

Conjecture de Goldbach et centres d'un réseau

Denise Vella-Chemla

avril 2026

La conjecture de Goldbach stipule que tout entier pair $n \geq 4$ est la somme de deux nombres premiers. Dans la suite, n désignera un entier pair ≥ 6 .

1 Définitions

On note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, \dots\}$ l'ensemble des nombres premiers.

Dans la suite, on définit une grille dont les ensembles de coordonnées sont :

$$\begin{aligned} X_n &= \{p_k \mid 3 \leq p_k \leq n-3, p_k \in \mathcal{P}\} \cup \{0, n\}, \\ Y_n &= \{n - p_k \mid p_k \in X_n\} \cup \{0, n\}. \end{aligned}$$

Fait : $\forall n \geq 6, X_n \neq \emptyset, Y_n \neq \emptyset$.

On définit un sous-ensemble R de points du plan euclidien \mathbb{N}^2 :

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \mid x \in X_n, y \in Y_n\}.$$

On nécessite une fonction f de numérotation des points de R :

$$\begin{aligned} f : R &\rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x + y \cdot \text{Card}(X_n) + 1 \end{aligned}$$

On associe à R le graphe (dit graphe-grille carrée) $G = (S, A)$ avec :

$$\begin{aligned} S &= \{s_i, 1 \leq i \leq (\text{Card}(X_n))^2\}, \\ A &= A_H \cup A_V \end{aligned}$$

où S est l'ensemble des sommets et A est l'ensemble des arêtes (horizontales et verticales) du graphe :

$$\begin{aligned} A_H &= \{(s_i, s_j) \mid (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i)) \wedge (f^{-1}(s_j) = (x_i, y_i + 1))\} \\ A_V &= \{(s_i, s_j) \mid (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i)) \wedge (f^{-1}(s_j) = (x_i + 1, y_i))\} \end{aligned}$$

On restreint le graphe carré G au graphe triangulaire épointé $T = (S_T, A_T)$:

$$\begin{aligned} S_T &= \{s_i \mid (f^{-1}(s_i) = (x_i, y_i) \in S) \wedge (x_i \geq y_i)\} \setminus \{(\text{Card}(X_n) - 1, 0)\}, \\ A_T &= \{a_i \mid (a_i = (s_i, s_j)) \wedge (a_i \in A) \wedge (s_i \in S_T) \wedge (s_j \in S_T)\} \end{aligned}$$

On doit étiqueter les arêtes de A_T avec les écarts entre nombres premiers successifs. Pour cela, on définit la suite séquentielle des écarts entre nombres premiers successifs (le premier écart est le nombre premier 3 et le dernier écart est la différence entre n et le plus grand nombre premier $\leq n - 3$) :

$$\Delta_n = s_k(n) \text{ telle que } \begin{cases} s_1 = 3 \\ s_k = p_{k+1} - p_k \text{ pour } 2 \leq k \leq \text{Card}(X_n) - 2 \\ s_{\text{Card}(X_n)} = n - \max\{p_k | (3 \leq p_k \leq n - 3) \wedge (p_k \in \mathcal{P})\} \end{cases}$$

La fonction d'étiquetage des arêtes du graphe est alors :

$$g : \begin{array}{lll} A_T & \rightarrow & \mathbb{N}^2 \\ ((x_i, y_i), (x_i, y_i + 1)) & \mapsto & \delta_i \in \Delta_n \\ ((x_i, y_i), (x_i + 1, y_i)) & \mapsto & \delta_i \in \Delta_n \end{array}$$

Il s'avère que la distance entre deux sommets s et s' de S correspond à la distance de Manhattan (ou distance de norme 1) dans le plan euclidien :

$$d : \begin{array}{lll} S \times S & \rightarrow & \mathbb{N}^+ \\ ((x_i, y_i), (x_j, y_j)) & \mapsto & |x_j - x_i| + |y_j - y_i|. \end{array}$$

La distance entre 2 sommets est ainsi la longueur d'un chemin de longueur minimale menant de s à s' dans le graphe T .

