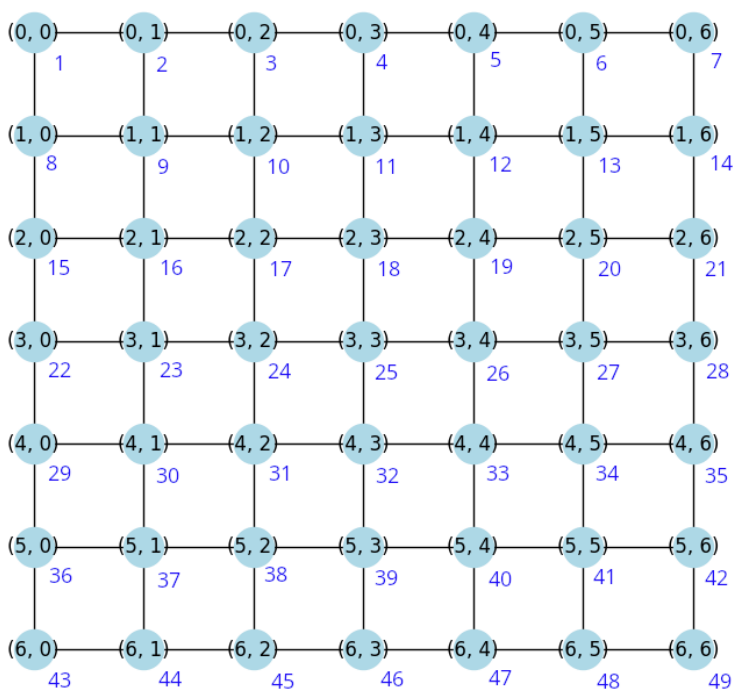


FIGURE 2 : Numérotation des sommets du graphe

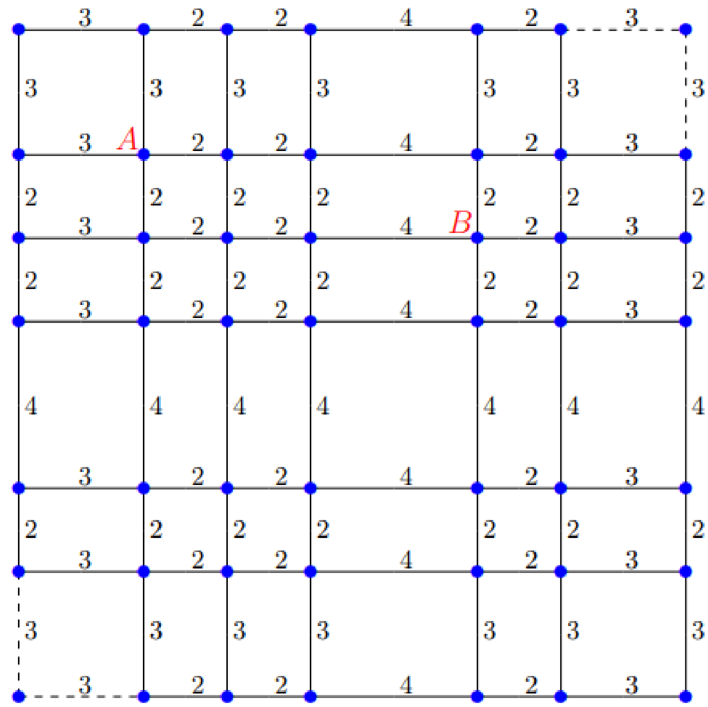


FIGURE 3 : Étiquetage des arêtes pour $n = 16$. ($d(A, B) = 10$)

