L'obstruction de parité de Selberg, le théorème de Bombieri-Vinogradov, et la pondération des cribles

Denise Vella-Chemla pilotant l'ia claude

juillet 2026

1. Résumé

Ce document rassemble, sous forme de notes structurées, les explications données au cours d'un échange portant sur (1) l'obstruction de parité de Selberg et sa note de bas de page 45 (p. 202 de *Lectures on sieves*), (2) le théorème de Bombieri-Vinogradov comme moyen de "transcender" certaines limites du crible pur, et (3) la notion de *pondération* d'un crible, expliquée simplement. Ce document est un résumé pédagogique en langage naturel : il ne prétend reproduire aucun texte source, et renvoie aux références originales pour tout examen approfondi.

2. L'obstruction de parité : ce que dit précisément la note 45

Dans *Lectures on sieves* (Selberg, *Collected Papers*, vol. II, p. 202), Selberg énonce le "principe de parité" : un crible construit uniquement à partir d'informations de congruence de niveau borné ne peut pas distinguer les entiers ayant un nombre pair de facteurs premiers de ceux en ayant un nombre impair. La note de bas de page 45, attachée à cet énoncé, précise que cette équirépartition très particulière ne se retrouve *pas* si l'on classe les entiers selon le reste de $\nu(n)$ (le nombre de facteurs premiers de n) modulo un entier $q > 2$, plutôt que modulo 2.

Remarque : [Point de vocabulaire essentiel] Il faut distinguer deux objets très différents, qu'il est facile de confondre :

- une condition sur n lui-même, comme "n est impair" (c'est-à-dire $n \bmod 2$) ;
- une condition sur $\nu(n)$, le *nombre de facteurs premiers* de n (c'est-à-dire $\nu(n) \bmod q$).

La note 45 de Selberg porte exclusivement sur le second type d'objet. Restreindre son étude aux n pairs, ou cribler des candidats x selon des classes résiduelles de x modulo des nombres premiers $< \sqrt{n}$, relève du *premier* type d'objet (une condition sur n ou sur x eux-mêmes) : c'est exactement la construction visée par le principe de parité lui-même, pas par son exception en note 45.

3. Pourquoi un crible portant sur les décomposants de Goldbach reste soumis à l'obstruction

Un crible qui, pour n pair fixé, élimine des candidats $x \in [3, n/2]$ selon leur appartenance à des classes résiduelles interdites modulo les nombres premiers $p < \sqrt{n}$ est, structurellement, un crible combinatoire de niveau $z = \sqrt{n}$ appliqué simultanément à x et $n - x$. C'est très exactement le type d'objet que Selberg cite comme exemple d'application du principe de parité (crible d'Ératosthène-Legendre pour les problèmes de Goldbach et des nombres premiers jumeaux). L'obstruction porte alors sur la capacité de *ce type de construction* à prouver, pour tout n, l'existence d'un nombre ayant passé à travers le crible ayant exactement un facteur premier - et non sur telle ou telle variante de classement modulo q.

4. Le théorème de Bombieri-Vinogradov : contourner sans nier

4.1. Énoncé informel

On note $\psi(x; q, a)$ le compte pondéré (par $\log p$) des nombres premiers $\leq x$ congrus à a modulo q. On espère $\psi(x; q, a) \approx x/\varphi(q)$.

- Sans hypothèse, on ne sait borner l'erreur correctement que pour q très petit ($q \leq (\log x)^A$) : théorème de Siegel-Walfisz.
- Sous l'hypothèse de Riemann généralisée, on saurait la borner pour tout q jusqu'à $x^{1/2}$.
- Le théorème de Bombieri-Vinogradov (Bombieri, *On the large sieve*, *Mathematika* 12 (1965), p. 201-225, https://doi.org/10.1112/S0025579300005313) établit, **sans aucune hypothèse**, que la *somme* des erreurs sur tous les q jusqu'à $x^{1/2}/(\log x)^A$ reste petite, même si l'on ne sait rien garantir pour un q isolé au-delà de $(\log x)^A$.

Remarque [Une analogie simple] : c'est un résultat *collectif*, pas *individuel* : on ne sait pas garantir qu'aucun élève d'une classe n'a raté son examen, mais on peut garantir que la moyenne de la classe reste bonne. Cette information moyennée suffit dans beaucoup d'applications, car on n'a souvent besoin que d'une somme sur q, pas d'un contrôle module par module.

4.2. L'outil de fond : le grand crible

Le “grand crible” (Linnik 1941, forme optimale par Bombieri 1965) est un résultat d'analyse de Fourier : si l'on dispose de points bien espacés sur le cercle (les fractions a/q, $q \leq Q$), la somme des carrés des valeurs d'un polynôme trigonométrique en ces points est bornée - un principe apparenté à une inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée. C'est cet outil, complètement étranger à la combinatoire d'un crible, qui permet de contrôler simultanément beaucoup de modules q à la fois.

4.3. Le chemin de la démonstration, en quatre étapes

1. Le grand crible donne des bornes moyennes sur des sommes de caractères additifs (sommes exponentielles).

2. On en déduit des bornes moyennes sur des sommes de caractères de Dirichlet, via les sommes de Gauss.
3. On traduit ces bornes en un théorème de valeur moyenne pour des polynômes de Dirichlet.
4. On relie ce résultat à $\psi(x; q, a)$ via la fonction de von Mangoldt $\Lambda(n)$, décomposée en sommes bilinéaires “gérables” (sommes de Type I et de Type II, selon l’identité de Vaughan).

