

## Symétries

### Alain Connes

**Résumé :** Le concept de symétrie va bien au-delà des simples symétries géométriques. De l'organisation harmonieuse des phases finales des coupes de football à la résolution des équations, en passant par le jeu de l'icosaèdre et le théorème de Morley, vous découvrirez les multiples facettes de ce concept.

Cet article se propose d'initier le lecteur, par quelques exemples illustratifs, à la notion de symétrie en mathématiques.

Pour mettre en évidence l'ubiquité de ce concept, au sens du mathématicien, nous commencerons par évoquer le lien entre la symétrie qui gouverne l'organisation de la phase finale des coupes de football et... la technique de résolution des équations du quatrième degré.

Le passage aux équations de degré supérieur sera l'occasion d'évoquer le jeu de l'icosaèdre et les "icosions", définis par le mathématicien irlandais William Hamilton au XIXe siècle.

Nous terminerons par une réflexion sur un théorème de géométrie, démontré par Frank Morley vers 1899, où la symétrie d'un triangle équilatère surgit comme par miracle d'un triangle arbitraire en prenant l'inter-section des "trissectrices" consécutives (les deux droites qui partagent un angle en trois parties égales). J'en ai donné, en 1998, une formulation et une démonstration algébriques que nous verrons ici.

### Les phases finales des coupes de football

Commençons par l'organisation des coupes de football, par exemple de la dernière coupe d'Europe. Durant la phase finale, les équipes se retrouvent par poules de quatre au sein desquelles elles doivent se départager. La France, par exemple, se trouvait dans un groupe de quatre équipes, Danemark, France, Pays-Bas et République Tchèque (abrégées en  $D, F, H$  et  $C$ ). Pour départager ces quatre équipes de manière équitable, il faut que chacune d'elles rencontre chacune des trois autres, de sorte que trois journées sont nécessaires. Quand deux équipes se rencontrent,  $D$  et  $F$  par exemple, les deux autres,  $H$  et  $C$ , s'affrontent le même jour et il suffit donc de trois journées pour obtenir toutes les configurations de rencontres possibles.

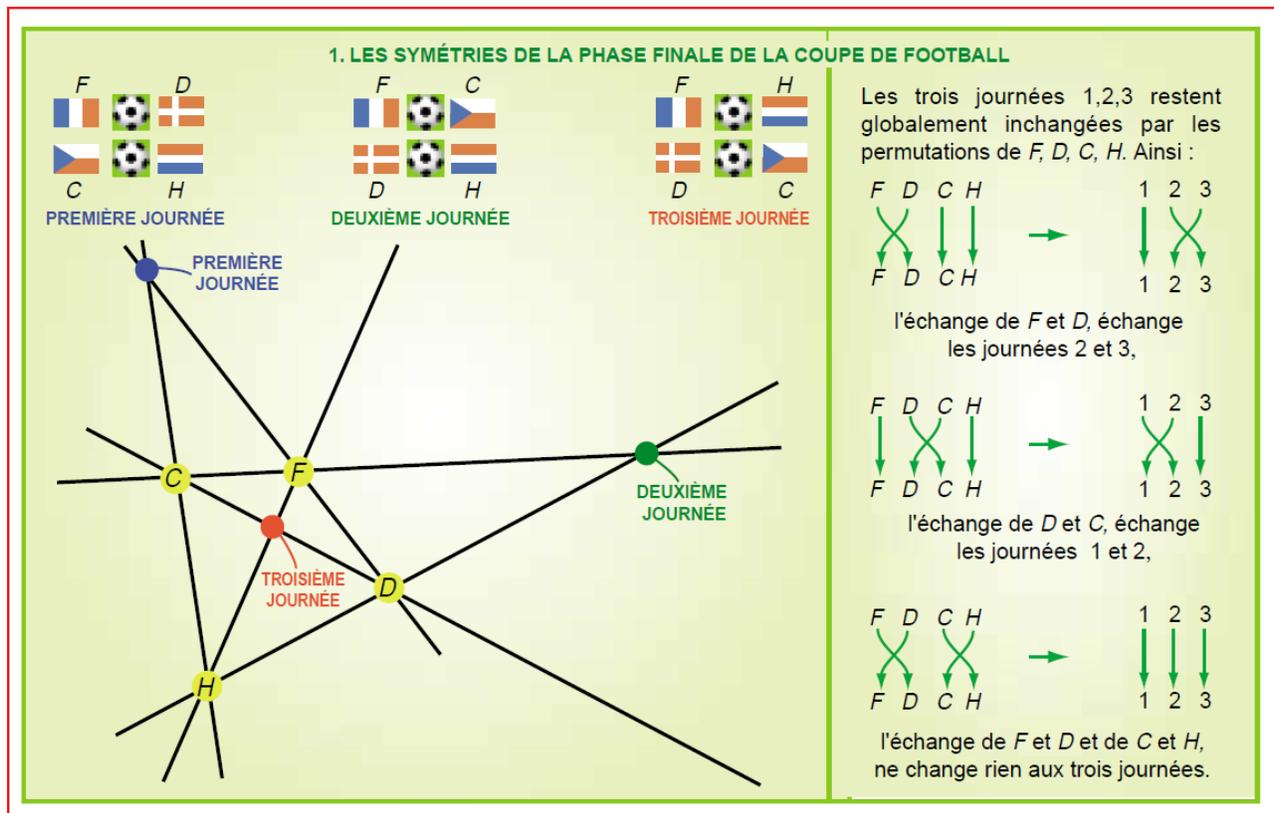
Dans l'exemple de la coupe d'Europe, les matchs des trois journées étaient, pour la première journée, les rencontres  $FD$  et  $CH$ , pour la deuxième journée,  $FC$  et  $DH$ , pour la dernière  $FH$  et  $DC$ . On perçoit intuitivement qu'une telle organisation est harmonieuse car aucune des quatre équipes n'est privilégiée. Ainsi l'on vérifie que si l'on permute arbitrairement certaines équipes, par exemple si l'on échange  $D$  et  $H$ , il en résulte une simple permutation des première et troisième journées.

Nous pouvons visualiser la symétrie qui est à l'œuvre en plaçant les lettres  $D, F, C, H$  représentant les équipes en quatre points du plan. À un match entre deux équipes correspond la droite joignant ces deux points et chacune des trois journées correspond naturellement au point d'intersection de

---

Référence : article du magazine Pour la Science de février 2001, n° 292, p. 36-43.  
Transcription en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X : Denise Vella-Chemla, août 2025.

deux droites, représentant les deux confrontations de la journée. Ainsi aux rencontres  $FD$  et  $CH$ , on associe l'intersection des droites  $FD$  et  $CH$  et ainsi de suite pour les deux autres couples, de sorte que la deuxième journée est à l'intersection des droites  $FC$  et  $DH$  et la troisième à l'intersection des droites  $FH$  et  $DC$ .



