Transcrit par TurboScribe.ai

Bonjour à tous, et bienvenue à Springer Nature. Merci beaucoup d'être venu nous rejoindre pour le 25e Webinar de l'année de l'Analyse Functionnelle. Nous sommes très excités de célébrer la deuxième année de cette tradition annuelle, où nous reconnaissons et partagons des recherches exceptionnelles avec notre communauté.

Et un grand merci spécial à Professeur Anand Kaurna pour avoir agréé à donner cette présentation de cette année. Nous sommes vraiment honorés d'avoir vous avec nous. Avec cela, je suis heureux de passer la parole à notre éditeur en chef, Professeur Mosne Hinn, qui va présenter Professeur Kaurna.

Bonjour à tous. Je suis honoré de présenter à Professeur Alan Kaurna, le gagnant de l'Analyse Functionnelle de l'année 2025. Il a récemment accepté notre invitation pour présenter un débat sur les Webinars de Springer sous la supervision de Docteur Ping Wu.

Il est si renommé que n'importe quelle description de son travail séminaire peut scrupuleusement faire sa justice. S'il vous plaît, rejoignez-moi en accueillant Professeur Alan Kaurna. Alan, s'il vous plaît.

Merci beaucoup, Professeur Mosne Hinn, de m'avoir invité et de m'avoir donné l'occasion de présenter ce débat. J'espère pouvoir décrire la motivation et les résultats plus récents. C'est un travail conjoint avec Katia Gonsani et Henri Moscovici.

Si vous voulez, l'origine de tout ça, c'est un livre de Bernard Riemann, que Bernard Riemann a écrit en 1859. Ce qu'il a fait était absolument incroyable, par exemple, en ce qui concerne sa influence sur la mathématiques. De nombreuses façons, ce que l'on peut dire, c'est que une grande proportion de la mathématiques depuis 165 ans, depuis le livre de Riemann, même si ce n'est pas explicite, a été, si vous voulez, obsédée par le désir de prouver une remarque qu'il a faite en passant dans son livre, qui est que la plupart du temps, les zéros de sa fonction Z, je veux dire, les zéros non-triviales, bien sûr, sont sur la ligne critique, notamment la ligne où la partie réelle des chiffres complexes est égale à 1.5. Donc, je veux dire, son livre est très court, c'est quelque chose comme 10 pages, et dans son livre, vous pouvez voir que le but est atteint, et le but était d'obtenir une formule pour le nombre de chiffres primaires qui sont moins que le chiffre X. Et donc, ce que Riemann fait, d'abord, il définit une fonction de laquelle la fonction de comptage primaire peut être facilement déduite en utilisant la fonction Moebius, mais cette fonction f de X est un peu plus simple, et je veux dire, elle est obtenue en prenant la fonction de comptage primaire de π, mais en la prenant sur les roots de X. Et bien sûr, après un très court temps, ce que vous trouvez, c'est que les roots sont plus petits que 2, donc la somme est bien sûr finie.

Donc, ce que Riemann prouve dans son livre, c'est une formule pour cette fonction, et cette formule est compliquée, et est souvent malentendue, alors je veux passer un peu de temps sur ce sujet. Et la raison pour laquelle c'est compliqué, c'est que, bien, d'abord, il y a la fonction de logarithmique intégrale, que vous pouvez voir ici, qui est le terme principal, et qui était connu à Gauss pour approximer, si vous voulez, la fonction de comptage primaire, bien mieux que la fonction qui est utilisée dans le théorème des chiffres primaires. Mais ensuite, il y a une expression très confuse dans la formule de Riemann, et le point est, donc c'est, si vous voulez, cette seconde somme ici, qui est la somme des logarithmes intégraux sur l'axe à la courbe de puissance.

Maintenant, la raison pour laquelle c'est très confus, c'est que Riemann était le maître des fonctionnalités analytiques complexes multivaluées. Et dans son livre, il est extrêmement prudent en expliquant ce qu'il signifie par les logarithmes intégraux sur l'axe à la courbe. Et si vous regardez les livres, même le livre d'Edward, vous trouverez que cette formule est écrite sans s'y préoccuper, parce que ce qui est très facile à comprendre est que comme écrit en langage moderne, ça n'a pas de sens.

Et ça n'a pas de sens parce que l'axe à la courbe, qui est ici, sera densement concentré, si vous voulez, sur un cercle de radii de la courbe de x. Et donc, je veux dire, il n'y a aucune fonction pour laquelle cette série sera convergente, même conditionnellement convergente. Maintenant, Riemann était extrêmement prudent, et après le livre de Riemann, il y avait une preuve par Von Mangoldt de sa formule, où Von Mangoldt était encore extrêmement prudent, et il expliquait que ce n'est pas une fonction de l'axe à la courbe, mais une fonction de l'axe log x. Et donc, Von Mangoldt était très prudent, beaucoup de gens ont été très prudents, mais étrangement, il y a eu la tradition de continuer à écrire la formule de la manière dont Riemann l'écrivait. Et je veux dire, l'on peut très facilement tomber dans la trappe de ne pas comprendre la formule à cause de ça.

Donc dans cette formule, bien sûr, les rangs sont le zéro non-trivial de la fonction de Riemann Zeta, et il y a un restant qui est facile à comprendre. Mais cette formule, par Riemann, est vraiment le prototype d'une formule plus générale, où au lieu d'être intéressé seulement par le nombre de primes moins de x, l'on prend une fonction de test arbitraire, et l'on obtient ce qu'on appelle les rangs de Riemann, il y a Guénon qui était aussi impliqué dans ce genre de formule, les formules explicites. Ces formules explicites sont de la forme suivante, vous avez une fonction de test, f, qui est définie sur le groupe multiplicatif des nombres réels positifs, et vous prenez son transformateur Fourier, et vous évaluez ce transformateur Fourier à les deux points qui sont i sur 2 et moins i sur 2, mais vous l'évaluez aussi sur les zéros non-trivials de la fonction de Riemann Zeta, jusqu'à un changement trivial des variables.

