À la recherche d'espaces conjugués
Alain Connes

Ilke Angela Maréchal : En mathématiques, la matière, à l'inverse des autres sciences, est exclusivement "matière à pensée". Tout comme le poète, le chercheur s'appuie sur signes et symboles pour extraire d'un "certain rien" quelque chose, pour inventer, jouer avec le langage et des mondes en quête d'existence. Le bois de construction a le caractère de pur "res cogitans".

Alain Connes : La plupart des sciences, de la physique nucléaire à la géologie, ont pour objet d'étude la matière et son organisation à différentes échelles. La réalité mathématique est plus difficile à décrire mais a des propriétés très semblables à la réalité matérielle. Elle résiste, est incontournable et se révèle source inépuisable d'information. Par contre, étant immatérielle, elle n'est pas localisable dans l'espace ou le temps. C'est ce qui la rend à la fois plus difficile à percevoir et, dans les rares cas où l'on a l'impression d'y voir, en fait une source de jubilation par le sentiment d'éternité ou d'atemporalité qui s'en dégage.

Il est vrai qu'un texte mathématique se présente comme une collection de symboles qui ne signifient rien au profane, un peu comme une partition de musique pour un non-musicien. Mais ces textes arides sont, pour le moment, notre seul moyen pour transmettre et faire avancer nos connaissances. En géométrie il devient de plus en plus possible, grâce aux progrès des moyens informatiques, d'illustrer, par des dessins ou des films, telle ou telle notion ou même une démonstration. Ceci est plus difficile pour l'algèbre, qui, comme le disait Hamilton, s'inscrit dans le temps beaucoup plus que dans l'espace.

De toute façon, de telles illustrations ne remplacent pas l'image mentale toujours plus pure et dépouillée. Il m'est impossible d'utiliser une notion ou un concept mathématique dont je n'ai pas de représentation mentale. Je peux connaître une notion, je pourrais même, peut-être, en donner une définition précise, mais, si elle n'est pas reliée à une représentation mentale, elle devient plus une gêne qu'un outil.

En géométrie, la représentation mentale est souvent construite autour de la perception visuelle. En algèbre, je pense qu'elle est de nature plus linguistique et musicale, c'est-à-dire très proche des ingrédients du poétique. Je m'explique, la nature symbolique des calculs algébriques rend évident le rapprochement avec l'aire du langage. Si je parle de plus de musique, c'est que la représentation mentale liée à l'algèbre a besoin précisément de s'inscrire dans le temps, dans la durée. Par exemple, quand on effectue un long calcul algébrique, la durée nécessaire est souvent très propice à l'élaboration dans le cerveau de la représentation mentale des concepts utilisés. C'est pourquoi l'ordinateur, qui donne le résultat

Extrait de *Sciences et imaginaire* sous la direction d'Ilke Angela Maréchal, éds. Bibliothèque Albin Michel Sciences, 1994.

d'un tel calcul en supprimant la durée, n'est pas nécessairement un progrès. On croit gagner du temps, mais le résultat brut d'un calcul sans la représentation mentale de sa signification n'est pas un progrès.

Ainsi, pour moi, la représentation mentale algébrique a les mêmes ingrédients, à la fois linguistique et musique, que la poésie. Je n'essaierai pas de pousser l'analogie plus loin mais cela me conduit à parler du rôle de l'imaginaire (au sens usuel, non mathématique, du terme) dans l'acte de recherche du mathématicien. Bien entendu, comme je l'ai dit plus haut, la seule valeur transmissible sûre, c'est le texte aride dont nous parlions. Il ne s'agit en rien de mélanger le rationnel, condition sine qua non de toute science, avec de l'irrationnel. Ce que je tiens à discuter, c'est le rôle de l'imaginaire individuel dans le processus mental qui libère l'esprit des contraintes ou des a priori et lui permet de franchir un saut qualitatif. Je parle d'une situation dans laquelle, face à un problème posé, une démarche complètement rationnelle a abouti à une impasse, faute d'imagination. Pour débloquer une telle situation, il semble nécessaire de faire intervenir d'autres aires du cerveau que celles du fonctionnement purement rationnel, en particulier de pouvoir associer les objets mathématiques étudiés avec des aires *a priori* très éloignées qui impliquent l'éducation artistique par exemple.

