Correction (autant que faire se peut) de la transcription Turboscribe de la Conférence Springer "Meilleur article des Annales d'Analyse fonctionnelle 2025" d'Alain Connes (Denise Vella-Chemla, septembre 2025).

Ping Wu : Bonjour à tous, et bienvenue à Springer Nature. Merci beaucoup d'être venu nous rejoindre pour le webinaire de la récompense de l'année 2025 pour le meilleur article d'Analyse Functionnelle publié dans notre journal *Annals of functional analysis*. Nous sommes très excités de célébrer la deuxième année de cette tradition annuelle, où nous reconnaissons et partageons des recherches exceptionnelles avec notre communauté.

Et un grand merci spécial au Professeur Alain Connes d'avoir accepté de donner cette présentation cette année. Nous sommes vraiment honorés de vous avoir avec nous. Arpès cela, je suis heureuse de passer la parole à notre éditeur en chef, Professeur Mohammad Sal Moslehian, qui va présenter le Professeur Connes.

Mohammad Sal Moslehian : Bonjour à tous. Je suis honoré de présenter le Professeur Alain Connes, le gagnant (avec Caterina Consani et Henri Moscovici) pour l'article d'Analyse Functionnelle de l'année 2025. Il a récemment accepté notre invitation pour présenter un exposé des webinaires de Springer sous la supervision de Ping Wu.

Alain Connes est si renommé qu'aucune description de son travail ne lui rendrait assez justice. S'il vous plaît, rejoignez-moi en accueillant Professeur Alain Connes. Alain, s'il vous plaît.

Alain Connes : Merci beaucoup, Professeur Moslehian, de m'avoir invité et de m'avoir donné l'occasion de présenter cet exposé. J'espère pouvoir décrire notre motivation et nos résultats plus récents. L'article est le fruit d'un travail conjoint avec Katia Consani et Henri Moscovici.

Si vous voulez, l'origine de tout ça, c'est un article de Bernhard Riemann, que Bernard Riemann a écrit en 1859. Ce que Bernhard Riemann a fait était absolument incroyable, par exemple, en ce qui concerne l'influence que son article a eu sur les mathématiques. De nombreuses façons, ce que l'on peut dire, c'est qu'une grande proportion des mathématiques depuis 165 ans, depuis l'article de Riemann, même si ce n'est pas explicite, a été, si vous voulez, obsédée par le désir de prouver une remarque qu'il a faite en passant dans son article, et qui est que la plupart du temps, les zéros de la fonction ζ, je veux dire, les zéros non triviaux, bien sûr, sont sur la droite critique, qui est la droite des nombres complexes de partie réelle 0.5. Donc, je veux dire, son article est très court, il a quelque chose comme 10 pages, et dans son article, vous pouvez voir que le but est atteint, et le but était d'obtenir une formule pour le nombre de nombre premiers qui sont inférieurs au nombre x. Et donc, ce que Riemann fait, d'abord, il définit une fonction de laquelle la fonction de comptage des nombres premiers peut être facilement déduite en utilisant la fonction de Moebius, mais cette fonction $f(x)$ est un peu plus simple, et je veux dire, elle est obtenue en prenant la fonction de comptage des nombres premiers $\pi(x)$, mais en la prenant sur les racines de ζ. Et bien sûr, après un très court temps, ce que vous trouvez, c'est que les racines sont plus petites que 2, donc la somme est bien sûr finie.

Donc, ce que Riemann prouve dans son article, c'est une formule pour cette fonction, et cette formule est compliquée, et elle est souvent mal comprise, alors je veux passer un peu de temps sur ce sujet. Et la raison pour laquelle c'est compliqué, c'est que, eh bien, d'abord, il y a la fonction de logarithme intégral, que vous pouvez voir ici, qui est le terme principal, et qui était connu de Gauss pour approximer, si vous voulez, la fonction de comptage des nombres premiers, bien mieux que la fonction qui est utilisée dans le théorème des nombres premiers [1]. Mais ensuite, il y a une expression très confuse dans la formule de Riemann, et le point est, si vous voulez, cette seconde somme ici, qui est la somme des logarithmes intégraux sur la droite critique et élevés à une certaine puissance.