Et ce que vous trouvez, c'est que ceci est donné, comme dans le cas de Riemann, par une somme, et cette somme est sur ce qu'on appelle les endroits du domaine des nombres rationnels. Cela inclut donc tous les primes, et cela inclut aussi ce qu'on appelle le endroit de l'Archimédiane, qui est responsable pour un terme comme celui qui est ici, en fait, dans la formule de Riemann. Donc c'est une généralisation de la formule de Riemann, mais ce qui est extrêmement important c'est que si vous voulez, de cette explicite formule, Veil définit une forme quadratique sur des fonctions dont le support est, bien sûr, à l'intérieur de R plus R, mais dont le support est compact.

Et donc c'est entre, si vous voulez, lambda inverse et lambda, où lambda est un nombre qui est strictement plus grand que 1. Donc, je veux dire, cette forme quadratique a l'avantage que, d'abord, si vous voulez, c'est plus ou moins évident, mais cela prend du temps pour prouver en détail, que la positivité de cette forme quadratique est la même que la hypothèse de Riemann. Et en fait, ce que Veil a montré, c'est que parce qu'il y a un signe moindre dans l'explicite formule avant la somme des zéros, il faut mettre un signe moindre ici si l'on veut évaluer cette quantité. Et cela signifie, en fait, que la hypothèse de Riemann est équivalente à la négativité, avec la notation supérieure, de la somme de l'évaluation de la square convolution de la fonction d'évaluation sur les différents endroits.

Maintenant, ce qui est assez fort, et en fait, nous avons commencé notre joint-papier avec Katia Gonsani et Arun Muscovici avec ce point, c'est que cet équivalent de la hypothèse de Riemann est très surprenant dans le sens où beaucoup de gens pensent, je veux dire, c'est la plus partagée d'opinions, que la difficulté de la hypothèse de Riemann est liée à l'infinité des primes. Mais le critère de Veil, qui est écrit ici, vous montre que ce n'est pas le cas, dans le sens où, en fait, RH est équivalent à un statement qui n'involte que de nombreuses primes finalement à la fois. Et c'est extrêmement important parce que ce statement n'est pas un statement arbitraire, c'est un statement conceptuel sur la positivité, bien sûr, je veux dire, jusqu'à un changement de signes trivial, d'une forme quadratique.

Mon intérêt dans ce problème a commencé il y a longtemps, quand en 1996, en fait, j'ai réalisé qu'il y avait un espace non commutatif qui permettait à quelqu'un d'entendre les zéros de la fonction Riemann-Zeta comme un spectre d'absorption. Je dois vous rappeler un peu de la physique, qu'est-ce qu'un spectre d'absorption, et la raison pour laquelle c'est un spectre d'absorption vient du signe mineur, qui est ici. Dans la physique, si vous voulez, le spectre d'absorption et le spectre en général ont été découverts par une succession d'énormes découvertes.

La première découverte était que quand Newton a décomposé la lumière à travers un prisme et a regardé les différentes ondes qui étaient là, il s'est rendu compte que, bien sûr, vous trouvez une image de type ombre, mais après Newton, ce que Fraunhofer, qui était un optique, a découvert, c'est que dans la lumière venant du soleil, il y avait des lignes sombres et à la première fois, certainement, Fraunhofer a pensé que son instrument était sale, mais il a essayé différents instruments, et il a en fait découvert ces lignes sombres qui sont appelées lignes d'absorption. Fraunhofer a découvert au début du XIXe siècle environ 500 d'entre elles. Ce qui s'est passé ensuite, c'est que des chimistes comme Bunsen et Kirchhoff ont pu reproduire certaines de ces lignes grâce au spectre d'émission.

Par exemple, les lignes d'absorption les plus visibles dans la lumière du soleil sont le sodium, et quand ces chimistes chauffaient du sodium, ils ont découvert qu'il produisait un spectre d'émission et ce spectre d'émission était exactement au même endroit dans la lumière, si vous voulez, que les lignes sombres. Il y a maintenant un événement très intéressant qui s'est produit, et c'est que les chimistes ont pu reproduire la plupart des lignes des lignes d'absorption venant du soleil, sauf qu'ils n'ont jamais pu reproduire quelques-unes d'entre elles, et puis ils se sont demandés, parce qu'ils ne pouvaient pas reproduire ces lignes, ces lignes venaient de, ils ont conjecturé que ces lignes venaient d'un élément chimique qui n'était pas connu sur la Terre. Et parce que c'était, si vous voulez, les lignes d'absorption du soleil, ils ont appelé ces éléments inconnus ils l'ont appelé de l'hylium.

Et le miracle qui s'est produit c'est qu'à la fin du 19e siècle, il y avait une éruption de Vesuvius et les gens avaient l'idée de faire l'analyse spectrale du lavage et ils étaient étonnés de trouver qu'il y avait de l'hélium dans le lavage. Donc, je veux dire, depuis longtemps, j'ai ajouté cette interprétation spectrale à travers un spectre d'absorption et dans les dernières années, dans le travail conjoint avec Katia Gonsani, nous avons ajouté l'idée d'appliquer, si vous voulez, la technique qui est à l'origine de l'invention de la photographie. Donc, cette technique qui est à l'origine de l'invention de la photographie est assez incroyable.

C'est dû à un Anglais qui s'appelle William Henry Fox Talbot et cet Anglais avait la suivante idée incroyable. Vous voyez, quand les gens faisaient de la photographie avant lui, ce qu'ils recevaient était comme un spectre d'absorption. Ils recevaient le négatif de l'image véritable.