La figure ainsi construite, formée de quatre points et six droites, se nomme un quadrilatère complet. Elle est parfaitement symétrique (au sens abstrait, même si des symétries géométriques au sens commun - symétries par rapport à un point ou une droite - n'y apparaissent pas), puisque chacun des quatre points  $F, D, C$  et  $H$  joue exactement le même rôle que les autres, et qu'il en va de même des trois points de rencontre symbolisant les journées.

Après avoir visualisé ce quadrilatère complet, nous pouvons aussi formuler algébriquement la symétrie en question. Ainsi, la fonction qui aux quatre nombres  $a, b, c$  et  $d$  associe  $\alpha = ab + cd$  ne prend que trois déterminations différentes quand on permute  $a, b, c$  et  $d$  : les deux autres déterminations étant  $\beta = ac + bd$  et  $\gamma = ad + bc$ .

### La résolution par radicaux des équations du 4° degré

Ce fait surprenant est à la base de la méthode générale permettant de résoudre “par radicaux” les équations du quatrième degré. Cette résolution consiste à exprimer les zéros  $a, b, c$  et  $d$  du polynôme  $x^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ , c'est-à-dire les valeurs de  $x$  qui annulent le polynôme, en fonction des coefficients  $n, p, q, r$  et de l'extraction de racines.

Pour comprendre cette affirmation, il faut revenir un peu en arrière dans l'Histoire et examiner les résolutions des équations de degré inférieur à quatre.

### 2. SYMÉTRIES ET RÉSOLUTION PAR RADICAUX DES ÉQUATIONS DE DEGRÉ 3 et 4

La résolution par radicaux des équations polynomiales nécessite l'élaboration de fonctions annexes des racines, présentant des propriétés de symétries quand on permute les racines de ces équations.

1) Équation du troisième degré :  
 $x^3 + 3px + 2q = (x - a)(x - b)(x - c) = 0$ .  
Équation réduite :  $x^2 + 2qx - p^3 = (x - \alpha)(x - \beta)$ .

<b>Trois racines :</b> $a, b, c$ .	<b>Deux fonctions annexes :</b> $\alpha = [(a + bj + cj^2)/3]^3$ $\beta = [(a + bj^2 + cj)/3]^3$ avec $j = (-1 + i\sqrt{3})/2$ , $j^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ , <i>i</i> étant une racine carrée de $-1$ , d'où $j^3 = 1$ et $j^2 + j + 1 = 0$ .	<b>Symétrie</b> La symétrie réalisée par n'importe quelle permutation entre $a, b$ et $c$ , laisse globalement invariant l'ensemble des fonctions annexes $\{\alpha, \beta\}$ .	<b>Solutions</b> Soient $u = \sqrt[3]{\alpha}$ et $v = \sqrt[3]{\beta}$ tels que $uv = -p$ . On a alors : $a = u + v$ $b = j^2u + jv$ $c = ju + j^2v$ .
---------------------------------------	--	--	--

2) Équation du quatrième degré :  
 $x^4 + px^2 + qx + r = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = 0$   
Équation réduite :  
 $x^3 - px^2 - 4rx + (4pr - q^2) = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$

<b>Quatres racines :</b> $a, b, c, d$	<b>Trois fonctions annexes :</b> $\alpha = ab + cd$ $\beta = ac + bd$ $\gamma = ad + bc$	<b>Symétrie</b> La symétrie réalisée par n'importe quelle permutation entre $a, b, c$ et $d$ laisse globalement invariant l'ensemble des trois fonctions annexes $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .	<b>Solutions</b> 1) Connaissant $\alpha = ab + cd$ et $r = (ab)(cd)$ , on en déduit les produits $ab$ et $cd$ . 2) Si $ab \neq cd$ , le système $(a+b) + (c+d) = 0$ et $cd(a+b) + ab(c+d) = -q$ , donne $a+b$ et $c+d$ . 3) Connaissant $ab$ et $a+b$ on en déduit $a$ et $b$ . De même pour $c$ et $d$ .
--	---	---	--

L'ensemble de ces fonctions annexes est globalement inchangé par permutations des racines de l'équation. Dans les équations de degrés 3 et 4 ces fonctions annexes permettent de ramener la résolution de l'équation initiale à une équation "réduite" de degré inférieur.

Si la technique de résolution des équations du second degré remonte à la plus haute antiquité (Babyloniens, Egyptiens...), elle n'a pu être étendue au troisième degré que bien plus tard, et ne sera publiée par Girolamo (Jérôme) Cardano qu'en 1545 dans les chapitres 11 à 23 de son livre *Ars magna sive de regulis algebraicis*. Bien que cela n'ait été reconnu qu'au XVIII<sup>e</sup> siècle, la clef de la résolution par radicaux de l'équation du troisième degré,  $x^3 + nx^2 + px + q = 0$ , de racines  $a, b, c$ , est l'existence d'une fonction polynomiale  $f(a, b, c)$  de  $a, b, c$ , qui ne prend que deux déterminations différentes sous l'action des six permutations de  $a, b, c$ .

La méthode de Cardano revient à poser  $\alpha = [(1/3)(a + bj + cj^2)]^3$ , le nombre  $j$  étant la première racine cubique de l'unité, soit  $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ , où  $i$  est une racine carrée de  $-1$ . La permutation circulaire transformant, à la fois  $a$  en  $b$ ,  $b$  en  $c$  et  $c$  en  $a$ , laisse manifestement la fonction  $\alpha$  inchangée et la seule autre détermination de la fonction  $\alpha$  sous l'action des six permutations de  $a, b, c$ , est obtenue en transposant  $b$  et  $c$  par exemple, soit  $\beta = [(1/3)(a + cj + bj^2)]^3$ .

Comme l'ensemble de ces deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  est invariant par toutes les permutations de  $a, b, c$ , le polynôme du second degré dont  $\alpha$  et  $\beta$  sont racines est facile à calculer en fonction des coefficients de l'équation initiale  $x^3 + nx^2 + px + q = 0$  : c'est  $x^2 + 2qx - p^3 = (x + q + s)(x + q - s)$ , où  $s$  est l'une des racines carrées de  $p^3 + q^2$  et où, pour simplifier les formules, l'on a réécrit l'équation

initiale sous la forme équivalente  $x^3 + 3px + 2q = 0$  débarrassée du terme du deuxième degré en effectuant une translation convenable des racines et où l'on a introduit les coefficients 2 et 3.

**3. ORDRE D'UNE PERMUTATION**

L'ordre d'une permutation est le plus petit entier  $n$  tel que si l'on applique  $n$  fois la permutation on obtient la permutation identique.

Ainsi la permutation  $u$  est d'ordre 2 et la permutation  $v$  est d'ordre 3 :

$u =$

$u =$

$v =$

$v =$

$v =$

On vérifie que la permutation  $uv$  est d'ordre 5.

$uv =$

$=$

$(uv)^5 =$

Un calcul simple montre alors que chacune des racines  $a, b$  et  $c$ , de l'équation initiale s'exprime

comme somme de l'une des trois racines cubiques de  $\alpha$  et de l'une des trois racines cubiques de  $\beta$  ces deux choix étant liés par le fait que leur produit doit être impérativement égal à  $-p$  (il n'y a donc que trois couples de choix de ces racines à prendre en compte, ce qui est rassurant, à la place des neuf possibilités que l'on aurait pu envisager a priori).