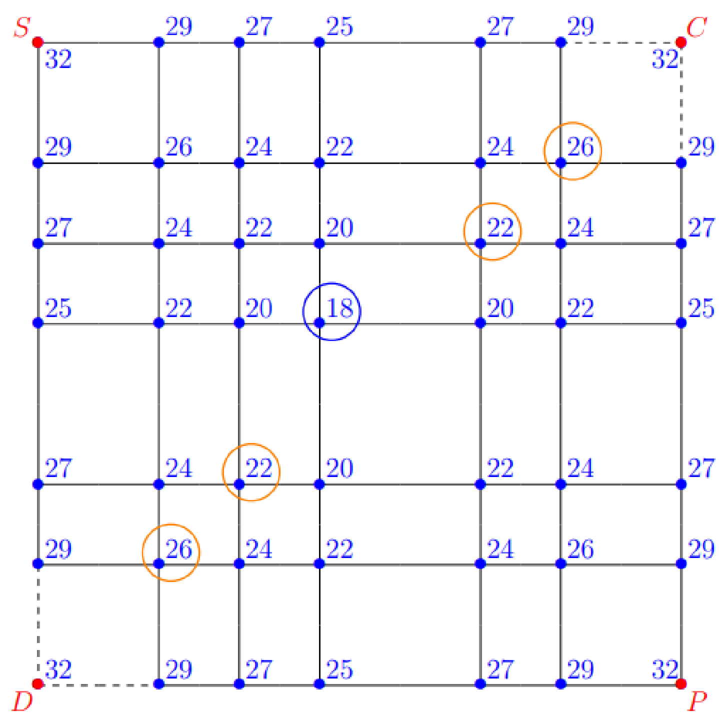


FIGURE 4 : excentricités des sommets.
Excentricité du centre du graphe entourée en bleu.
Excentricités des sommets correspondants dans le plan euclidien aux points de coordonnées (p_k, p_k) avec p_k décomposant de Goldbach de n entourées en orange.

Note : ces sommets ne sont pas des centres du graphe.

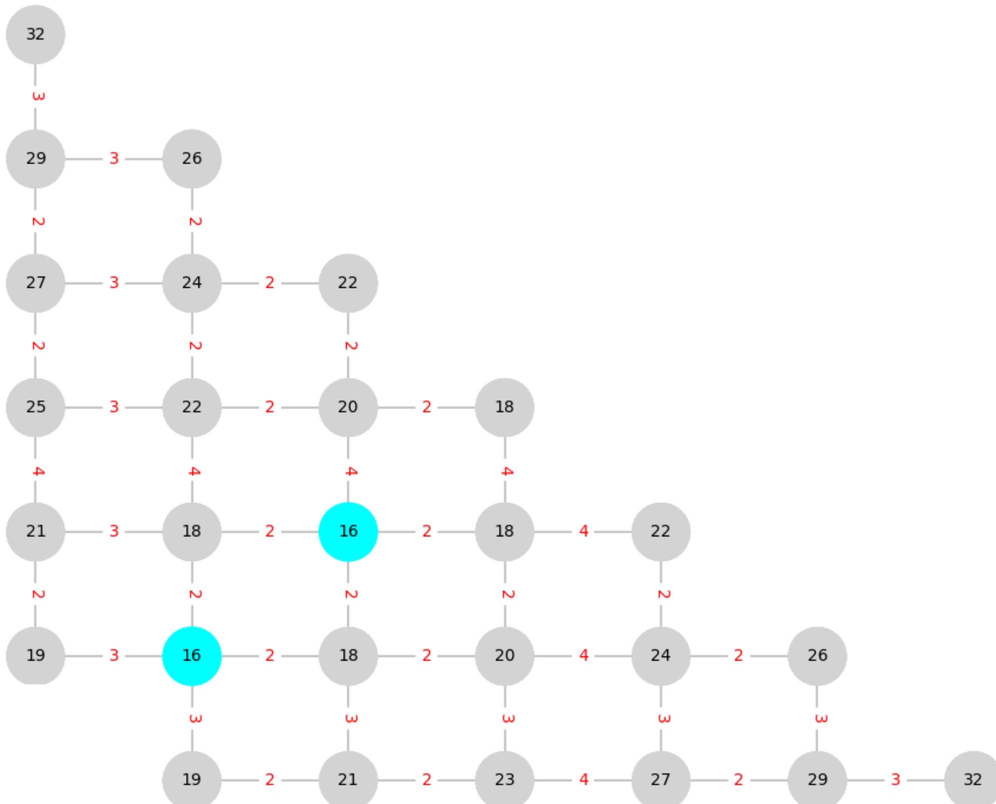


FIGURE 5 : Excentricités des sommets du graphe triangulaire épointé ; les centres du graphe correspondent maintenant aux décomposants de Goldbach du graphe triangulaire épointé.

Note : la conjecture de Goldbach est trivialement vérifiée par les nombres pairs qui sont doubles d'un nombre premier. Dans la modélisation proposée ici, la décomposition triviale de Goldbach $2p_k = p_k + p_k$ avec p un nombre premier correspond à un centre du graphe. Cependant le centre du graphe en question n'est pas au centre "euclidien" du carré initial : il est au centre en termes de nombre d'arêtes du graphe triangulaire épointé, c'est-à-dire qu'il est toujours situé sur l'hypoténuse du triangle rectangle isocèle sous-tendant le graphe ; le chemin qui mène au centre du graphe correspondant à la décomposition triviale $2p_k = p_k + p_k$ est, comme le triangle épointé complet, un triangle rectangle isocèle du plan euclidien.