Donc, ils recevaient quelque chose comme ce qu'il y a à gauche ici, où, si vous voulez, ce qui est normalement sombre apparaît blanc ou apparaît comme lumière et ce qui est normalement lumière apparaît sombre. Et la raison, bien sûr, c'est que, par exemple, quand vous envoyez de la lumière en silver, cela va sombrer en effet de lumière. Donc, l'idée incroyable de Talbot était de prendre encore une photo de la photographie.

En faisant cela, bien sûr, il a récupéré l'image d'émission. Un avantage, bien sûr, de sa technique était qu'il pouvait reproduire l'image autant de fois qu'il le voulait. Donc, il pouvait faire une fortune d'une seule photo.

Il pouvait la vendre de nombreuses fois. Maintenant, avec Katia, nous avons eu exactement la même idée et notre idée était de prendre ce que j'avais trouvé comme un spectre d'absorption et de l'abattre de la lumière blanche. Donc, cela prend un petit peu d'efforts mathématiques.

Il y a une explication semi-classique et ainsi de suite. Ce qu'il y a derrière, c'est la formule de tracé que j'ai obtenue en 1998 qui vous donne un état d'espace inversé dans lequel, si vous voulez, les formules explicites deviennent une formule de tracé. Qu'est-ce que la formule de tracé ? Il y a des prototypes de formules de tracé comme la formule de tracé de Zellberg.

C'est une formule dans laquelle, d'un côté, vous aurez des données spectrales qui viennent d'un opérateur et de l'autre côté, vous aurez des données géométriques qui viennent d'un espace géométrique avec une action et ainsi de suite. Dans notre cas, dans le cas des formules explicites, ce que j'ai obtenu en 1998 était une formule pour la somme des termes que Veil obtient dans ses formules explicites. Mais seulement une somme finie est nécessaire car, comme je l'ai expliqué auparavant, il faut seulement se concentrer sur de nombreuses primes finement à la fois.

Cette somme, qui est très mystérieuse quand on la regarde du point de vue de la géométrie et ainsi de suite, elle a l'air très mystérieuse car elle concerne les primes et ainsi de suite, mais malheureusement, il y a un espace très naturel qui est le quotient du produit du champ périodique par le champ réel divisé par l'action, par la multiplication de ce produit de primes, qui sont dans un certain nombre de endroits. Donc, c'est un espace. Je reviendrai sur cet espace un peu plus tard.

Ce qu'on voit ici est un espace extrêmement intéressant car, alors que dans la théorie des mesures c'est très facile à comprendre, c'est un espace classique, au niveau de la topologie, c'est un espace non commutatif. Donc, en analysant cet espace, ce que nous avons fait, en utilisant l'idée que j'ai expliquée auparavant de transformer le spectre d'absorption dans un spectre d'émission, ce que nous avons fait avec Katia Konstanin, c'est de prouver une formule qui permet à un de prouver la positivité de cette forme très quadratique mais bien sûr, pas en général, car si nous l'avions prouvé en général, nous aurions prouvé la hypothèse de Riemann. Mais pour prouver cette positivité pour des fonctions dont le soutien est contenu dans l'intervalle suivant 1 sur la square root de 2, 2 sur la square root de 2. Mais l'idée principale était que, au moins en prouvant cette positivité, nous avons donné une raison pour cette positivité et la raison est que il y a un espace, il y a un subspace de l'espace Hilbert, des fonctions, même des fonctions sur la ligne, qui joue un rôle clé et cet espace a été découvert par le mathématicien Sonin au XIXe siècle et c'est le suivant espace très surprenant ce que vous faites c'est que vous prenez, je l'appelle S si vous voulez, dans cette formule, c'est une projection orthogonale sur cet espace.

Cet espace, qu'est-ce que c'est ? C'est un espace de fonctions qui sont intégrables sur la square même des fonctions, disons, sur la ligne et ils ont la propriété qu'ils disparaissent dans l'intervalle (-1,1). Désolé, je peux entendre quelqu'un parler, si il y a une question, je peux l'accepter, mais sinon... Je ne peux pas entendre. Je ne peux pas entendre.

Je ne peux pas entendre ce que vous dites, alors laissez-moi continuer. Il y a cette positivité que vous avez que vous avez dit, qu'est-ce que? Quoi? Je ne peux pas entendre ce qu'il dit. Mox, pouvez-vous me dire ce qui se passe? Nous ne pouvons vous entendre, mais s'il vous plaît, laissez la question jusqu'à la fin et que le séminaire continue ou vous pouvez l'envoyer au chat.

Nous ne pouvons pas entendre ce que vous dites, alors laissez-moi continuer, je veux dire... C'est dit par Charles. Ok, laissez-moi continuer, sinon je ne peux pas aller n'importe où. Ok, alors laissez-moi continuer.

Ok, alors laissez-moi continuer. Ok, alors maintenant je reviendrai à la forme de Veille-Quadratique en général. Et donc en général, ce qui se passe c'est que, vous savez, quand vous restrictez la forme de Veille-Quadratique pour tester des fonctions dont le soutien est dans un intervalle fixe, comme ce qui a été fait auparavant dans le théorème avec Katia Gonsami, alors ce qui se passe c'est que vous pouvez prouver, en utilisant la théorie de Névaldina, que cette forme de Veille-Quadratique, si elle est positive, ne peut pas avoir un radical, c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir, si vous voulez, une fonction qui est telle que la forme de Veille-Quadratique donne 0 quand vous l'évaluez sur la courbe de convolution de la fonction.