C'est à l'occasion de ces formules que l'utilisation des nombres complexes s'est imposée. En effet, même dans le cas où les trois racines sont réelles, il se peut que  $p^3 + q^2$  soit négatif et que  $\alpha$  et  $\beta$  soient alors nécessairement des nombres complexes.

Si la résolution des équations du troisième degré que nous venons d'exposer a été très longue à être mise au point (sans doute pour au moins l'un de ses cas particuliers par Scipione del Ferro entre 1500 et 1515), celle du quatrième degré a été plus prestre à la suivre puisqu'elle figure également dans l'*Ars magna* (chapitre 39) où Cardano l'attribue à son secrétaire Ludovico Ferrari qui l'aurait trouvée entre 1540 et 1545 (René Descartes en publiera une autre en 1637). Et c'est cette résolution qui nous ramène à la première symétrie que nous avons rencontrée, celle de l'organisation des finales, du quadrilatère complet, et de la fonction  $ab + cd$ . Ici encore, l'on peut partir d'un polynôme débarrassé du coefficient de  $x^3$ , annulé par la même technique que précédemment, soit  $x^4 + px^2 + qx + r = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$ . L'ensemble des trois nombres  $\alpha = ab + cd, \beta = ac + bd, \gamma = ad + bc$  est invariant par chacune des 24 permutations agissant sur  $a, b, c$  et  $d$ . Ce sont donc les racines d'une équation du troisième degré dont les coefficients s'expriment facilement en fonction de  $p, q$  et  $r$ . Le calcul montre que le polynôme  $(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  est égal à  $x^3 - px^2 - 4rx + (4pr - q^2)$ . Il peut donc être décomposé comme on l'a vu plus haut pour en déduire  $\alpha, \beta$ , et  $\gamma$  ; en fait, il suffit même de calculer l'une seulement de ces racines, disons  $\alpha$ , pour en déduire  $a, b, c$  et  $d$  (nous connaissons alors en effet la somme  $\alpha$  et le produit  $r$  des deux nombres  $ab$  et  $cd$ , donc ces deux nombres eux-mêmes par une équation du second degré, et il ne reste plus qu'à exploiter les égalités  $(a + b) + (c + d) = 0$  et  $ab(c + d) + cd(a + b) = -q$  pour en déduire  $a + b$  et  $c + d$ , donc enfin  $a, b, c$  et  $d$ ).

C'est à Joseph Louis Lagrange en 1770 et 1771 (publication en 1772, et dans une moindre mesure, à Alexandre Vandermonde dans un mémoire publié en 1774, mais également rédigé vers 1770, ainsi qu'à Edward Waring dans ses *Meditationes algebraicae* de 1770 et à Francesco Malfatti) que l'on doit la mise en lumière du rôle fondamental des permutations sur les racines  $a, b, c, \dots$  et sur les quantités auxiliaires  $\alpha, \beta, \dots$  d'ailleurs aujourd'hui justement appelées "résolvantes de Lagrange".

Ces résolvantes ne sont pas uniques (ainsi aurait-on également pu poser  $\alpha = (a + b - c - d)^2$  dans le cas du quatrième degré, ce qui correspond à la solution de Descartes), mais elles fournissent la clef de toutes les résolutions générales par radicaux.

## Abel et Galois

Il était normal de désirer aller plus loin : Descartes a certainement essayé et avec lui bien des chercheurs. L'étape suivante est évidemment celle du cinquième degré. Elle a toujours opposé des obstacles infranchissables, et nous savons depuis Abel et Galois (qui obtiennent leurs résultats aux alentours de 1830), pourquoi cette quête était vaine. Dans tous les cas précédents, nous avons pu associer à une famille de  $n$  nombres  $a, b, c, d, \dots$  (avec  $n$  inférieur ou égal à 4) une famille de

$n - 1$  nombres  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  s'expriment comme des polynômes en  $a, b, c, d, \dots$  et dont l'ensemble était globalement invariant par chacune des permutations de ces lettres. Plus précisément, notons  $S_n$  le groupe des bijections de l'ensemble  $(a, b, c, d, \dots)$  dans lui-même ; ce qui est possible pour  $n$  strictement inférieur à 5 c'est de définir une application de  $S_n$  sur  $S_{n-1}$ , respectant la composition des permutations.

DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES. 527

Tel est le fondement de toutes les méthodes qu'on a trouvées jusqu'ici pour la résolution générale des équations du quatrième degré, comme je l'ai fait voir ailleurs en détail. Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1770.

À l'égard des équations du troisième degré, leur résolution générale dépend d'une fonction linéaire des trois racines  $\alpha, \beta, \gamma$ , telle que  $\alpha + m\beta + n\gamma$ ; cette fonction, en faisant toutes les permutations possibles entre les trois quantités  $\alpha, \beta, \gamma$ , aura ces six valeurs différentes

$$\begin{aligned} & \alpha + m\beta + n\gamma, & \alpha + m\gamma + n\beta, \\ & \beta + m\alpha + n\gamma, & \beta + m\gamma + n\alpha, \\ & \gamma + m\beta + n\alpha, & \gamma + m\alpha + n\beta, \end{aligned}$$

qui pourront être les racines d'une équation dont les coefficients seront déterminables par des fonctions rationnelles des coefficients de l'équation proposée. Or, si l'on prend pour  $m$  et  $n$  les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, qu'on peut représenter par  $r$  et  $r^2$ , en faisant  $r = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ , il arrive qu'en supposant

$$\begin{aligned} t &= \alpha + r\beta + r^2\gamma \\ \text{et} \quad u &= \alpha + r\gamma + r^2\beta, \end{aligned}$$

les six racines dont il s'agit deviennent, à cause de  $r^3 = 1$ ,  $t, u, r t, r u, r^2 t, r^2 u$ ; de sorte qu'en prenant  $y$  pour l'inconnue de l'équation qui aura ces six racines, le produit des trois facteurs simples  $y - t, y - r t, y - r^2 t$ , sera (à cause de  $1 + r + r^2 = 0$  et  $r^3 = 1$ )  $y^3 - t^3$ , et le produit des trois facteurs semblables  $y - u, y - r u, y - r^2 u$ , sera pareillement  $y^3 - u^3$ ; multipliant ensemble ces produits, on aura

$$y^6 - (t^3 + u^3) y^3 + t^3 u^3 = 0,$$

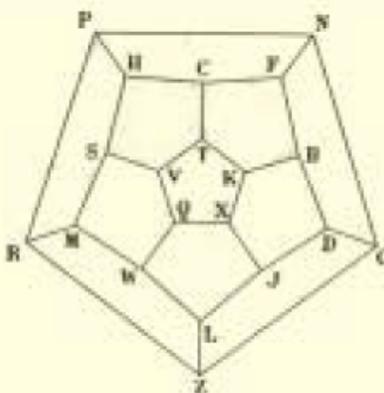
équation du sixième degré, résoluble à la manière des équations du second degré, et dont les deux coefficients  $t^3 + u^3$  et  $t^3 u^3$  seront nécessairement des fonctions invariables de  $\alpha, \beta, \gamma$ .