Soit $s \in S$. L'excentricité de s , notée $e(s)$ est définie par :

$$e(s) = \max\{d(s, s'), \forall s' \in S\}.$$

Soit E_T l'ensemble des excentricités des sommets de T :

$$E_T = \{e(s) | s \in S_T\}.$$

Un centre d'un graphe est un sommet du graphe dont l'excentricité est égale au minimum de l'ensemble des excentricités de tous les sommets du graphe.

Le sommet s est un centre du graphe $G = (S, A)$ si et seulement si

$$e(s) = m \text{ avec } m = \min\{e(s') | s' \in S\}.$$

Dans le cas du graphe particulier T qui nous intéresse, un sommet s de S_T est un centre de T si et seulement si $e(s) = \min(E_T)$.

2 Assertions

Lemme : *Le graphe G est fortement connexe.*

Lemme : *Le graphe T (triangulaire épointé) est fortement connexe.*

Lemme : *L'ensemble des sommets S_T et l'ensemble des arêtes A_T étant deux ensembles finis non vides, l'ensemble des excentricités des points du graphe T est bien défini et non vide. L'ensemble du ou des points d'excentricité minimum est bien défini et est non vide.*

(**Lemme :** *S (la source) et P (le puits) sont les points du graphe qui ont une excentricité qui est le maximum des excentricités ; cette excentricité maximum a pour valeur $2n$.)*)

Théorème 1 : *Les centres du graphe triangulaire épointé correspondent aux décomposants de Goldbach de n . Le chemin permettant de parvenir à ces points depuis le point source S (de coordonnées $(0,0)$) est composé d'une partie du chemin ne contenant que des arêtes verticales du graphe et dont la somme des étiquettes est égale à p avec p un nombre premier, et d'une partie du chemin ne contenant que des arêtes horizontales du graphe et dont la somme des étiquettes est égal à q où q est également premier.*

Découle des définitions.

Théorème 2 : *Le graphe triangulaire épointé T contient au moins un centre.*

Cela découle de l'existence d'un minimum et d'un maximum pour tout ensemble d'entiers non vide.

Théorème 3 : *Tout nombre pair admet au moins une décomposition de Goldbach.*

Découle des théorème 1 (d'isomorphisme entre les décomposants de Goldbach de n et les centres du graphe T) et théorème 2 (d'existence obligatoire d'un centre dans le graphe T).