Et maintenant nous avons commencé, avec Gonsami, à analyser les valeurs eigen de cette forme de Veille-Quadratique, dans un livre qui a été publié il y a 3 ou 4 ans, et ce que nous avons trouvé avec l'ordinateur, c'est qu'il y a des valeurs eigen qui sont incroyablement proches de 0, elles ne sont pas 0, elles sont positives, mais quand vous regardez le log de ces valeurs eigen les plus petites, ce que vous trouvez est la courbe suivante, et ce qui est écrit ici est la square de lambda, donc si vous voulez, c'est la même x que dans Riemann, et ce que vous trouvez c'est que c'est vraiment incroyable, pour des valeurs très petites de l'x, la petiteur des valeurs eigen est vraiment étonnante. Et donc, je veux dire, vous savez, cela suggère, bien sûr, alors ce que nous voulions faire et ce que nous avons fait dans notre livre sur Gonsami, c'était de faire une preuve pour le vecteur eigen minimal de la forme quadratique, et bien sûr, pour cela, nous avions besoin de trouver un autre endroit dans la mathématiques où ces nombres minuscules étaient entrés, et en fait, le lieu a été dicté par la formule de traces que j'ai trouvé en 1998, parce que cette formule de traces invoquait deux projections, lesquelles j'ai appelé P lambda et P lambda hat, et ces deux projections sont, sur l'une côté, P lambda est ce qu'on appelle la coupe infrarouge, donc si vous voulez, c'est la projection sur l'intervalle minus lambda lambda pour les fonctions, et sur l'autre côté, il y a la projection en Fourier transformateur sur le même intervalle. Comme nous savons maintenant, si vous voulez, et je reviendrai à cela plus tard, ces deux projections sont exactement celles qui sont impliquées dans la théorie de communication, du travail d'abord de Claude Shannon, puis de Slepian et de ses collaborateurs, et ce que l'on sait d'un raisonnement élémentaire dans l'analyse fonctionnelle, c'est que ces deux projections ne s'interrogent pas.

Il n'y a pas de fonction, même fonction, disons, sur la ligne, qui est l'L2, qui a un soutien entre minus lambda et lambda, et qui a un transformateur en Fourier sur la même propriété. Et la raison est que si vous prenez une fonction qui a un soutien entre minus lambda et lambda, son transformateur en Fourier est holomorphique, donc il ne peut pas avoir un soutien compact. Donc, ces deux projections peuvent être analysées, et elles ont été analysées par Slepian et ses collaborateurs, et ce qu'on trouve, c'est que quand on regarde leur angle, alors leur angle, même s'ils ne s'interrogent pas, leur angle, le prix de cet angle, qui est un opérateur, est très, très, très proche de zéro.

Donc c'est presque comme s'ils s'interrogent. Et quand on regarde les minuscules valeurs de cet angle, ici c'est 1 minus la cosine, ce que l'on trouve, c'est que l'on trouve le même graphique que pour les minuscules valeurs d'Eigen de la forme quadratique. Donc, c'est extrêmement suggérant, et en fait, avec Katia Constagny, nous avons été en mesure de les lier par le suivant.

Donc, d'abord, nous avons utilisé la formule suivante, qui est une formule d'égalité, qui est en fait déjà implicite dans le livre de Riemann. Et puis, en utilisant cette formule, nous avons construit des vecteurs qui ont la propriété que, au moins quand on regarde, avec un ordinateur, ce qui se passe, ce que l'on trouve, c'est que quand on fait le processus de Gram-Schmidt orthogonalisation avec ces vecteurs, en commençant par les vecteurs Prolate venant de la paire de projections, alors l'on trouve le même graphique, c'est un fait expérimental. Donc, ce que l'on trouve, c'est que l'espace des vecteurs d'Eigen pour les valeurs d'Eigen de la forme quadratique le plus bas possible correspond à la projection Prolate, qui est la projection sur les premiers valeurs d'Eigen K de l'opérateur Prolate.

Bien sûr, à travers une carte très non-triviale, qui est cette carte. Et donc, ici, je vous montre une photo des différents graphes, et ces photos, en fait, vous avez l'impression dans la photo qu'il n'y a qu'un seul graphique, mais en fait, c'est parce qu'un des graphiques cache l'autre graphique. Et c'est l'argument des fonctions d'Eigen pour la matrice éveillée.

Donc, il y a une matrice éveillée et une non-matrice, et comme je l'ai dit auparavant, les valeurs d'Eigen sont incroyablement petites. Par exemple, pour la mu, qui est la square de lambda, qui est environ 11, alors la valeur d'Eigen la plus petite est de l'ordre de 10 à la minus 48, ce qui est assez, assez, assez petit. Donc, de cette première approche avec Konzani, nous avons défini le triple spectral.

Je vous rappelle que les triples spectraux sont formés par un algébra actif dans l'espace Hilbert avec un opérateur Dirac. Et avec ce triple spectral, nous avons pu, si vous voulez, comprendre les premiers zéros de Zeta à l'aide de théories de Prolate, des fonctions de Prolate, etc. Mais nous n'étions pas vraiment si contents.

Je veux dire, si vous voulez, il y avait ce fait expérimental qui était derrière la scène, puis il y avait beaucoup de théories, beaucoup de trucs expérimentaux qui ont été faits en regardant les valeurs d'Eigen de l'opérateur correspondant, et je ne veux pas passer trop de temps sur ça, parce que nous avons trouvé une raison conceptuelle derrière cet accord, si vous voulez. Et la raison conceptuelle est la suivante, il se trouve que la carte E, qui était déjà implicite dans Riemann, est en fait la même chose que les sommes de Riemann en intégration, et alors on peut définir ce qu'on appelle les sommes de Riemann environnementales, qui sont simplement obtenues en prenant les sommes de Riemann pour une fonction, et en les faisant environnementales sous le changement de taille par µ, et puis nous avons la notion suivante de ce que nous appelons un cycle Zeta. Un cycle Zeta est quelque chose qui est très simple à définir.