\* F f 2

5. Le texte de Lagrange sur l'équation du 3<sup>ème</sup> degré (1772).

Les 5 pentagones en étoile étant relevés autour du fond pentagonal forment une corbeille à cinq panneaux latéraux ayant vers le haut 5 pointes. Si l'on prend une deuxième corbeille identique à la première mais retournée, il suffit de les embolter de manière que les dents de l'une viennent dans les creux de l'autre, et inversement, pour avoir un dodécaèdre parfait.

L'icosien. — On peut à la rigueur se dispenser de faire un tel dodécaèdre et il n'y a qu'à prendre une planchette sur laquelle on a dessiné la figure ci-contre ou toute autre.



analogue, à l'imitation d'un jeu anglais appelé jeu icosien et qui se prête fort bien aux recherches du problème d'Hamilton. Avec un peu d'imagination on y reconnaît la forme du dodécaèdre précédent. Supposons en effet que notre dodécaèdre soit formé d'une feuille de caoutchouc vide à l'intérieur et que la face du fond ZRPNG ait été supprimée et réduite à son contour. Mettons la main dans le trou ainsi formé et agrandissons-le considérablement de façon à former avec tout notre dodécaèdre creux en caoutchouc une grande plaque plane pentagonale qui est justement celle que nous venons de représenter. On voit qu'à tout voyage autour du monde représenté sur le dodé-

6. Le jeu de l'icosien et le chemin hamiltonien selon Sainte-Laguë.

On sait depuis le début du XIXe siècle que l'existence d'une telle application du groupe  $S_n$  sur  $S_{n-1}$ , ou même une telle application (non constante) du groupe  $A_n$  des permutations paires (produits de deux, quatre, six transpositions) dans un groupe  $S_m$  avec  $m$  inférieur à  $n$ , est impossible pour  $n$  plus grand que 4. Cela démontre que la méthode de Lagrange ne peut être étendue à  $n$  égal à 5 ni aux valeurs supérieures, mais c'est naturellement insuffisant pour démontrer qu'une résolution d'une équation générale de degré supérieur à 4 n'est pas possible par radicaux - il se pourrait que d'autres méthodes, plus générales, réussissent là où Lagrange aurait échoué. Aujourd'hui, nous savons, toujours d'après Abel et Galois, que cette généralisation même est impossible. Ce problème fondamental et complexe intéressera de nombreux mathématiciens des plus célèbres, parmi lesquels

Leonhard Euler qui y reviendra à plusieurs reprises et surtout Karl Friedrich Gauss (1801) et Louis-Augustin Cauchy (1813).

Arrêtons-nous au cas du degré cinq, pour lequel Descartes par exemple, persuadé qu'il n'existait pas de formule analogue à celle de Cardano, avait proposé en 1637, dans *La Géométrie*, une méthode graphique de résolution grâce à l'intersection de cercles et de cubiques qu'il avait inventée pour l'occasion. Entre 1799 et 1813 (date de l'édition de ses *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*), Paolo Ruffini a publié diverses tentatives de démonstrations, de plus en plus affinées, visant à établir l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux. À toute fonction rationnelle des racines, il a eu l'idée juste d'associer le groupe des permutations de ces racines qui laissent cette fonction invariante, mais il a cru à tort que les radicaux intervenant dans la résolution de l'équation, comme les racines cubiques pour le degré trois, étaient nécessairement des fonctions rationnelles des racines.

Il faudra attendre 1824 pour que Niels Abel justifie l'intuition de Ruffini dans son *Mémoire sur les équations algébriques*. Abel, après avoir cru trouver au contraire une méthode de résolution générale, prouve l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux, en 1826 dans le *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, où il amorce une théorie générale qui ne s'épanouira que dans les écrits de Galois, vers 1830. Les travaux de Galois inaugurent une ère nouvelle des mathématiques, où les calculs font place à la réflexion sur leur potentialité et les concepts, tels celui de groupe abstrait ou d'extension algébrique occupent le devant de la scène.

L'idée lumineuse de Galois consiste d'abord à associer à une équation arbitraire un groupe de permutations qu'il définit en ces termes :

*Soit une équation donnée dont  $a, b, c, \dots, m$  sont les racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres  $a, b, c, \dots, m$  qui jouira de la propriété suivante :*

- 1) *que toute fonction des racines, invariante par les substitutions de ce groupe soit rationnellement connue ;*
- 2) *réciroquement, que toute fonction des racines, déterminée rationnellement, soit invariante par ces substitutions.*

Puis Galois étudie comment ce groupe "d'ambiguïté" se trouve modifié par l'adjonction de quantités auxiliaires considérées dès lors comme "rationnelles". Résoudre une équation par radicaux revient alors à résoudre son groupe de Galois.

L'impossibilité de réduire l'équation du cinquième degré à des équations de degré inférieur provient alors de la "simplicité" du groupe  $A_5$  des soixante permutations paires (produits d'un nombre pair de transpositions) des cinq racines  $a, b, c, d, e$  d'une telle équation. On dit qu'un groupe abstrait est "simple" si l'on ne peut l'envoyer (par une application non constante) dans un groupe plus petit tout en préservant la loi de groupe. Le groupe  $A_5$  est le plus petit groupe simple non commutatif et il apparaît très souvent en mathématiques. Ce groupe se présente très économiquement : il est engendré par deux éléments  $u$  et  $v$  vérifiant les relations  $u^2 = 1$ ,  $v^3 = 1$  et  $(uv)^5 = 1$ , ce qui nous

donne l'occasion d'en venir aux icosions d'Hamilton.

## Les icosions d'Hamilton

Après avoir découvert les quaternions, William Hamilton a tenté de construire en 1857 une nouvelle algèbre, formée de nombres généralisés qu'il appelait les icosions. Deux d'entre eux, notés  $u$  et  $v$ , que Hamilton dénommait racines non commutatives de l'unité, devaient vérifier  $u^2 = 1, v^3 = 1$  et  $(uv)^5 = 1$ . Un calcul enfantin montre que si  $uv = vu$ , on a  $v = 1v = u^5v^5v = u^5v^6 = (u^2)^2u(v^3)^2 = u$  puis  $u = v = vu^2 = v^3 = 1$ . Ainsi l'on ne peut représenter  $u$  et  $v$  dans aucun des groupes  $S_n$  avec  $n$  inférieur ou égal à 4. Pour représenter  $u$  et  $v$  dans le groupe  $A_5$ , des permutations paires des cinq lettres  $(a, b, c, d, e)$ , il suffit de poser  $u = (b, a, d, c, e)$ , permutation qui laisse fixe  $e$  et échange  $a$  et  $b$ ,  $c$  et  $d$ , et  $v = (e, b, a, d, c)$  la permutation qui laisse fixe  $b$  et  $d$ , et qui change  $a$  en  $e = v(a)$ ,  $c$  en  $a = v(c)$  et  $e$  en  $c = v(e)$ . Le produit  $uv$  est alors la permutation cyclique  $(e, a, b, c, d)$  qui est bien d'ordre cinq. L'on peut ainsi représenter  $u$  et  $v$  de 120 manières différentes (mais deux à deux isomorphes) dans le groupe  $A_5$ .