Chaque étape relève de l’analyse harmonique ou de la théorie analytique classique des nombres, et non de la combinatoire d’un crible : c’est cette extériorité qui permet de transcender l’obstruction, en apportant, de l’extérieur, une information sur la distribution moyenne des zéros des fonctions L de Dirichlet.

4.4. Ce que cela a permis, et ce que cela n’a pas permis

Une fois ce théorème disponible, on peut l’associer à un crible pondéré pour améliorer ce que le crible seul démontre : c’est ainsi que Chen (1973) est passé de “au plus 3 facteurs premiers” à “au plus 2 facteurs premiers”, pour Goldbach comme pour les nombres premiers jumeaux. **Mais personne n’a pu passer de 2 à 1** : l’obstruction de parité, propre à la structure même du crible (et non à la qualité de l’information qu’on lui fournit), résiste toujours à ce jour.

5. La pondération d’un crible : “pour les nuls”

5.1. Le crible classique : tout ou rien

Un crible d’Ératosthène classique attribue à chaque entier n un poids binaire : 1 s’il survit à toutes les conditions de divisibilité imposées, 0 sinon. C’est une fonction indicatrice.

5.2. Pondérer : remplacer le couperet par une note

Définition 1 (Pondération). *Pondérer un crible consiste à remplacer ce poids binaire $\{0, 1\}$ par un nombre réel $w(n)$, choisi non pas arbitrairement mais pour améliorer les propriétés de calcul ou de contrôle du crible. On étudie alors la somme*

$$S = \sum_{n} w(n)$$

plutôt qu’un simple comptage des nombres qui sont passés à travers le crible.

Deux usages rencontrés au cours de la discussion :

- **Exemple 1** [Pondération par $\log p$] : au lieu de compter les nombres premiers un par un (poids 1 chacun), on les compte avec le poids $\log p$ (fonction de von Mangoldt Λ). Ce choix relie directement la fonction de comptage à la dérivée logarithmique de la fonction ζ de Riemann, ce qui rend les techniques d’analyse complexe (contours d’intégration, zéros de ζ) immédiatement utilisables. C’est un choix technique, qui ne change rien au fond du problème mais simplifie considérablement les calculs.

- **Exemple 2** [Pondération d'un crible, à la Selberg ou à la Chen] : plutôt que d'éliminer complètement un entier n dès qu'il est "suspect" (par exemple parce qu'il pourrait avoir 3 facteurs premiers ou plus), on lui attribue un poids réduit, mais non nul : une pénalité graduée plutôt qu'un couperet. Le crible pondéré de Chen ne bannit pas les n à ≥ 3 facteurs premiers : il leur assigne un poids négatif qui vient soustraire leur contribution sans les exclure entièrement de la somme. C'est cet assouplissement - un test binaire remplacé par une note chiffrée - qui donne la marge de manœuvre mathématique nécessaire pour améliorer le résultat obtenu par un crible pur.

5.3. Comment procéder, concrètement, pour pondérer une construction

1. Remplacer la fonction de crible binaire (candidat gardé / éliminé selon ses classes résiduelles) par une somme pondérée $S = \sum w(x)$, où $w(x)$ n'est plus seulement 0 ou 1.
2. Choisir $w(x)$ pour qu'il pénalise progressivement les candidats "à risque" (ceux partageant beaucoup de petits facteurs premiers avec des classes interdites), plutôt que de les exclure d'un bloc.
3. Optimiser les coefficients de w - typiquement une combinaison $w(n) = \left(\sum_{d|n} \lambda_d\right)^2$ ou apparentée, où les λ_d sont des paramètres libres - pour minimiser l'erreur totale ou maximiser une borne inférieure ; c'est un problème d'optimisation (quadratique chez Selberg), pas un choix arbitraire.
4. Accepter que le résultat porte sur S (une quantité pondérée), non sur un comptage exact des nombres qui sont passés à travers le crible : il faut ensuite un argument supplémentaire pour passer de "$S > 0$" à "il existe réellement un nombre qui passe à travers le crible, i.e. un nombre satisfaisant toutes les conditions".

Remarque [Ce que cela change de fond en comble] : pondérer n'est pas un simple ajustement technique : c'est un changement de nature du problème. On ne prouve plus "il existe un x satisfaisant exactement toutes les conditions", mais "la somme pondérée de tous les x candidats est strictement positive" - un énoncé plus faible, mais souvent suffisant, et surtout beaucoup plus flexible à manier.

6. Références

1. A. Selberg, *Lectures on sieves*, in *Collected Papers*, vol. II, Springer-Verlag, Berlin, 1991, p. 65-247 (voir en particulier § 18, p. 202 et la note 45).
2. E. Bombieri, *On the large sieve*, *Mathematika* 12 (1965), p. 201-225. https://doi.org/10.1112/S0025579300005313
3. R. C. Vaughan, *The Bombieri-Vinogradov theorem*, notes explicatives, https://personal.science.psu.edu/rcv4/Bombieri.pdf
4. J.-R. Chen, *On the representation of a large even integer as a sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica 16 (1973), p. 157-176.