C'est un cercle de longueur L, qui est le log de µ, qui était avant.

Il s'agit d'un variant sous le changement de taille de mu, et puis nous avons la notion suivante de ce que nous appelons un cycle zeta. Un cycle zeta est quelque chose qui est très simple à définir. C'est un cercle de longueur L, qui est ici le log de mu, qui était auparavant.

Et ce que l'on assume, c'est que les summes de Riemann ne forment pas un subspace dense dans l'espace Hilbert L2 de ce cercle. Et puis nous avons un théorème. Donc ce théorème n'est plus, si vous voulez, bien sûr, il a été inspiré par des calculs computers, mais le théorème est un théorème mathématique.

Et donc ce qu'il dit, c'est que les cycles zeta correspondent exactement aux zéros critiques du zeta. Donc si vous prenez un cycle zeta, alors quand vous prenez l'action du groupe multiplicatif sur le complément orthogonal de ce subspace, qui n'est pas dense, alors vous obtenez les parties imaginaires des zéros du zeta, et à l'inverse, si vous prenez une partie imaginaire du zéro du zeta, alors vous obtenez un cycle zeta. Ok, alors je veux dire, c'était ok, c'était ok, mais il y avait, si vous voulez, plusieurs défauts.

L'un des défauts était que nous n'avions que les zéros critiques, et l'autre défaut était que, si vous voulez, ce n'est pas comme si nous avions obtenu tout de suite un opérateur dont le spectre imitait le spectre bas de la fonction Riemann-Zeta, parce qu'on a dû changer la valeur de mu pour s'adapter, etc. Donc, c'était satisfaisant, mais ce n'était pas optimal. Et la situation a changé très très très récemment, ok, un livre n'a pas encore été publié, et c'est basé sur le théorème de Caratheodorie en 1911 sur les matrices Peplitz.

Je veux dire, c'était la nouvelle inspiration, et ce théorème est assez incroyable parce qu'il vous dit que si vous prenez une matrice de Peplitz, alors, si vous regardez l'eigenvecteur correspondant à la plus grande valeur de l'eigen ou à la plus petite, si vous voulez, ça n'a pas d'importance, alors ce polynomial, quand vous prenez le polynomial associé aux coefficients de ce vecteur, alors il y a un résultat général qui vous dit que toutes les routes de ce polynomial sont sur le cercle unique. La preuve n'est pas très difficile, ça peut être fait par les algébras de Sistar, et ainsi de suite. Je veux dire, c'est très, très conceptuel.

Et ce que j'ai fait avec mon collaborateur Walter van Soeylecon c'est d'étendre ce théorème dans une situation où Zeta intervient. Et maintenant, si vous voulez, avec Henri Moscovici et Katia Konczani, ce que nous avons pu faire, nous avons pu obtenir un triple spectaculaire de Zeta qui est beaucoup plus simple que celui que j'avais défini avec Konczani, et qui réalise maintenant vraiment son rêve d'obtenir la partie basse des zéros de Zeta. Et je veux dire, c'est incroyablement simple comme triple spectaculaire parce que c'est, si vous voulez, les fonctions sur l'intervalle lambda inverse lambda où, bien sûr, la mu est la square de la lambda, vous avez l'espace Hilbert, c'est l'espace Hilbert standard, OK, des fonctions légères avec ce produit interne.

Mais maintenant, l'opérateur est l'opérateur Dirac pour le cercle, comme avant, mais il y a une perturbation Et alors, ce que l'on fait, l'on compute pour chaque lambda, pour celui-ci, l'on peut, bien sûr, utiliser le ordinateur. Et quand on la compute, par exemple, on la compute pour la lambda qui est 3, et je ne peux pas vous dire quel côté est les zéros de Riemann et quel côté est le spectre de cet opérateur parce qu'ils sont incroyablement proches, OK, après un moment, OK, ils diffèrent, mais, par exemple, pour les premiers 20, ils sont vraiment les mêmes, OK, et en fait, quand on est allé beaucoup plus loin que la lambda est 3, on a obtenu, si vous voulez, un accord qui est beaucoup plus étonnant, par exemple, on a 64 places décimales, 67, et ainsi de suite pour les correspondants zéros. Donc, OK, donc, c'est extrêmement satisfaisant et ce qu'il y a derrière, comme je l'ai dit dès le début, c'est un espace géométrique qui, je veux dire, qui devient de plus en plus compliqué quand vous avez plus de primes, mais qui peut être très simplement décrit quand vous prenez, par exemple, une seule prime.

Donc, quand vous avez une seule prime, l'espace géométrique que vous obtenez, qu'est-ce que c'est ? C'est, si vous voulez, essentiellement, le quotient des numéros périodiques par R par les puissances de la prime P que vous ajoutez. Donc, je veux dire, c'est un espace qui peut être imaginé comme ça, je veux dire, donc il a un orbite périodique de longueur log P et bien sûr, cet orbite périodique doit être là à cause de la forme de la formule explicite où vous avez une longueur log P pour chaque prime, mais la picture est la suivante. La picture est que vous avez aussi dans cet espace un orbite générique qui est comme un tournevis pour que dans sa fermeture vous avez cet orbite périodique.