Le groupe  $A_5$  est isomorphe au groupe des rotations qui conservent un icosaèdre ou, ce qui revient au même, un dodécaèdre (ces deux corps sont les plus intéressants des cinq solides platoniciens, qui - avec le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre formé par les six centres des faces d'un cube - sont les seuls polyèdres convexes réguliers existant dans notre espace habituel).

Pour obtenir l'isomorphisme cherché, il suffit d'associer à  $u$  l'une des 15 rotations d'ordre deux (une symétrie dont l'axe est l'une des 15 médiatrices communes à deux arêtes parallèles) et à  $v$  l'une des 20 rotations d'ordre trois (dont l'axe relie l'un des dix couples de deux sommets diamétralement opposés du dodécaèdre ou des centres de deux faces parallèles de l'icosaèdre) de telle sorte que le produit  $uv$  soit l'une des 24 rotations d'ordre cinq (dont l'axe relie l'un des six couples de centres de deux faces parallèles du dodécaèdre ou de deux sommets diamétralement opposés de l'icosaèdre) ; les 60 rotations conservant ce solide peuvent toutes s'exprimer simplement comme produits des générateurs  $u$  et  $v$ .

Bien que les deux icosions  $u, v$  engendrent le groupe  $A_5$  et vérifient les relations  $u^2 = 1, v^3 = 1$  et  $(uv)^5 = 1$ , il n'est pas immédiat que ces relations constituent une présentation de ce groupe, c'est-à-dire que toute autre relation entre  $u$  et  $v$  s'en déduise. Il y a deux façons de s'en convaincre, algébrique ou géométrique (voir les figures 4 et 7).

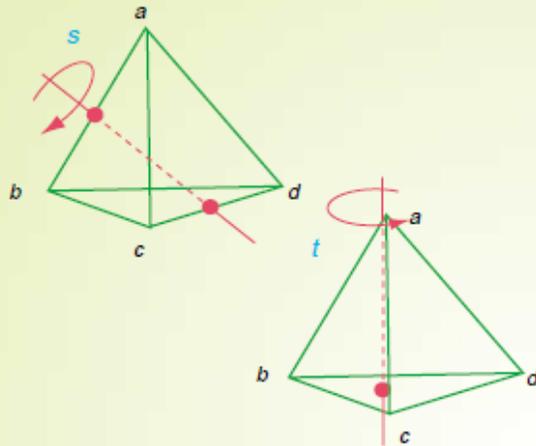
C'est à propos du graphe des arêtes du dodécaèdre, qui a les mêmes symétries que celui de l'icosaèdre, qu'Hamilton mit au point le "jeu de l'icosaèdre" qu'il appelait aussi "jeu des racines non commutatives de l'unité". Ce jeu constitue le premier exemple de ce que l'on appelle maintenant la recherche d'un circuit hamiltonien, concept très important dans la théorie moderne des graphes (voir la figure 6). Il s'agit d'un défi concernant les 20 sommets d'un dodécaèdre, qu'il s'agit de parcourir en suivant les arêtes du polyèdre de façon à passer par chaque sommet une fois et une seule, les sommets de départ et d'arrivée étant eux-mêmes liés par une arête qui permet de fermer le circuit. On pourra lire à ce sujet le remarquable essai de 1937 d'André Sainte-Laguë *Avec des nombres et des lignes*, réédité par Vuibert en 1994.

#### 4. ÉTUDE DES GROUPES $A_4$ ET $A_5$

##### A) LE GROUPE $A_4$

1) Le groupe  $A_4$  est le groupe des permutations paires sur les quatre lettres  $(a, b, c, d)$ . Ce groupe est engendré par les permutations  $s = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{bmatrix}$ , qui transforme  $a$  en  $b$ ,  $b$  en  $a$ ,  $c$  en  $d$  et  $d$  en  $c$ , et  $t = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ a & c & d & b \end{bmatrix}$ , qui transforme  $a$  en  $a$ ,  $b$  en  $c$ ,  $c$  en  $d$  et  $d$  en  $b$ . Celles-ci vérifient les règles :  $s^2=1$ ,  $t^3=1$ ,  $(st)^3=1$ .

2) Il existe une représentation géométrique du groupe  $A_4$  : Ce groupe est le groupe des rotations conservant le tétraèdre régulier  $a, b, c, d$ .



$s$  est représentée par la symétrie par rapport à la médiatrice commune à  $ab$  et  $cd$ .

$t$  est représentée par la rotation d'angle  $2\pi/3$  autour de l'axe du tétraèdre passant par  $a$ .

$st = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & d & c & a \end{bmatrix}$  est la rotation d'angle  $2\pi/3$  autour de l'axe du tétraèdre passant par  $c$ .

Le lecteur patient vérifiera que les règles de simplification  $s^2=1$ ,  $t^3=1$ ,  $(st)^3=1$  constituent une présentation de ce groupe, c'est-à-dire suffisent pour montrer qu'en les combinant avec la loi de groupe, il existe seulement douze "mots" différents constitués des lettres  $s$  et  $t$ .

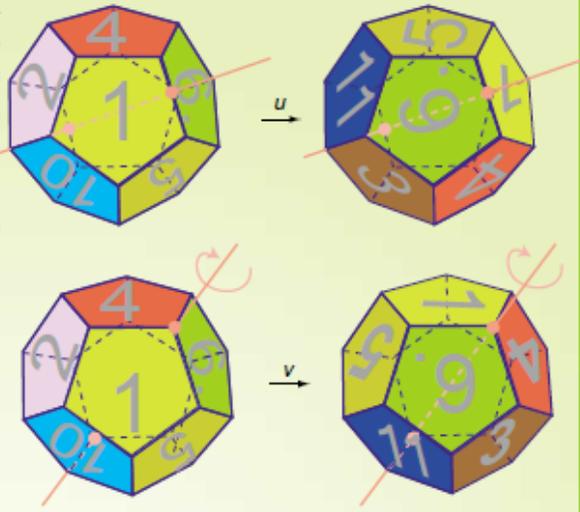
##### B) LE GROUPE $A_5$

1) Le groupe  $A_5$  est le groupe des permutations paires sur les cinq lettres  $(a, b, c, d, e)$ . Ce groupe est engendré par les permutations  $u = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ b & a & d & c & e \end{bmatrix}$ , qui transforme  $a$  en  $b$ ,  $b$  en  $a$ ,  $c$  en  $d$ ,  $d$  en  $c$ , et  $e$  en  $e$ , et  $v = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ e & b & a & d & c \end{bmatrix}$ , qui transforme  $a$  en  $e$ ,  $b$  en  $b$ ,  $c$  en  $a$ ,  $d$  en  $d$  et  $e$  en  $c$ . Celles-ci vérifient les règles :  $u^2=1$ ,  $v^3=1$ ,  $(uv)^5=1$  (bien sûr  $u$  et  $v$  ne commutent pas).