3 Illustrations : cas $n = 16$

$$X_{16} = \{0, 3, 5, 7, 11, 13, 16\}$$

$$Y_{16} = \{16, 13, 11, 9, 5, 3, 0\}$$

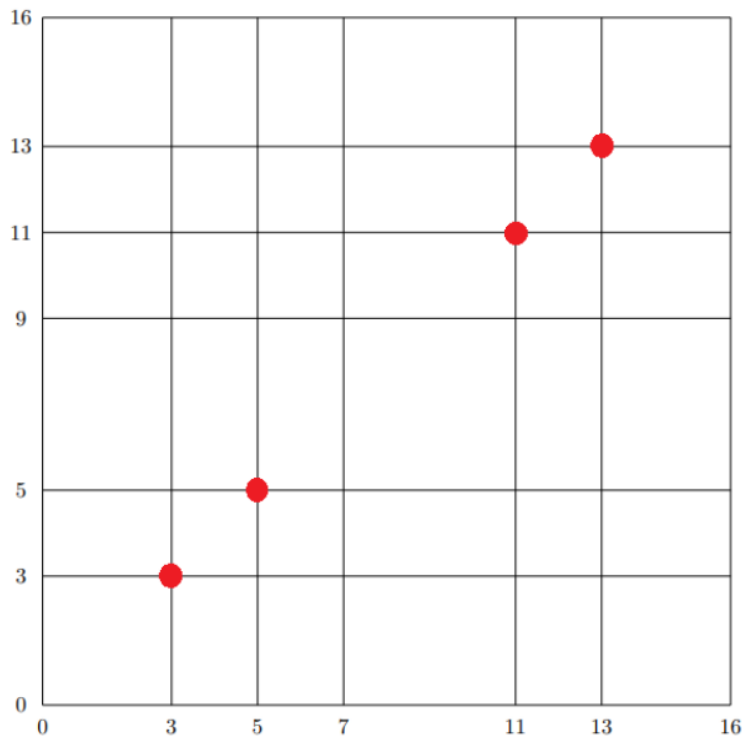


FIGURE 1 : L'exemple du carré pour $n = 16$. Les points correspondant aux décomposants de Goldbach de 16 qui sont $\{3, 5, 11, 13\}$, i.e. les points $(3, 3), (5, 5), (11, 11), (13, 13)$ sont colorés en rouge sur la diagonale ascendante.

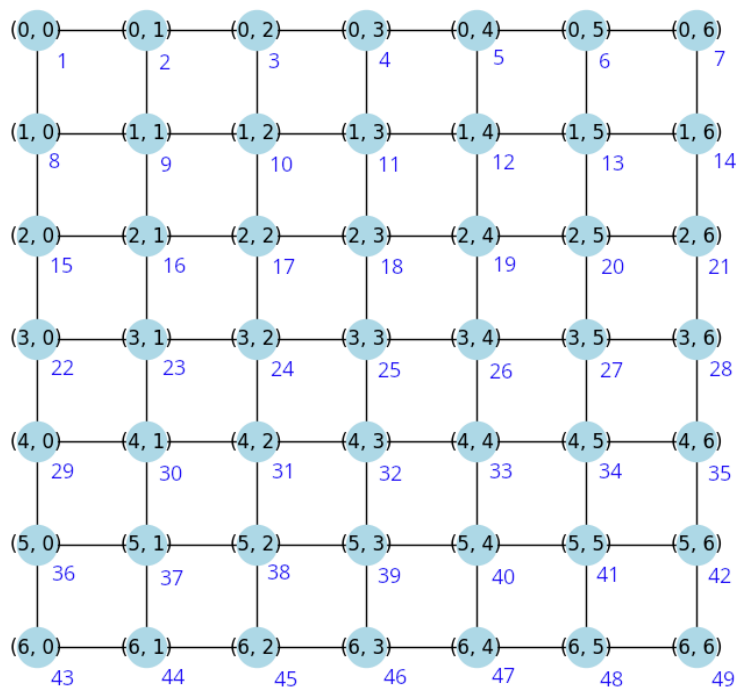


FIGURE 2 : Numérotation des sommets du graphe

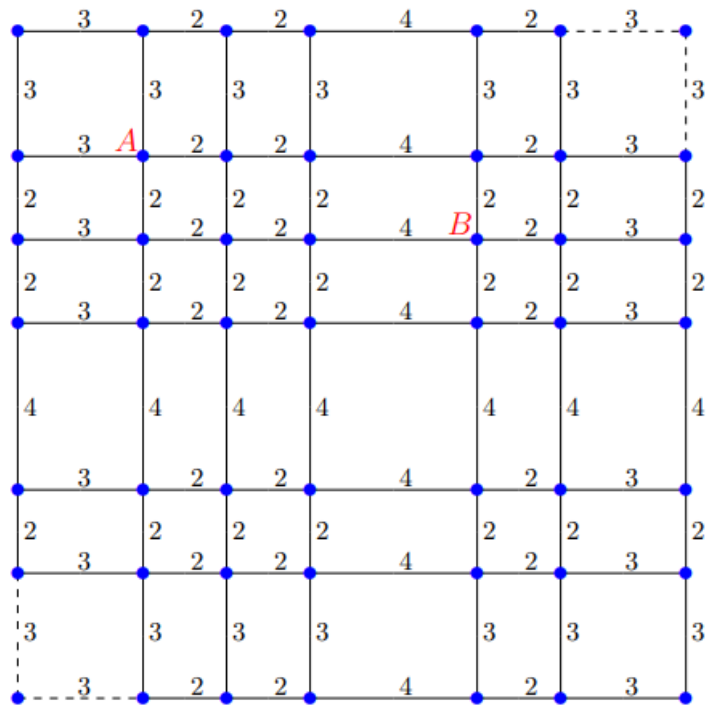


FIGURE 3 : Étiquetage des arêtes pour $n = 16$. ($d(A, B) = 10$)