De telles associations n'ont, je pense, aucune valeur absolue autre que de mettre en route d'autres parties du cerveau. Il est amusant de constater que ces associations peuvent être tout à fait inconscientes et ne se manifester que dans le temps de sommeil liminaire où une chaise devient un espace de Hilbert sans que la sonnette d'alarme de l'asile d'aliénés se manifeste. D'ailleurs, la seule "recette" que je connaisse pour mettre en route mon imaginaire est de m'allonger dans l'obscurité et de naviguer, tout en restant éveillé, au plus près possible de ce sommeil liminaire. Un mathématicien bien connu, auquel on demandait quelle était la plus grande difficulté en mathématique, répondait : "Pour moi le plus difficile est de convaincre ma femme que le moment où je travaille le plus, c'est quand je suis allongé dans l'obscurité avec les jambes en l'air.".

Ilke Angela Maréchal : Cette "procédure" en mathématique va tout à fait de pair avec cette démarche de poète dont, sur la porte fermée de sa chambre, un écriteau indique : "Ne pas déranger, le poète travaille quand il dort !". Peut-être pourrait-on voir ici une liaison entre imaginaire et mystère ?

Alain Connes : Dans certains cas, je dirais qu'il est plus important de percevoir le potentiel d'un résultat mathématique, d'une formule ou d'une notion que d'en comprendre ou connaître la démonstration. Quand j'étais élève à l'École normale supérieure, je me souviens, ayant feuilleté par hasard les œuvres complètes de von Neumann, d'avoir été fasciné par la notion de "dimension continue". Je ne comprenais absolument pas le détail des démonstrations, mais le caractère mystérieux et puissant de cette notion déclenchait en moi un appel irrésistible. J'ai eu, plus tard, une expérience semblable à propos de la théorie de Tomita. Mon attitude dans ces cas-là consiste à ne pas du tout me presser pour comprendre les démonstrations. Car une fois cette compréhension acquise, le mystère disparaît et le potentiel d'imaginaire très lié à la créatitivité disparaît lui aussi. À l'inverse j'essaie de m'appuyer sur ces résultats pour résoudre d'autres problèmes en utilisant leur charge intuitive, leur potentiel créateur.

Ilke Angela Maréchal : Ceux qui sont aux prises avec une activité de création connaissent bien ces instants et ces forces. C'est un peu comme si le résultat visé, bien qu'"inconnu encore" et "sans forme", avait une telle force d'appel que le mystère et l'imaginaire doivent lâcher du lest devant le potentiel intuitif qui met en branle le mécanisme purement créatif. Pourriez-vous donner un exemple concret de ce potentiel créateur que recèle l'imaginaire des mathématiciens ?

Alain Connes : Je vais essayer de décrire deux exemples de structures mathématiques non encore élucidées, pas encore bien comprises, dont on aurait tort de vouloir donner une mise en forme prématurément. Le jour où elles seront élucidées et comprises, où l'on aura le paysage vraiment devant les yeux, leur aspect mystérieux et imaginaire aura disparu. Le pouvoir suggestif de l'imaginaire consiste précisément à ressentir, par l'intuition, l'existence de ces structures sans pour autant pouvoir les définir avec précision. Il est clair que l'essai de description auquel je vais me livrer ne fait pas partie de l'activité admise du mathématicien et que l'on ne saurait y attacher qu'une valeur heuristique.