2) Ce groupe a 60 éléments et est isomorphe au groupe des rotations du dodécaèdre régulier.

Ainsi  $u$  est l'une des 15 symétries relatives à la médiatrice commune à deux arêtes elles-mêmes symétriques par rapport au centre.

De même,  $v$  est l'une des 20 rotations d'angle  $2\pi/3$  autour d'une droite joignant deux sommets symétriques par rapport au centre du dodécaèdre.



##### C) PRÉSENTATION DE $A_5$

Le lecteur patient vérifiera que les règles de simplification  $u^2=1$ ,  $v^3=1$ ,  $(uv)^5=1$  suffisent avec la loi de groupe pour montrer qu'il existe seulement soixante mots différents constitués des lettres  $u$  et  $v$ . On commencera, en posant  $s = u$ ,  $t = k^{-2}uk$  (où  $k = uv$ ), par montrer que  $s$  et  $t$  vérifient la présentation de  $A_4$ , c'est-à-dire les règles de simplification  $s^2=1$ ,  $t^3=1$ ,  $(st)^3=1$ . On montrera ensuite que tout mot avec les lettres  $u$  et  $v$  s'écrit grâce aux règles de simplification ci-dessus sous la forme  $k^m h$ ,  $m$  étant égal à  $0, 1, 2, 3, 4$  et  $h$  étant un mot écrit avec les lettres  $s$  et  $t$ . Comme il existe exactement 12 éléments  $h$ , on trouve que le groupe  $A_5$  est bien présenté par les relations ci-dessus.

##### D) $A_5$ , GROUPE DE MATRICES

1) Notons  $F_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  le corps des entiers relatifs modulo 5. Dans ce corps,  $4 + 2 = 1$ ,  $3 + 2 = 0$ ,  $4 \times 2 = 3$ ,  $3 \times 2 = 1$ , etc.

2) Représentons  $u$  et  $v$  comme les transformations suivantes de l'espace projectif  $P_1(F_5)$ . Cet espace projectif contient, outre les cinq éléments de  $F_5$ , un point "à l'infini" noté  $1/0$ . Posons  $u(z) = -1/z$  pour  $z$  élément de  $P_1(F_5)$ . Nous avons clairement  $u^2(z) = z$ , c'est-à-dire  $u^2=1$ . Posons maintenant  $v(z) = -1/(z+1)$  : nous pouvons vérifier que  $v^3=1$ . Nous vérifions la présentation de  $A_5$  puisque  $k=uv$  est donné par  $k(z) = z + 1$ , et  $k^m(z) = z + m$ , de sorte que  $k^5=1$  car, dans  $F_5$ , 5 est égal à 0.

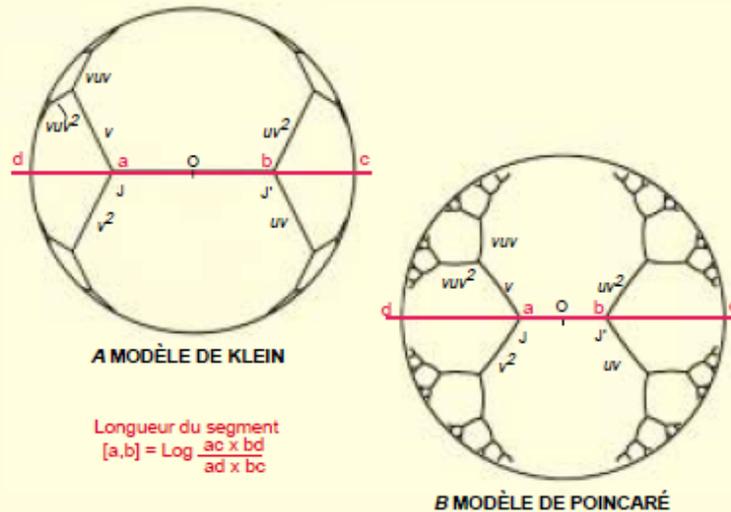
3) Donnons une représentation matricielle des éléments  $u$  et  $v$ . Étant donné des éléments  $a, b, c, d$  de  $F_5$ , avec  $ad - bc = 1$ , on associe à la matrice  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , la transformation  $f$  de  $P_1(F_5)$ , donnée par :

$$\begin{bmatrix} f(z) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Le groupe de transformation ainsi obtenu est noté  $PSL(2, F_5)$ , pour groupe spécial linéaire projectif de  $F_5$ . Ainsi  $u, v, k$ , et  $t$ , y sont représentés par les matrices :

$$u = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad k^m = \begin{bmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{puis } t = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 7. REVÊTEMENT UNIVERSEL ET GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE



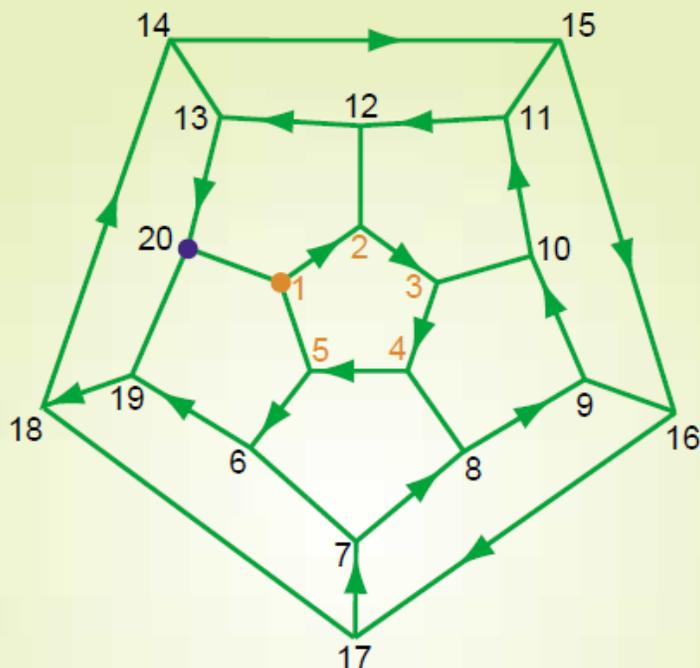
Pour comprendre géométriquement le groupe engendré par deux éléments  $u$  et  $v$  et présenté par les relations  $u^2=1$ ,  $v^3=1$ ,  $(uv)^5=1$ , l'on commence par considérer simplement les deux premières relations ( $u^2=1$ ,  $v^3=1$ ). Le groupe ainsi obtenu est le groupe  $PSL(2, Z)$  que l'on comprend en visualisant son action sur un arbre infini  $T$  dont trois arêtes partent de chaque sommet. La troisième relation ( $(uv)^5=1$ ) se comprend alors en identifiant l'arbre  $T$  avec le revêtement universel du graphe de la figure 6 (ce revêtement universel, au sens de Poincaré, est obtenu en considérant tous les chemins qui suivent les arêtes du dodécaèdre régulier). L'arbre infini  $T$  est représenté selon deux modèles de la géométrie non-euclidienne, le modèle de Klein (A) et le modèle de Poincaré (B). Dans les deux modèles l'ensemble des points de la géométrie plane est l'intérieur d'un disque. Dans le modèle de Klein le segment reliant deux points n'est autre que le segment de la géométrie euclidienne ; seule change la longueur de ce segment. Dans ce modèle, la longueur d'un segment  $ab$  est donnée par le logarithme du birapport  $(ab, cd)$  de  $ab$ , avec les points d'intersections  $c$  et  $d$  de la droite  $ab$  avec le cercle  $C$ . Ainsi :  $[a,b] = \log \frac{ac \times bd}{ad \times bc}$ . Les arêtes de l'arbre  $T$  sont des segments de droite de longueurs égales.