Maintenant, la raison pour laquelle c'est très confus, c'est que Riemann était le maître des fonctions analytiques complexes multivaluées. Et dans son article, il est extrêmement prudent en expliquant ce qu'il signifie par les logarithmes intégraux sur la droite critique. Et si vous regardez les livres, même le livre d'Edwards [2], vous trouverez que cette formule est écrite sans s'en préoccuper, parce que ce qui est très facile à comprendre, c'est qu'à la manière dont on l'écrit en langage moderne, la formule n'a pas de sens. Et elle n'a pas de sens parce que les solutions de l'équation ici seront densément concentrées, si vous voulez, sur un cercle de rayon $\sqrt{x}$. Et donc, je veux dire, il n'y a aucune fonction pour laquelle cette série sera convergente, et même conditionnellement convergente. Maintenant, Riemann était extrêmement prudent, et après le livre de Riemann, il y a eu une preuve par von Mangoldt de sa formule, dans laquelle von Mangoldt était lui-aussi extrêmement prudent, et il expliquait que ce n'est pas une fonction de x, mais que c'est une fonction de $\log x$. Et donc, von Mangoldt était très prudent, beaucoup de gens ont été très prudents, mais étrangement, il y a eu cette tradition de continuer à écrire la formule comme Riemann l'écrivait. Et je veux dire, l'on peut très facilement tomber dans le piège de ne pas comprendre la formule à cause de ça.

Donc dans cette formule, bien sûr, les racines sont les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann, et il y a un reste qui est facile à comprendre. Mais cette formule, par Riemann, est vraiment le prototype d'une formule plus générale, où au lieu de s'intéresser seulement au nombre de nombres premiers inférieurs à x, on prend une fonction de test arbitraire, et on obtient ce qu'on appelle les sommes de Riemann, il y a Guinand [3] qui s'est aussi intéressé à ce genre de formule, les formules explicites. Ces formules explicites sont de la forme suivante, vous avez une fonction de test, f, qui est définie sur le groupe multiplicatif des nombres réels positifs, et vous prenez sa transformée de Fourier, et vous évaluez cette transformée de Fourier en les deux points que sont $\frac{i}{2}$ et $-\frac{i}{2}$, mais vous l'évaluez aussi sur les zéros non triviaux de la fonction ζ de Riemann, à un changement trivial des variables près.

Et ce que vous trouvez, c'est que ceci est donné, comme dans le cas de Riemann, par une somme, et cette somme est sur ce qu'on appelle les *places* du domaine des nombres rationnels. Cela inclut donc tous les nombres premiers, et cela inclut aussi ce qu'on appelle la place archimédienne, qui est responsable d'un terme comme celui qui est ici, en fait, dans la formule de Riemann. Donc c'est une généralisation de la formule de Riemann, mais ce qui est extrêmement important, c'est que si vous voulez, à partir de cette formule explicite, Weil définit une forme quadratique sur des fonctions dont le support est, bien sûr, à l'intérieur de $\mathbb{R}$ plus $\mathbb{R}$, mais dont le support est compact.

[1] qui est $\frac{1}{\ln x}$ plutôt que $\int \frac{1}{\ln x}$

[2] Livre *Riemann's zeta function*, d'Harold M. Edwards, 1974, Dover éditions.

[3] A. P. Guinand, *Some Fourier transforms in prime number theory*, Quart. J. Math., Oxford. 18 (1947), 53-64

Et donc c'est entre, si vous voulez, $\frac{1}{\lambda}$ et λ, où λ est un nombre qui est strictement plus grand que 1. Donc, je veux dire, cette forme quadratique a l'avantage que, d'abord, si vous voulez, c'est plus ou moins évident, mais cela prend du temps de le prouver en détail, que la positivité de cette forme quadratique est équivalente à l'hypothèse de Riemann. Et en fait, ce que Weil a montré, c'est que parce qu'il y a un signe moins dans la formule explicite avant la somme sur les zéros, il faut mettre un signe moins ici si l'on veut évaluer cette quantité. Et cela signifie, en fait, que l'hypothèse de Riemann est équivalente à la négativité, avec le signe inverse (supérieur au lieu d'inférieur), de la somme de l'évaluation de la convolution du carré de la fonction d'évaluation aux différentes places.