Mon premier exemple provient de la théorie des nombres. L'un des problèmes essentiels de cette théorie est de comprendre l'ordre sous-jacent à la suite des nombres premiers 2, 3, 5, 7, 11... L'on pense que cette compréhension proviendra de celle d'un espace géométrique X, appelé le *site arithmétique*, et dont naïvement l'ensemble des points est la suite ci-dessus à laquelle on rajoute un point $\{\infty\}$. L'on connaît toutes sortes de propriétés que doit posséder cet espace géométrique, avant tout il doit être doté d'un semi-groupe de correspondances Fr_s, pour s réel et positif qui joue le rôle des correspondances de Frobenius. De plus les valeurs propres de l'action de F sur la cohomologie $H^f(X)$ devraient être intimement reliées aux zéros de la fonction zeta de Riemann. De même l'on pense que l'analogue des "diviseurs" sur espace produit $X \times X$ doit impliquer les dimensions continues dont je parlais plus haut. L'on pourrait énumérer bien d'autres propriétés de cet hypothétique espace géométrique X. Pour le moment il fait partie de l'imaginaire des mathématiciens. Les raisons qui motivent sa considération sont, d'une part, l'analogie avec d'autres situations, plus simples mais voisines sur le plan conceptuel, d'autre part, la difficulté à démontrer par les outils classiques de la théorie analytique des nombres l'hypothèse formulée par Riemann sur la répartition des nombres premiers. L'analogue de cette hypothèse a été démontré dans les cas les plus simples et le rôle de l'analogue de l'espace X y est crucial. Si l'on essaie de forcer les choses et de formuler prématurément la structure du site arithmétique X, on aboutit assez vite à des absurdités comme l'égalité $X = X \times X$, etc. Il s'agit d'un bon exemple où l'imaginaire à un rôle important, celui de donner un cadre qui permet de ne pas s'encombrer des difficultés techniques quotidiennes et d'essayer de deviner progressivement la structure inconnue. Il est clair que ce processus d'élaboration concerne de près l'intuition, l'esthétique, et présuppose une harmonie préétablie, par opposition à une démarche complètement rationnelle qui va se tarir assez vite.

Je pense que cet exemple du site arithmétique X est d'autant plus remarquable qu'il fait partie de l'imaginaire commun des mathématiciens et qu'il existe sans qu'il soit nécessairement documenté par des articles.

Mon second exemple provient de la physique des particules. La conception usuelle de cette théorie considère que les particules élémentaires (quarks et leptons) sont des éléments indivisibles de la matière (atomos), lesquels sont localisés dans l'espace géométrique Y de la physique. Mes réflexions sur cette théorie, et des calculs compliqués sur le Modèle Standard [*], m'ont conduit à une opinion différente que je formulerai ainsi : *"La géométrie de l'espace physique Y est spécifiée par la théorie des champs."*.

Cet énoncé peut paraître inopérant, il devient en fait très efficace à condition d'avoir le cadre mathématique conceptuel pour le comprendre. J'ai travaillé depuis quinze ans sur une adaptation de la géométrie de Gauss et de Riemann qui permet d'exploiter l'énoncé ci-dessus ; en particulier le Modèle Standard dévoile alors la structure fine de l'espace Y à l'échelle de 10^{-16} cm qui correspond aux énergies actuellement accessibles dans ces énormes microscopes que sont les accélérateurs de particules comme celui du CERN. La structure obtenue n'est ni continue ni discrète mais un produit de ces deux cas extrêmes. L'espace Y apparaît comme superposition de deux couches Y_L, Y_R d'orientations opposées et les forces d'interaction comme le boson de Higgs apparaissent simplement dans l'électrodynamique de cet espace plus complexe. Cependant, cette théorie est pour le moment limitée car elle ne comprend que le lagrangien sans incorporer la théorie pleinement quantifiée. C'est là à nouveau que je considère comme essentiel le rôle de l'imaginaire. Il consiste à attribuer une valeur de principe à l'énoncé ci-dessus. Après tout, c'est seulement dans les accélérateurs de particules que l'on teste la géométrie de l'espace physique avec cette précision. L'on peut alors, comme plus haut pour le site arithmétique, spécifier de nombreux traits de la géométrie cherchée. L'un d'entre eux est que l'espace Y est perçu par son "exponentielle" et non pas (ce qui correspondait au lagrangien) comme un espace à une particule.

Ces deux espaces, le site arithmétique X et l'espace de la physique Y sont bien entendu des motivations essentielles pour aller au-delà du cadre classique de la géométrie.

Ilke Angela Maréchal : Ces fruits de l'imaginaire créatif, les images, les concepts, les idées, les théorèmes, les poèmes, ont-ils une existence propre où ne seraient-ils que des intermédiaires, des langages, comme par exemple von Neumann l'affirme en ce qui concerne les mathématiques ?

Alain Connes : Il est vrai que, d'une part, les mathématiques servent à formuler les choses en langage, à modéliser les phénomènes. Lorsqu'on écrit une phrase mathématique, elle à un contenu par rapport à son domaine par un mécanisme de traduction, mais il y a autre chose dans les mathématiques qui n'est

∗. Actuellement la théorie la plus fondamentale, qui intègre trois des quatre interactions de base : la faible, l'électromagnétique et la forte.

absolument pas réductible au langage, une sorte de réalité archaïque. Elle à les mêmes traits que la réalité extérieure : elle est a priori non organisée.