Dans le modèle de Poincaré, les droites sont les arcs de cercles orthogonaux au cercle  $C$ , et la notion d'angle  $\gamma$  est la même que dans la géométrie euclidienne. Les distances sont données par  $2 \log(ab, cd)$  où le birapport  $(ab, cd)$  est calculé sur le cercle passant par  $(a,b,c,d)$  et où le facteur 2 est visible en comparant (A) et (B).

Le groupe  $PSL(2, Z)$  est représenté par des isométries de la géométrie non euclidienne. Ce groupe a pour présentation les relations  $u^2=1$  et  $v^3=1$ . L'élément  $u$  est donné par la symétrie par rapport à l'origine  $O$ , et l'élément  $v$ , par la rotation non euclidienne de centre  $J$  et d'angle  $2\pi/3$ . En appliquant, à l'arête  $JJ'$ , les opérations représentées par les mots (tels que  $uvvuuvuv...$ ) dont les lettres sont les éléments  $u$  et  $v$ , on obtient exactement l'arbre  $T$  du revêtement universel du graphe du jeu de l'icosion d'Hamilton. En particulier, chacun des chemins hamiltoniens est un point de ce revêtement universel.

On obtient le dodécaèdre en identifiant les arêtes de l'arbre  $T$  qui sont congrues modulo 5. Cette congruence signifie que l'on passe de l'une à l'autre de ces arêtes par une isométrie non euclidienne donnée par un élément  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  du groupe  $PSL(2, Z)$  vérifiant  $a \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $b \equiv 0 \pmod{5}$ ,  $c \equiv 0 \pmod{5}$ ,  $d \equiv 1 \pmod{5}$ . Ainsi la présentation du groupe  $A_5$  qui impose la relation supplémentaire  $(uv)^5 = 1$  revient à quotienter  $PSL(2, Z)$  par le sous-groupe normal  $G$  engendré par  $(uv)^5$ . Le quotient de  $T$  par  $G$  n'est autre que le graphe formé par les arêtes du dodécaèdre. Le groupe quotient  $PSL(2, Z)/G$  est le groupe  $PSL(2, F_5)$  de la figure 4.

## 8. LE JEU DE L'ICOSION



Sainte-Laguë dans son livre *Avec des nombres et des lignes*, a fait revivre le jeu de l'icosion inventé par le mathématicien irlandais Hamilton (1805-1865). Le jeu consiste à compléter le circuit passant par tous les sommets d'un icosaèdre une fois et une seule ; on donne au départ, les cinq premiers sommets. En voici un exemple : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20).

### Le triangle de Morley

Il n'y a pas d'"ange de la géométrie" en rivalité avec le "diable de l'algèbre", mais une connivence fructueuse entre les aires visuelles du cerveau, qui décèlent d'un coup d'œil l'harmonie d'une configuration, et celles du langage qui la distille en écritures algébriques. Nous terminerons cette initiation au concept de symétrie par un bel exemple de cette connivence en évoquant le théorème de Morley. Il constitue également un domaine où les symétries, concrètes d'origine géométrique, et

abstraites et algébriques quand on le regarde sous un nouvel angle, se conjuguent de façon forte et laissent une réelle impression de beauté.

**9. LE THÉORÈME DE MORLEY**

Le théorème de Morley énonce que les trois points de concours  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  des trisectrices d'un triangle quelconque  $ABC$ , tels qu'indiqués sur la figure, forment un triangle équilatéral (en rouge).

$f$ ,  $g$ ,  $h$  sont les trois rotations autour des trois sommets du triangle et dont les angles sont les deux tiers des angles au sommet.

Ainsi  $f$  est la rotation de centre  $A$  d'angle  $2a$ ,  $g$  est la rotation de centre  $B$  d'angle  $2b$ , et  $h$  est la rotation de centre  $C$  d'angle  $2c$ . Nous allons étudier les propriétés de ces rotations. La rotation  $g$  transforme le point  $\alpha$  en  $\alpha'$ , symétrique de  $\alpha$  par rapport à  $AB$ . La rotation  $f$  retransforme  $\alpha'$  en  $\alpha$  : ainsi le point  $\alpha$  est le point fixe du produit des rotations  $fg$ . Similairement,  $\beta$  est le point fixe du produit des rotations  $gh$ , et  $\gamma$  est le point fixe du produit des rotations  $hf$ .

Considérons maintenant le produit des rotations  $f^3 g^3 h^3$ . La rotation  $f^3$  de centre  $A$  et d'angle  $6a$  est le produit  $s(AC) s(AB)$  de la symétrie  $s(AB)$  par rapport au côté  $AB$ , et de la symétrie  $s(AC)$  par rapport au côté  $AC$ . De même  $g^3$  est le produit  $s(AB) s(BC)$  et  $h^3$  le produit  $s(BC) s(AC)$ . On a alors  $f^3 g^3 h^3 = s(AC) s(AB) s(AB) s(BC) s(BC) s(AC)$ . Comme le carré d'une symétrie par rapport à une droite est l'identité,  $f^3 g^3 h^3$  est égal à 1, ce qui démontre grâce au résultat algébrique que le triangle  $\alpha, \beta, \gamma$  est équilatéral.

Le mathématicien britannique Frank Morley fut l'un des premiers enseignants des universités américaines. C'est au tournant du siècle précédent qu'à l'occasion de recherches sur les familles de cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle donné, il dégagait la propriété suivante : les trois couples de trissectrices intérieures de ses trois angles (c'est-à-dire des droites qui découpent ces angles en trois angles égaux, à la manière des bissectrices bien connues) se coupent en six points dont trois forment un triangle équilatéral.

La démonstration originale, assez difficile, est basée sur d'ingénieux calculs à base de géométrie analytique superbement maîtrisée. Il existe de nombreuses preuves de ce résultat, ainsi que des généralisations portant jusqu'à 18, voire 27 (et même davantage) triangles équilatéraux que l'on peut dégager à partir des 108 points d'intersections des 18 trissectrices obtenues à partir des trissectrices intérieures par des rotations d'angle  $2\theta/3$ . Parmi ces preuves, il en existe par le calcul trigonométrique, mais aussi par la géométrie pure, comme celle qu'a donnée Raoul Bricard en 1922.