Les triangles épointés visualisant les centres et donc les décompositions de Goldbach des nombres n compris entre 8 et 102 peuvent être téléchargés à cette adresse. Le programme calculant ces centres a été fourni par Gemini, suivant les instructions de l'auteure pour étiqueter correctement les arêtes, les sommets, pour calculer les excentricités, d'abord dans les carrés et ensuite dans les triangles épointés (on peut le télécharger à cette adresse). Il est fourni en annexe 1 ci-après, le graphe G_{T} correspondant au cas $n = 98$ est fourni en annexe 2.

Références

[1] C. Adam, P. Tannery, Œuvres de Descartes - Physico-mathematica, Compendium Musicae, Regulae ad directionem ingenii - Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance, vol. X, Excerpta ex Mss. R. Des-Cartes.

III : Numeri polygoni, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908, Cerf, Paris.

[2] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskiĭ-Višik-Ljusternik theorem, arXiv, `https://arxiv.org/pdf/math/0402090`, 2006.

[3] M. Audin, Géométrie, 2006, EDP Sciences.

[4] G. Belgioioso, René Descartes : Opere Posthume 1650-2009, 2009, Bompiani – il pensioro occidentale.

[5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph theory, 2008, Springer.

[6] F. Buckley, F. Harary, Distance in graphs, 1990, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.

[7] F. Butelle, Contribution à l'algorithmique distribuée : arbres et ordonnancement, 2007, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Paris XIII.

[8] G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach, 1894, Compte rendu, Congrès de Caen, Association française pour l'avancement des sciences, 1894, XXIII, 117-134.

[9] O. Cogis, C. Schwartz, Théorie des graphes, 2018, Cassini, collection L.

[10] A. Connes, Symétries, 2001, Pour la Science, numéro 292, 36-43.

[11] R. L. Francis, J. A. White, Facility layout and location : an analytical approach, 1974, Prentice-Hall.

[12] C. Goldbach, Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, OO765), Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIIIe siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Pétersbourg, 1988, P. H. Fuss, 125-129, `http://eulerarchive.MAA.org`.

[13] M. Gondran, M. Minoux, Dioids and semi-rings, new models and algorithms, Springer, 2008.

[14] G. Y. Handler, Minimax network location : theory and algorithms, 1974, MIT Flight transportation laboratory.

[15] C. Jordan, Sur les assemblages de lignes, 1869, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 70, 185-190.

[16] O. Kariv, S. L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems : the p-centers, I et II, SIAM Journal on applied mathematics, vol. 37, 1979, 513-560.

[17] C.-A. Laisant, Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, no. 25, 1897, 208-211.

[18] Laquière, Note sur la géométrie des quinconces, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 7, 1879, 85-92.

[19] J.-L. Laurière, Intelligence artificielle, résolution de problèmes par l'homme et la machine, Eyrolles, 1986.

[20] J.-M. Meny, G. Aldon, L. Xavier, Butinage graphique, 2003, IREM de Lyon.

[21] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 8, 1880, 120-124.

[22] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 9, 1881, 30-42.

[23] S. Ratel, Densité, VC-dimension et étiquetages de graphes, 2019, Thèse, Aix-Marseille.

[24] A. Sainte-Laguë, Les réseaux (ou graphes), Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 18, 1926, 1-64.

[25] J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2, Astérisque, n° 46, 1983, Société Mathématique de France.

[26] R.-C. Vaughan, Goldbach's conjectures : a historical perspective, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing, 2016, 479-520.

Annexe 1 : Programme d'affichage du graphe triangulaire épointé et de visualisation de ses centres.