Ilke Angela Maréchal : Pourrait-on dire prélinguistique ?

Alain Connes : Je dirais plutôt préconceptuelle. La réalité mathématique brute a une nature inductive. L'activité du mathématicien la comprend de manière projective.

Ilke Angela Maréchal : Si je comprends bien, les mathématiques ont bien une nature double : d'une part, elles gardent leur nature propre, d'autre part, elles servent d'outils à elles-mêmes et aux autres ?

Alain Connes : Il est vrai qu'en physique quantique, par exemple, pour décrire les phénomènes, les mathématiques servent d'outils adéquats là où le langage courant n'est pas du tout performant et induit en erreur parce que les mots s'avèrent ambigus. À cause du conditionnement venant de la physique classique, on attribue, par exemple, en physique quantique, à un électron une position et une vitesse alors que cela n'a pas de sens véritable. C'est uniquement une question de langage. Je crois que peut-être d'ici cinquante ans, lorsque les physiciens auront trouvé le bon langage, ils cesseront de parler de la position ou de la vitesse d'une particule quand ils feront un cours de mécanique quantique.

Ilke Angela Maréchal : Le mathématicien partage la revendication du poète ?! Je pense à Rimbaud : tout le problème est de "trouver la langue" !

Alain Connes : À ce propos, je n'exclus pas du tout d'ailleurs que la poésie ait un rôle à jouer dans ce genre de choses, car n'est-elle pas une exploration des limites, des bornes, du langage ? On voit bien qu'elle arrive par des assemblages de mots à suggérer une idée nouvelle. Comme une mosaïque, dont aucun élément n'est nouveau, mais bien la mosaïque en elle-même, capable de traduire quelque chose qui a été perçu mais ne peut s'exprimer en des mots ordinaires.

Ilke Angela Maréchal : Pourrait-on dire qu'avec un effort plus grand pour une vulgarisation des sciences le problème serait à résoudre ? Donner à voir au grand public, proposer à l'imaginaire collectif ce qui se cache derrière les formules et leurs ballets ésotériques ?

Alain Connes : Oui, tout à fait. Il faudrait retraduire les formules en mots, encore faudrait-il que le public arrive à concevoir ce qu'il y a derrière tel ou tel mot. Par exemple, en japonais existe un mot qui veut dire "feuilletage" mais dont le kanji, le caractère japonais, indique clairement qu'il s'agit d'un ensemble de feuilles, ce que ne dit pas le mot français.

Ilke Angela Maréchal : Un ensemble de feuilles, comme vos deux espaces superposés. Il faut donc des mots, une unité multiple, d'une part, univoques et, d'autre part, englobant en eux-mêmes un sens complexe.

Alain Connes : Oui, mais ce seront des mots empruntés aux mathématiques et qui ne seront plus ambigus. L'on doit s'assurer de l'existence d'un modèle mathématique précis, comme il y en a pour la mécanique quantique, condition nécessaire pour faire usage dans le langage courant des mots qui étiquettent ce modèle et qui ont un sens précis. La physique du XVIII^{e} siècle nous a habitués aux notions comme énergie, position, vitesse, etc., et nous, au XX^{e} siècle, utilisons ces mots comme des mots courants. Je pense qu'au XXI^{e} siècle on utilisera des mots qui seront des mots sophistiqués de la mathématique comme par exemple "fonction d'onde". Ce qui enlèvera complètement l'ambiguïté apparente de certains résultats de physique expérimentale.

Je suis persuadé que l'homme s'habituera très bien à ces mots et les intégrera dans le langage courant en faisant finalement sien le concept correspondant. Prenons, en physique quantique, la notion de *fonction*. Je m'explique : lorsqu'on a découvert l'imprimerie, enfin a pu être transmise la notion de *nombre*, car elle pouvait dès lors se propager très facilement. Aujourd'hui, grâce à l'ordinateur on peut transmettre une *courbe*, des graphiques précis. On va atteindre une nouvelle étape dans laquelle la fonction (le graphe, le dessin) deviendra aussi palpable dans le langage courant que le nombre. Et la fonction d'onde, cruciale en mécanique quantique, deviendra aussi tangible que la vitesse qui est un nombre ! Le pas nouveau de la physique quantique, la fonction d'onde, est un graphe ! Donc, il y a le même pas à franchir, pour le commun des mortels, analogue à celui franchi à l'apparition de l'imprimerie pour les nombres. Quand ce pas sera franchi, on pourra parler non plus de la vitesse, ni de la position d'un électron, mais de sa fonction d'onde.