Il en existe une de toute autre nature, qui l'éclaire sous un angle intéressant puisqu'elle permet d'étendre ce résultat a priori fortement euclidien à la géométrie de la droite affine sur un corps  $k$  arbitraire. Le résultat d'algèbre pure qui contient (et étend) la propriété des trissectrices est d'une telle généralité que sa démonstration devient une simple vérification (un énoncé très général est

souvent plus simple à démontrer qu'un cas particulier, car le nombre d'hypothèses que l'on doit utiliser est d'autant plus réduit). Il s'énonce ainsi :

Si  $G$  est le groupe affine d'un corps commutatif  $k$  (c'est-à-dire des applications  $g$  de  $k$  dans  $k$  qui peuvent s'écrire sous la forme  $g(x) = ax + b$ , où  $a$ , noté  $a(g)$ , est non nul), alors pour tout triplet  $(f, g, h)$  d'éléments de  $G$  tels que  $j = a(fgh)$  soit différent de 1 et que  $fg, gh$  et  $hf$  ne soient pas des translations, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

a)  $f^3g^3h^3 = 1$  (transformation identique) ;

b)  $j^3 = 1$  et  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$  où  $\alpha$  est l'unique point fixe de  $fg$ ,  $\beta$  celui de  $gh$  et  $\gamma$  celui de  $hf$ .

Reste à montrer comment cette propriété algébrique très abstraite permet de mieux comprendre (et de prouver par la même occasion) le théorème de Morley. Nous prendrons pour  $k$  le corps des nombres complexes, pour lequel le groupe affine est celui des similitudes directes, et dont un sous-groupe est celui des rotations (il faut et il suffit que  $a$  soit de module 1 pour que  $g$  soit une rotation). Nous prendrons pour  $f, g, h$  les trois rotations autour des trois sommets du triangle et dont les angles sont les deux tiers des angles au sommet. Ainsi  $f$  est la rotation de centre  $A$  d'angle  $2a/3$ ,  $g$  celle de centre  $B$  et d'angle  $2b/3$  et  $h$  celle de centre  $C$  et d'angle  $2c/3$ . Le produit des cubes  $f^3g^3h^3$  est égal à 1, car  $f^3$  par exemple est le produit de deux symétries par rapport aux côtés de l'angle en  $A$ , de sorte que ces symétries se simplifient deux à deux dans le produit  $f^3g^3h^3$ .

L'équivalence ci-dessus montre donc que  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ , où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont les points fixes de  $fg, gh$  et  $hf$  et où le nombre  $j = a(fgh)$  est la première racine cubique de l'unité, que nous avons déjà rencontrée dans le cours de cet article. La relation  $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$  est une caractérisation bien connue des triangles équilatéraux. (Elle peut encore s'écrire sous la forme  $(\alpha - \beta)/(\gamma - \beta) = -j^2$ , ce qui montre que l'on passe du vecteur  $\beta\gamma$  au vecteur  $\beta\alpha$  par une rotation d'angle  $\pi/3$ ).

Une vieille recette, connue des personnes ayant reçu une forte imprégnation de géométrie classique, montre que le point  $\alpha$  défini par  $f(g(\alpha)) = \alpha$  n'est autre que l'intersection de la trissectrice issue de  $A$  et de la trissectrice issue de  $B$  les plus proches du côté  $AB$ . Le lecteur pourra s'en persuader en vérifiant que la rotation  $g$  de centre  $B$  et d'angle  $2b$  transforme ce point d'intersection en son symétrique par rapport au côté  $AB$ , et que la rotation  $f$  de centre  $A$  et d'angle  $2a$  le remet exactement à sa place. Il en va de même pour les points  $\beta$  et  $\gamma$ . Nous avons donc démontré que le triangle  $(\alpha, \beta, \gamma)$  est équilatéral. Nous voyons même en prime que, dans cet ordre, il est décrit dans le sens positif (opposé à celui des aiguilles d'une montre). Cette preuve s'applique tout autant aux autres triangles équilatéraux de Morley : les 18 trissectrices obtenues à partir des trissectrices intérieures par des rotations d'angle  $\neq \pi/3$  permettent de modifier  $f, g$  et  $h$  sans changer le produit de leurs cubes et donnent de nouvelles solutions de l'équation a) et autant de triangles équilatéraux !

La dualité entre algèbre et géométrie, évidente dans les exemples ci-dessus, permet de repousser plus loin les limites de nos concepts géométriques, déjà libérés du carcan euclidien par l'avènement des géométries non euclidiennes (voir la figure 7).

La découverte de la mécanique quantique et de la non-commutativité des coordonnées sur l'espace des phases d'un système atomique a engendré dans les 20 dernières années une évolution largement

aussi radicale des concepts géométriques, libérant la notion d'espace de la commutativité des coordonnées.

En géométrie non commutative la notion de symétrie devient plus subtile, les groupes évoqués dans cet article étant remplacés par des algèbres inventées par le mathématicien Heinz Hopf, illustrant la belle définition d'Hermann Weyl extraite de son livre *Symétrie et mathématique moderne* :

*“La symétrie n'est en aucune façon restreinte aux objets qui occupent un certain espace. Symétrique veut dire quelque chose comme bien proportionné, bien équilibré, et la symétrie indique alors cette sorte d'harmonie entre les diverses parties grâce à quoi elles s'intègrent dans un tout : la beauté est liée à cette symétrie-là”.*

---

*Alain Connes, Médaille Fields et Prix Crafoord, est professeur au Collège de France et à l'Institut des Hautes Études Scientifiques. Il tient à remercier André Warusfel de son aide très précieuse pour la rédaction de la conférence organisée par Jean-Pierre Bourguignon en septembre 2000 au centre Georges Pompidou. La Revue de Mathématiques de l'Enseignement Supérieur publiera, dans l'un de ses numéros de l'année universitaire 2001-2002, un exposé d'André Warusfel sur les configurations de Morley et quelques preuves des symétries sous-tendant ces objets spectaculaires, dont celles de Morley et de l'auteur de cet article.*

---

*Note de la transcriptrice : l'article dans le magazine avait pour titre le graphisme ci-dessous. En omettant la couleur et l'accent, une petite erreur s'est glissée parmi les droites (ou centres) de symétrie des différentes lettres.*

The image shows the word "SYMÉTRIES" in a stylized font. The letters 'S', 'M', 'É', 'T', 'R', 'I', 'E', and 'S' are arranged horizontally. The letters 'S', 'M', 'É', 'T', 'R', 'I', and 'E' are black, while the letters 'S' and 'S' at the beginning and end are green. The letter 'É' has a small accent mark above it. The word is overlaid with several yellow lines representing axes of symmetry: a vertical line through the first 'S', a vertical line through the 'M', a horizontal line through the 'É', a vertical line through the 'T', a horizontal line through the 'R', a vertical line through the 'I', a horizontal line through the 'E', and a vertical line through the final 'S'. There are also small yellow 'X' marks at the intersections of these lines.