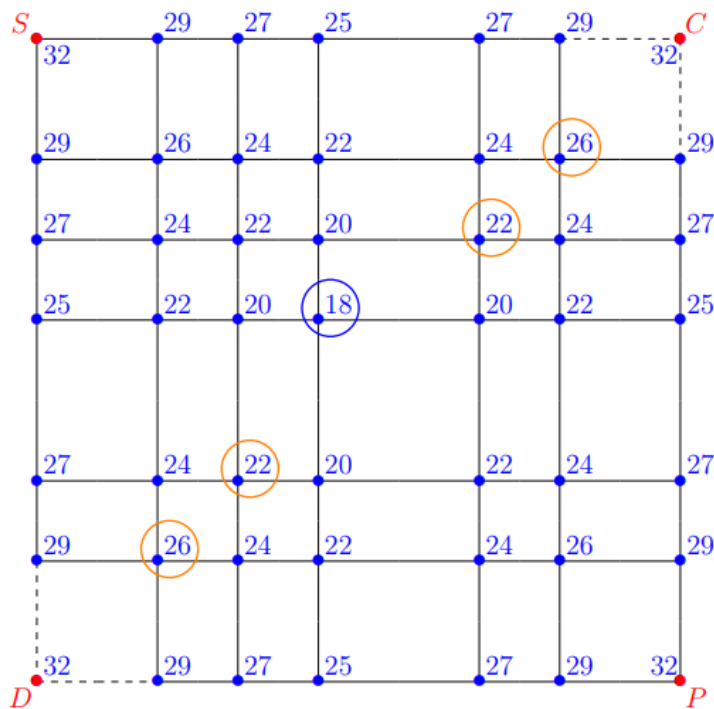


FIGURE 4 : excentricités des sommets.

L'excentricité du centre du graphe est entourée en bleu.

Les excentricités des sommets correspondants dans le plan euclidien aux points de coordonnées (p_k, p_k) avec p_k décomposant de Goldbach de n sont entourées en orange.

Note : ces sommets ne sont pas des centres du graphe.