Donc, c'est la picture correcte et quand vous savez, si vous voulez, la géométrie algébrique et la théorie des numéros et ainsi de suite, ce que vous pouvez être choqués par c'est que cette picture est exactement la picture que vous attendriez pour la densité du point générique dans le spectre de Z et ce qui se passe c'est que quand vous regardez plusieurs primes maintenant, vous savez, deux primes ou plusieurs primes et ainsi de suite, vous trouvez que vous obtenez une picture similaire mais dans cette picture maintenant l'orbite générique reste comme une orbite comme le point générique mais il devient dense dans l'orbite périodique pour chaque prime donc ici, j'ai fait une picture que j'espère être suggestive et qui vous montre ce qui se passe et ce que vous découvrez c'est que si vous travailliez dans la topologie ordinaire cela ne serait pas sensé mais grâce à la géométrie non-computative ça fait sens et la raison est la suivante la raison est que vous devez penser aux fonctions algébriques correspondantes et et dans la géométrie non-computative quand vous prenez les matrices algébriques des fonctions n par n il sous-estime le même espace que les fonctions dans l'espace alors ce qui se passe ici c'est que individuellement chaque orbite périodique est obtenue comme la limite de l'orbite générique mais le fait que l'orbite générique peut être dense si vous voulez peut être entourée de chaque de ces orbites périodiques vient exactement de la possibilité de le répéter en temps je veux dire de le répéter autant de fois qu'il y a des primes et comme je l'ai dit avant je veux dire quand vous regardez la topologie de le schéma qui est le spectre des integers c'est exactement la situation vous obtenez une situation qui est entièrement similaire ok alors dans la seconde partie de mon discours maintenant je vais parler du comportement ultraviolet parce que ok ce que nous avons vu jusqu'ici c'est comment si vous voulez obtenir d'une manière très concrète l'image infrarouge du l'espace en dessous de la fonction Riemann-Zeta et maintenant je reviens au comportement ultraviolet donc le comportement ultraviolet est si vous voulez dominé par l'idée suivante qui est une lecture bien connue par Marc Katz qui est la question si l'on peut entendre la forme d'un trompeau donc l'idée était la suivante l'idée était que si vous prenez un espace et que vous ne savez pas quel espace c'est mais un espace comme une musique comme une échelle qui est attachée à cela par la théorie de Helmholtz et l'idée de Katz était peut-on de cette échelle de ce spectre si vous voulez récupérer certaines propriétés de l'espace maintenant une propriété que vous pouvez immédiatement récupérer est la dimension de l'espace ok et vous pouvez aussi récupérer l'arrière et la longueur du périmètre de l'expansion de l'espace de l'expansion de l'espace maintenant quand vous regardez les fonctions de Riemann Zeta les choses sont très simples parce que ce que vous découvrez et je vais vous expliquer les détails de l'expansion de l'espace ce que vous découvrez je veux dire en fait j'ai publié un livre correspondant dans le même journal que nous célébrons aujourd'hui et quand vous computez en assumant la hypothèse de Riemann quand vous computez l'expansion asymptotique de l'opérateur self-adjoint putative du spectre qui vient de la partie imaginaire de la non-réversible de la fonction Zeta vous trouvez le suivant vous trouvez que vous voyez la trace de la chaleur commence par un terme qui est très surprenant qui est log de 1 sur T sur le square root de T si il y avait juste 1 sur le square root de T ce serait comme un cercle mais ce n'est pas un cercle parce qu'il y a ce nouveau terme qui est divergent bien sûr et qui est log de 1 sur T puis il y a un terme de correction qui implique comme dans très bien comme dans la formule explicite le log de 4 pi mais dans la formule explicite vous avez log de 4 pi plus la constante ici vous avez plus 1 alpha de la constante sur le square root de T et puis ok c'est un exercice on peut compter tous les termes dans l'expansion donc comme je l'ai dit cela a été publié dans un livre il y a environ 2 ans et donc on sait exactement ce que c'est cette expansion mais ce qu'elle nous dit sur l'espace c'est très très étrange elle nous dit que ce n'est pas un cercle à cause de ce log ici donc c'est certainement plus plus intéressant et plus subtil l'espace maintenant dans mon travail conjoint avec Henri Moscovici ce que nous avons pu trouver donc bien sûr je veux dire vous savez ces ces termes viennent de la formule de Riemann pour les fonctions de comptage le nombre des zéros de la fonction zeta c'est plus ou moins une traduction de cela et ce que nous avons fait je veux dire ok on peut avec un ordinateur on peut dessiner le graphique de cette expansion et ainsi de suite donc ce n'est pas un problème mais ce que nous avons fait avec Henri Moscovici dans notre travail conjoint c'est de trouver en fait un espace et un opérateur qui ont le même comportement ultraviolet que les zéros de la data donc nous ne notons pas que nous obtenons les zéros de la zeta mais nous notons que nous obtenons en fait exactement les mêmes termes dans l'expansion de l'eau que ce qui est écrit ici et je veux dire ce qui est vraiment vraiment vraiment incroyable c'est que cette découverte implique exactement les les fonctions qui ont été utilisées par exemple dans mon travail auparavant avec Khonsani et donc si vous voulez la découverte qui est derrière ça c'est une découverte qui est liée à Slepian et ses collaborateurs dans la théorie des informations et ce qu'ils ont trouvé qui est vraiment assez remarquable c'est que si vous voulez je parlais auparavant des deux projections la projection où dans l'infrarouge vous projetez entre q est moins lambda et q est lambda et dans l'ultraviolet vous êtes vous projetez entre p est moins lambda et p est lambda ok maintenant vous avez 4 lignes vous avez 4 lignes qui sont données bien sûr par des équations très simples et donc ces 4 lignes correspondent aux deux projections qui sont p lambda et p lambda hat que j'ai utilisé et mentionné beaucoup de fois auparavant dans le travail avec Khonsani mais maintenant ce que vous pouvez faire vous pouvez faire vous utilisez le produit des 4 lignes et vous obtenez le suivant vous obtenez une expression qui est comme p square moins lambda square fois q square minus lambda square maintenant ce que vous faites c'est vous pouvez maintenant prendre le flux Hamiltonien qui est associé à cette nouvelle fonction et cela vous donne en fait un flux Hamiltonien qui est donné par ce p square minus lambda square q square minus lambda square et ce que Slepian et ses collaborateurs ont trouvé c'est que cela vous donne ce flux Hamiltonien qui correspond à un vrai opérateur cet opérateur est le suivant ok alors je vais vous expliquer en plus de détail ce que c'est mais ce qu'ils ont découvert si vous voulez c'est que l'opérateur de la vague prolate qui ok commute en fait avec le sol dans l'espace et il commute en fait avec le le je veux dire ok je veux dire si vous voulez quand nous avons travaillé avec Katia