Ilke Angela Maréchal : Il n'y aura plus d'équivoque, le problème aura été dépassé ?

Alain Connes : Oui, mais le pas conceptuel à franchir est énorme. Il ne s'agit pas d'inventer un nouveau mot que seul les gens d'une certaine caste comprendront, comme actuellement pour la fonction d'onde. Il importe que le grand public puisse digérer cette notion de fonction d'onde pour ne plus concevoir la physique quantique avec les outils de la physique macroscopique.

Ilke Angela Maréchal : En fait, une histoire d'évolution... cela peut prendre du temps. L'ordinateur peut-il y jouer un rôle ?

Alain Connes : L'ère des ordinateurs a l'énorme avantage de rendre la notion de graphique, de fonction, transmissible par l'écriture (de l'ordinateur) et de la transformer en une notion du même niveau que la notion de nombre. Il participe ainsi, en tant qu'outil, à une amélioration du fonctionnement cérébral. Qu'est-ce que cela veut dire ? Il est un fait que le calcul différentiel, découvert par Newton et Leibniz, est aujourd'hui appris par les élèves de seconde ou de première comme allant de soi. En deux, trois siècles, des notions compliquées ont été digérées par notre civilisation. Je pense que de manière analogue, un enfant, éduqué en 2200 par exemple, tout comme nos enfants apprennent à sept ou huit ans à manipuler les nombres, va savoir manipuler les fonctions, les dérivées, etc. Cela ne voudra pas dire que le cerveau se sera amélioré depuis, mais que le programme introduit dans leur cerveau sera meilleur et plus performant. À cette évolution, beaucoup de choses devront participer et je pense que l'art ne doit pas rester indifférent. Et vice versa : pourquoi ne pas trouver une équation pour les coups de crayons de Picasso ? L'orteil du Minotaure - voilà une courbe qui a des caractéristiques, une idée transformée en courbe dont on perçoit parfaitement la pertinence ! Voilà le prototype de questions qu'on pourra poser à ceux qui essaieront de comprendre l'art de manière différente. Cela pourra se faire avec les fonctions analytiques tracées par ordinateur. Car, tout comme les nombres l'ont fait jadis, les formes et les courbes passeront dans le grand public.

Ilke Angela Maréchal : En dehors de l'attrait des secrets des artistes, quel peut être le défi pour un chercheur en mathématique aujourd'hui ?

Alain Connes : Encore et toujours la géométrie : “Quelle est la nature des espaces X et Y décrits ci-dessus ?”

Ilke Angela Maréchal : Vous venez de parler de fonctions analytiques tracées par ordinateur pour surprendre un “secret” de l'artiste. Peut-être puis-je inverser la direction et dire : il se peut que, pour approcher le secret de la nature des espaces X et Y, il faudrait beaucoup d'intuition, à la manière de l'Indien Ramanujan, un des plus brillants mathématiciens, qui dans la théorie des nombres parvenait à établir ses théorèmes par une pure intuition.

Alain Connes : Et qui formait avec l'Anglais Hardy un couple idéal : l'un, gouverné purement par des intuitions extraordinaires, l'autre doté d'une technique remarquable. De toute façon, quels que soient les procédés employés, Paul Valéry, dans son admirable texte “Au sujet d'*Eureka*”, expose l'enjeu clairement :

> *Mais c'est la gloire de l'homme que de pouvoir se dépenser dans le vide ; ce n'est pas seulement sa gloire. Les recherches insensées sont parentes de découvertes imprévues. Le rôle de l'inexistant existe ; la fonction de l'imaginaire est réelle ; et la logique pure nous enseigne que* le faux implique le vrai. *Il semble donc que l'histoire de l'esprit puisse se résumer en ces termes :* il est absurde par ce qu'il cherche, il est grand par ce qu'il trouve.