- III : Numeri polygona, édit. Amsterdam, 1701, p. 1-4. Copie MS. : Leyde, Bibliothèque de l'Université, Hug. 29 ex Hug. 27, 1908, Cerf, Paris.
- [2] M. Akian, R. Bapat, S. Gaubert, Min-plus methods in eigenvalue perturbation theory and generalised Lidskiĭ-Višik-Ljusternik theorem, arXiv, <https://arxiv.org/pdf/math/0402090>, 2006.
- [3] M. Audin, Géométrie, 2006, EDP Sciences.
- [4] G. Belgioioso, René Descartes : Opere Posthume 1650-2009, 2009, Bompiani – il pensiero occidentale.
- [5] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph theory, 2008, Springer.
- [6] F. Buckley, F. Harary, Distance in graphs, 1990, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City.
- [7] F. Butelle, Contribution à l'algorithmique distribuée : arbres et ordonnancement, 2007, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches, Paris XIII.
- [8] G. Cantor, Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach, 1894, Compte rendu, Congrès de Caen, Association française pour l'avancement des sciences, 1894, XXIII, 117-134.
- [9] O. Cogis, C. Schwartz, Théorie des graphes, 2018, Cassini, collection L.
- [10] A. Connes, Symétries, 2001, Pour la Science, numéro 292, 36-43.
- [11] R. L. Francis, J. A. White, Facility layout and location : an analytical approach, 1974, Prentice-Hall.
- [12] C. Goldbach, Lettre de Christian Goldbach à Leonhard Euler (XLIII, OO765), Correspondances mathématiques et physiques de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle (lettre à Euler en allemand), Académie Impériale des Sciences, Saint-Petersbourg, 1988, P. H. Fuss, 125-129, <http://eulerarchive.MAA.org>.
- [13] M. Gondran, M. Minoux, Dioids and semi-rings, new models and algorithms, Springer, 2008.
- [14] G. Y. Handler, Minimax network location : theory and algorithms, 1974, MIT Flight transportation laboratory.
- [15] C. Jordan, Sur les assemblages de lignes, 1869, Journal für die reine und angewandte Mathematik, vol. 70, 185-190.
- [16] O. Kariv, S. L. Hakimi, An algorithmic approach to network location problems : the p -centers, I et II, SIAM Journal on applied mathematics, vol. 37, 1979, 513-560.
- [17] C.-A. Laisant, Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach, Bulletin de la Société Mathématique de France : Vie de la Société, no. 25, 1897, 208-211.
- [18] Laquière, Note sur la géométrie des quinconces, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 7, 1879, 85-92.
- [19] J.-L. Laurière, Intelligence artificielle, résolution de problèmes par l'homme et la machine, Eyrolles, 1986.
- [20] J.-M. Meny, G. Aldon, L. Xavier, Butinage graphique, 2003, IREM de Lyon.
- [21] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 8, 1880, 120-124.
- [22] A. de Polignac, Formules et considérations diverses se rapportant à la théorie des ramifications, Bulletin de la Société mathématique de France, tome 9, 1881, 30-42.
- [23] S. Ratel, Densité, VC-dimension et étiquetages de graphes, 2019, Thèse, Aix-Marseille.
- [24] A. Sainte-Laguë, Les réseaux (ou graphes), Mémorial des Sciences mathématiques, fasc. 18, 1926, 1-64.
- [25] J.-P. Serre, Arbres, amalgames, SL_2 , Astérisque, n° 46, 1983, Société Mathématique de France.
- [26] R.-C. Vaughan, Goldbach's conjectures : a historical perspective, Open problems in Mathematics, Springer International Publishing, 2016, 479-520.