Consagny dans les précédentes vidéos je j'étais nous utilisons si vous voulez la compression de la scalabilité dans l'espace de la SONY et mais il ne commutait pas avec la SONY alors que maintenant si vous voulez l'opérateur de la vague prolate commute alors ça vient du travail de Slapien et ses collaborateurs Landau et et et en 1960 65 et ils étaient ingénieurs je veux dire ils travaillaient dans Bell Lab et ce qu'ils étaient préoccupés par c'était la précédente si vous voulez idée de Claude Shannon notamment Claude Shannon était investigant l'idée suivante c'est que c'est très très compliqué que vous savez quand par exemple quand je donne un discours je suis limité en temps ok mais je suis aussi limité en fréquence bien sûr alors comment peut-être si vous voulez qu'il y a une fonction qui est limite en temps et en fréquence où les fréquences sont computées par le transformateur Fourier et comme nous l'avons vu avant c'est impossible parce que si vous prenez une fonction qui est limitée en temps son transformateur de Fourier sera holomorphique, donc il ne peut pas être limité en fréquence. Ce qu'ils ont fait dans plusieurs papiers, Slepian, Pollak et Landau aussi, c'est d'en découvrir qu'un opérateur qui avait été connu auparavant dans la géométrie, qui s'appelle l'opérateur de la vague de Pollak, était en fait, comme je l'ai dit auparavant, commutant avec ces deux projections et vous permettant de compter l'angle entre les projections P lambda et P lambda hat. Donc l'opérateur était connu auparavant, et c'est ce qui le donne son nom, l'opérateur Pollak.