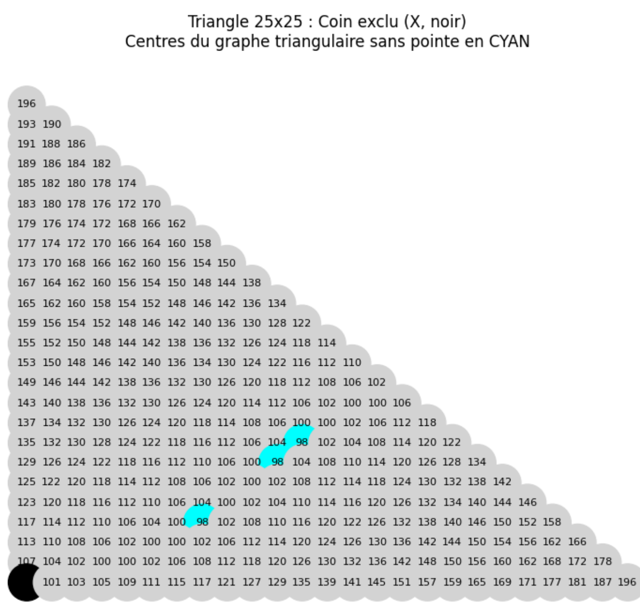
```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def premier(atester):
  k = 2
  if atester in [0, 1]: return False
  if atester in [2, 3, 5, 7]: return True
  while True:
    if k * k > atester: return True
    else:
      if atester % k == 0: return False
      else: k = k + 1

for n in range(8,62,2):
  L=[0]
  for k in range(3,n-1,2):
    if premier(k):
      L.append(k)
  L.append(n)
  print('L = ',L)
  ecarts = []
  for indice in range(1,len(L)):
    ecarts.append(L[indice]-L[indice-1])
  print('ecarts = ',ecarts)
  poids_fixes = ecarts
  SIZE = len(poids_fixes) + 1
  G_full = nx.grid_2d_graph(SIZE, SIZE)
  nodes_to_keep = [(i, j) for (i, j) in G_full.nodes() if i >= j]
  G_complet = G_full.subgraph(nodes_to_keep).copy()
  for (u, v) in G_complet.edges():
      (r1, c1), (r2, c2) = u, v
      if r1 == r2: # Horizontale
          G_complet.edges[u, v]['weight'] = poids_fixes[min(c1, c2)]
      else: # Verticale
          G_complet.edges[u, v]['weight'] = poids_fixes[min(r1, r2)]
  node_isole = (SIZE - 1, 0) # Le coin bas-gauche
  G_gros = G_complet.copy()
  if node_isole in G_gros:
      G_gros.remove_node(node_isole) # Supprime le noeud ET ses aretes
  path_lengths = dict(nx.all_pairs_dijkstra_path_length(G_gros, weight='weight'))
  eccs_gros = {node: max(dists.values()) for node, dists in path_lengths.items()}
  min_ecc = min(eccs_gros.values())
  centers_triangle = [n for n, ecc in eccs_gros.items() if ecc == min_ecc]
  plt.figure(figsize=(10, 8))
  pos = {(i, j): (j, -i) for (i, j) in G_complet.nodes()}
  node_labels = {n: f"{eccs_gros[n]}" for n in G_gros.nodes()}
  node_labels[node_isole] = "X" # Marquer le noeud exclu
  node_colors = []
  for node in G_complet.nodes():
      if node == node_isole:
          node_colors.append('black') # Le point exclu est noir
      elif node in centers_triangle:
          node_colors.append('cyan')  # Les centres du "gros" sont cyan
```

```
    else:
        node_colors.append('lightgrey') # Le reste est gris
nx.draw_networkx_edges(G_complet, pos, alpha=0.5, edge_color='gray')
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G_complet, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G_complet, pos, edge_labels=edge_labels,
                             font_color='red', font_size=8)
nx.draw_networkx_nodes(G_complet, pos,
                       node_color=node_colors,
                       node_size=800)
nx.draw_networkx_labels(G_complet, pos, labels=node_labels, font_size=8)
plt.title(f"Triangle {SIZE}x{SIZE} : Coin exclu (X, noir)
         \n Centres du graphe triangulaire sans pointe en CYAN")
plt.axis('off')
plt.show()
print(f"Le(s) centre(s) du graphe triangulaire (sans pointe) est/sont :
         {centers_triangle}")
for sommet in centers_triangle:
  print(n,'=',L[sommet[1]],'+',n-L[sommet[1]],'   ',end='')
nomfic ='triangle'+str(n)
plt.savefig(nomfic)
plt.close()
print('')
```

Annexe 2 : graphe triangulaire épointé pour $n = 98$. Les 3 centres du graphe correspondent aux trois décompositions de Goldbach $98 = 19 + 79, 98 = 31 + 67, 98 = 37 + 61$.



Sortie écrite dans le terminal du programme

L = [0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 98]
ecarts = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 9]
Le(s) centre(s) du graphe triangulaire (sans pointe) est/sont : [(17, 11), (18, 10), (21, 7)]
98 = 37 + 61 98 = 31 + 67 98 = 19 + 79