Annexe 1 : Programme d'affichage du graphe triangulaire époiné et de visualisation de ses centres.

```
import networkx as nx
import matplotlib.pyplot as plt

def premier(atester):
    k = 2
    if atester in [0, 1]: return False
    if atester in [2, 3, 5, 7]: return True
    while True:
        if k * k > atester: return True
        else:
            if atester % k == 0: return False
            else: k = k + 1

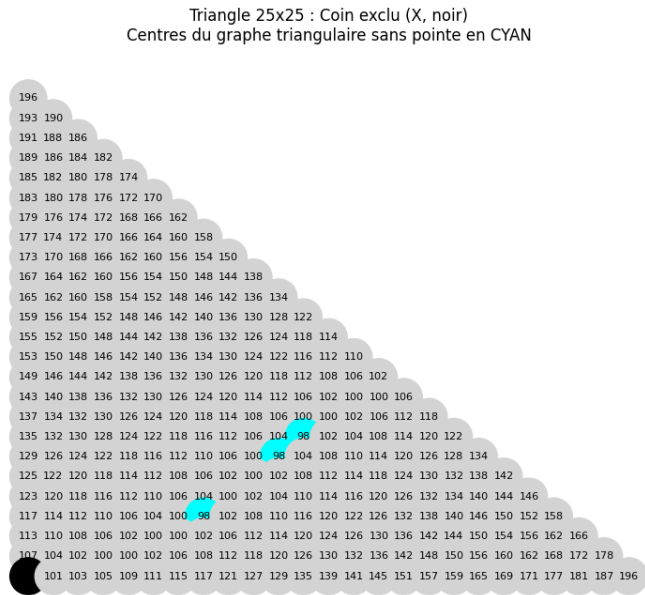
for n in range(8,62,2):
    L=[0]
    for k in range(3,n-1,2):
        if premier(k):
            L.append(k)
    L.append(n)
    print('L = ',L)
    ecarts = []
    for indice in range(1,len(L)):
        ecarts.append(L[indice]-L[indice-1])
    print('ecarts = ',ecarts)
    poids_fixes = ecarts
    SIZE = len(poids_fixes) + 1
    G_full = nx.grid_2d_graph(SIZE, SIZE)
    nodes_to_keep = [(i, j) for (i, j) in G_full.nodes() if i >= j]
    G_complet = G_full.subgraph(nodes_to_keep).copy()
    for (u, v) in G_complet.edges():
        (r1, c1), (r2, c2) = u, v
        if r1 == r2: # Horizontale
            G_complet.edges[u, v]['weight'] = poids_fixes[min(c1, c2)]
        else: # Verticale
            G_complet.edges[u, v]['weight'] = poids_fixes[min(r1, r2)]
    node_isele = (SIZE - 1, 0) # Le coin bas-gauche
    G_gros = G_complet.copy()
    if node_isele in G_gros:
        G_gros.remove_node(node_isele) # Supprime le noeud ET ses aretes
    path_lengths = dict(nx.all_pairs_dijkstra_path_length(G_gros, weight='weight'))
    eccs_gros = {node: max(dists.values()) for node, dists in path_lengths.items()}
    min_ecc = min(eccs_gros.values())
    centers_triangle = [n for n, ecc in eccs_gros.items() if ecc == min_ecc]
    plt.figure(figsize=(10, 8))
    pos = {(i, j): (j, -i) for (i, j) in G_complet.nodes()}
    node_labels = {n: f"{eccs_gros[n]}" for n in G_gros.nodes()}
    node_labels[node_isele] = "X" # Marquer le noeud exclu
    node_colors = []
    for node in G_complet.nodes():
        if node == node_isele:
            node_colors.append('black') # Le point exclu est noir
        elif node in centers_triangle:
            node_colors.append('cyan') # Les centres du "gros" sont cyan
```

```

else :
    node_colors.append('lightgrey') # Le reste est gris
nx.draw_networkx_edges(G_complet, pos, alpha=0.5, edge_color='gray')
edge_labels = nx.get_edge_attributes(G_complet, 'weight')
nx.draw_networkx_edge_labels(G_complet, pos, edge_labels=edge_labels,
                             font_color='red', font_size=8)
nx.draw_networkx_nodes(G_complet, pos,
                       node_color=node_colors,
                       node_size=800)
nx.draw_networkx_labels(G_complet, pos, labels=node_labels, font_size=8)
plt.title(f"Triangle {SIZE}x{SIZE} : Coin exclu (X, noir)
        \n Centres du graphe triangulaire sans pointe en CYAN")
plt.axis('off')
plt.show()
print(f"Le(s) centre(s) du graphe triangulaire (sans pointe) est/sont :
      {centers_triangle}")
for sommet in centers_triangle:
    print(n, '=', L[sommet[1]], '+', n-L[sommet[1]], ', ', end='')
nomfic = 'triangle'+str(n)
plt.savefig(nomfic)
plt.close()
print('')

```

Annexe 2 : graphe triangulaire épointé pour $n = 98$. Les 3 centres du graphe correspondent aux trois décompositions de Goldbach $98 = 19 + 79, 98 = 31 + 67, 98 = 37 + 61$.



Sortie écrite dans le terminal du programme

$L = [0, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 98]$
 $ecarts = [3, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 9]$
 Le(s) centre(s) du graphe triangulaire (sans pointe) est/sont : [(17, 11), (18, 10), (21, 7)]
 $98 = 37 + 61$ $98 = 31 + 67$ $98 = 19 + 79$