Pourquoi Pollak ? Parce qu'il correspond, si vous voulez, à un ellipsoïde qui est élongé dans la direction de l'axe révolutionnaire. Et donc, en faisant des calculs élémentaires, quand vous voulez compter le son de ce full ellipsoïde, ce tridimensionnel à l'intérieur de l'ellipsoïde, ce que vous découvrez, c'est que l'équation de Helmholtz a la séparation des variables et que vous obtenez l'opérateur de la vague de Pollak en conséquence de cette séparation des variables, comme l'une des séparations des variables, Ok, alors vous obtenez cette commutation avec les projections P lambda et P lambda hat, mais c'est ok quand vous travaillez dans l'intervalle minus lambda lambda. Et en 1998, quand j'ai investigé cet opérateur, j'ai essayé, je veux dire, j'ai investigé l'extension de l'opérateur à la ligne complète, pour dire, par exemple, les fonctions des événements sur la ligne complète, et ce que j'ai trouvé, c'est que quand vous prenez le domaine minimal, qui est le espace de Schwarz pour cet opérateur, qui est le domaine fondamental naturel pour l'opérateur, alors c'est symétrique, mais ce n'est pas self-adjoint, et il a des indices de déficience Neumann qui sont 4 et 4, mais entre les extensions self-adjointes, qui existent parce que les indices de déficience sont égaux, il n'y en a qu'une qui commute avec les projections pi lambda et pi lambda hat, et cette extension, si vous voulez, commute avec Fourier, et maintenant ce que nous avons découvert dans notre travail adjoint avec Ari Moscovici, c'est que quand on le regarde sur la ligne complète, incroyablement, l'opérateur self-adjoint a un spectre discret, parce que c'était incroyable, parce qu'en 1998, je n'ai même pas l'air d'essayer d'investiguer le spectre complet, et j'étais convaincu que le spectre était en fait un spectre continu à l'extérieur de l'intervalle minus lambda lambda, alors qu'en fait il continue à être discret, et donc bien sûr il y a une condition de bordure à l'infini, mais ensuite avec Ari Moscovici, nous avons commencé à investiguer cet opérateur comme un bon physiciste, notamment nous avons commencé à faire l'approximation semi-classique afin de compter le nombre de valeurs eigen, ou la fonction de comptage si vous voulez, pour cet opérateur, donc quand vous regardez l'approximation semi-classique, vous trouvez une picture qui vous donne, vous savez, une courbe qui ressemble à un hyperboloïde très bien, mais je veux dire où vous êtes avec P plus grand que lambda à cause de ceci et Q plus grand que lambda, donc vous trouvez un genre de quadrant intersecté avec un genre d'hyperboloïde et vous pouvez compter, je veux dire la computation n'est pas difficile, mais ensuite vous trouvez quelque chose d'incroyable, vous trouvez les mêmes termes quand vous comptez comme les termes dans la fonction de comptage de Riemann pour le nombre, si vous voulez, des zéros de zeta dans un intervalle, donc guidé par ça, nous avons été assez étonnés et nous avons investi beaucoup plus en détails, donc je veux dire qu'il y a des computations, mais elles sont relativement simples en termes d'intégraux elliptiques, et donc nous avons investi cet opérateur en plus de détails et pour cela vous devez utiliser la transformation qui est liée à Louisville, je veux dire c'est incroyable l'amount de mathématiques que je parle qui est du XIXème siècle, donc vous utilisez la transformation de Louisville, et ok bien, puis vous pouvez mettre dans le type d'équation de Schrödinger, et puis on peut utiliser un bon résultat si vous voulez sur la fonction de comptage, ce bon résultat vous donne un moyen de compter le nombre de valeurs d'Eigen en un intervalle fixé, et puis ok quand vous la comptez dans le cas de la valeur de lambda qui est le square root de 2, vous trouvez exactement la même formule que la formule de Riemann, et en fait, donc vous trouvez un terme qui est de l'ordre de O log E, et je veux dire, donc si vous voulez cette formule, c'est très très proche lié à une formule, un estimé de Trujan pour la fonction de comptage de Riemann qui est ici, alors qu'est-ce qu'on a fait avec Henri Moscovici, parce que cet opérateur, l'opérateur de la vague prolate, est comme le square de l'opérateur de Dirac, donc ce qu'on a dû faire, c'est qu'on a dû extraire une square root de cet opérateur, et puis, bien sûr, on a voulu explorer la géométrie correspondante, maintenant pour extraire la square root, on utilise la méthode Darboux, et la méthode Darboux, ce qui est extrêmement intéressant dans l'utilisation de cette méthode Darboux que nous devons développer dans le prochain livre avec Consigny et Moscovici, c'est qu'en fait, il y a une ambiguïté dans la choix de la square root, et cette ambiguïté est en fait une ambiguïté Galois, qui est liée à la théorie de la différence Galois de l'opérateur de la prolate, donc je veux dire, il y a un développement extrêmement intéressant là, donc ce que vous faites c'est que vous résolvez l'équation Riccati, vous obtenez l'opérateur de Dirac, et donc ce que vous trouvez c'est que cet opérateur de Dirac a le même comportement travaillé, il y a une chose que je n'aime pas, c'est que nous devons prendre deux fois l'opérateur de Dirac, alors ça je ne comprends pas pourquoi nous devons faire ça, mais puis expérimentalement ce que vous faites c'est que vous computez le spectre en prenant l'opérateur de Dirac, et si vous voulez, en prenant la solution qui satisfait les conditions bordérales à lambda, et en essayant de le matcher avec la solution qui satisfait l'équation de différence, bien sûr l'équation de différence de valeur eigen à l'infini, et donc pour ça, vous les écrasez, vous savez, vous manipulez, et quand ils s'interpellent ou quand ils sont opposés l'un à l'autre, vous avez une valeur eigen, et donc en faisant ça, l'on peut compter le spectre, bien sûr dans un moyen très rouge, et donc ce que l'on trouve, c'est que, vous savez, les premières valeurs eigen négatives approximées pour le square sont moins 39, moins 94, moins 152, et ainsi de suite, et puis pour comparer avec les zéros de zeta, vous devez prendre le square, bien sûr les zéros sont imaginaires, comme le square de ceci, et le multiplier par deux, ok, et ce que vous trouvez est vraiment un bon match, et vous voyez, c'est comme si la valeur eigen de n correspondait au zéro de n, ce n'est pas que je change l'indexation, et quand vous dessinez le graphique, donc ça va assez loin, ça va très loin, quand vous dessinez le graphique, vous trouvez que, vous savez, donc en bleu, vous avez les valeurs eigen pour l'opérateur, en rouge, vous avez les zéros de zeta, donc vous trouvez qu'ils se matchent assez remarquablement bien, ok, et donc même si vous allez assez loin, mais nous savons qu'ils ont le même comportement asymptotique, donc c'est assez bien, et je veux dire, donc cela conduit, si vous voulez, à la question suivante, qui est au centre de notre livre gagnant avec Ghonsani et Moscovici, qui est comment combiner l'infrarouge avec l'ultraviolet, et trouver, si vous voulez, quel est l'analogue de l'opérateur de la vague prolate dans le cas semi-local, donc dans ce livre, nous trouvons un analogue parfait de cet opérateur de la vague prolate, il ne peut pas être le meilleur, nous ne le savons pas, les computations deviennent beaucoup plus difficiles, mais si vous voulez, ce que je veux terminer mon discours avec, c'est que ce comportement d'ultraviolet révèle la géométrie sous-alignée derrière la fonction de Riemann zeta qui vient du dirac opérateur, et encore une fois, c'est un triple spectaculaire, mais maintenant c'est un triple spectaculaire pour l'ultraviolet, ok, et ce que vous découvrez de ce triple spectaculaire est ce qu'est la métrique, donc vous trouvez que la métrique est d'une forme très étrange, c'est une métrique qui est, si vous voulez, sur la ligne, mais qui est donnée par dx^2 sur x^2 moins lambda^2, donc en particulier, si vous voulez, il y a un changement de signe à lambda, et c'est de la forme 1 sur alpha de x dx^2, maintenant, la meilleure façon d'entendre cette métrique, il apparaît, ok, c'est, comme les physiciens l'appellent, une compactification d'un espace two-dimensionnel de Lorentz avec un temps périodique, et quand vous regardez ce espace two-dimensionnel de Lorentz, je veux dire, le fait qu'il soit de Lorentz est nouveau à ce changement de signe ici, et quand vous regardez cet espace, vous trouvez vraiment quelque chose que je trouve assez éblouissant, c'est-à-dire que vous trouvez qu'il correspond à ce qu'on appelle un rôle noir, et quand vous faites un changement de variables adéquat, vous pouvez vous rendre autour, exactement comme dans la situation du rôle noir, vous pouvez vous rendre autour de la singularité, et vous pouvez même dessiner ce rôle noir, ok, et c'est la lambda, si vous voulez, c'est le lieu où il y a un changement de signe, et c'est parfaitement, si vous voulez, environnement et la rotation, c'est pourquoi vous pouvez réduire deux-dimensionnellement ;