Maintenant, ce qui est assez fort, et en fait, nous avons commencé notre article commun avec Katia Consani et Henri Moscovici par ce point, c'est que cet équivalent de l'hypothèse de Riemann est très surprenant dans le sens où beaucoup de gens pensent, je veux dire, c'est l'opinion la plus partagée, que la difficulté de l'hypothèse de Riemann est liée à l'infinité des nombres premiers. Mais le critère de Weil, qui est écrit ici, vous montre que ce n'est pas le cas, dans le sens où, en fait, l'hypothèse de Riemann (*souvent notée RH*) est équivalente à une assertion dans laquelle n'interviennent qu'un nombre fini de nombres premiers à la fois finalement. Et c'est extrêmement important parce que cette assertion n'est pas une assertion arbitraire, c'est une assertion conceptuelle sur la positivité, bien sûr, je veux dire, à un changement de signe trivial, d'une forme quadratique.

Mon intérêt dans ce problème a commencé il y a longtemps, quand en 1996, en fait, j'ai réalisé qu'il y avait un espace non commutatif qui permettait de comprendre les zéros de la fonction ζ de Riemann comme les valeurs propres d'un spectre d'absorption. Je dois vous rappeler un peu de physique, notamment ce qu'est un spectre d'absorption. Et la raison pour laquelle c'est un spectre d'absorption vient du signe moins qui est ici. En physique, si vous voulez, le spectre d'absorption, et la notion de spectre en général, ont été découverts par une succession d'énormes découvertes.

La première découverte a été que quand Newton a décomposé la lumière à travers un prisme et a regardé les différentes ondes qui étaient présentes, il s'est rendu compte que, bien sûr, vous trouvez une image de type spectral, mais après Newton, ce que Fraunhofer, qui était un opticien, a découvert, c'est que dans la lumière venant du soleil, il y avait des lignes sombres et la première fois, certainement, Fraunhofer a pensé que son instrument était sale, mais il a essayé différents instruments, et il a en fait découvert ces lignes sombres qui sont appelées lignes d'absorption. Fraunhofer a découvert au début du XIXe siècle environ 500 d'entre elles. Ce qui s'est passé ensuite, c'est que des chimistes comme Bunsen et Kirchhoff ont pu reproduire certaines de ces lignes grâce au spectre d'émission.

Par exemple, les lignes d'absorption les plus visibles dans la lumière du soleil sont celles du sodium, et quand ces chimistes ont chauffé du sodium, ils ont découvert qu'il produisait un spectre d'émission et ce spectre d'émission était exactement au même endroit dans la lumière, si vous voulez, que les lignes sombres. Il y a maintenant un événement très intéressant qui s'est produit, et qui est que les chimistes ont pu reproduire la plupart des lignes d'absorption venant du soleil, sauf qu'ils n'ont jamais pu reproduire quelques-unes d'entre elles, et puis ils se sont demandés pourquoi ils ne pouvaient pas reproduire ces lignes, ils ont conjecturé que ces lignes venaient d'un élément chimique qui n'était pas connu sur la Terre. Et parce que c'était, si vous voulez, les lignes d'absorption du soleil, ils ont appelé cet élément inconnu l'hélium.

Et le miracle qui s'est produit c'est qu'à la fin du XIXe siècle, il y a eu une éruption du Vésuve et les gens ont eu l'idée de faire l'analyse spectrale de la lave et ils ont été étonnés de trouver qu'il y avait de l'hélium dans la lave. Donc, je veux dire, depuis longtemps, j'avais cette interprétation spectrale à travers un spectre d'absorption, et ces dernières années, dans le travail conjoint avec Katia Consani, nous avons ajouté l'idée d'appliquer, si vous voulez, la technique qui est à l'origine de l'invention de la photographie. Donc, cette technique qui est à l'origine de l'invention de la photographie est assez incroyable.

Elle est due à un Anglais qui s'appelle William Henry Fox Talbot et cet Anglais avait eu l'idée suivante incroyable. Vous voyez, quand les gens faisaient de la photographie avant lui, ce qu'ils obtenaient, c'était comme un spectre d'absorption. Ils obtenaient le négatif de l'image véritable.

Donc, ils obtenaient quelque chose comme ce qu'il y a à gauche ici, où, si vous voulez, ce qui est normalement sombre apparaît blanc ou apparaît comme de la lumière, et ce qui est normalement lumineux apparaît sombre. Et la raison, bien sûr, c'est que, par exemple, quand vous envoyez de la lumière sur de l'argent, la lumière va apparaître en négatif. Donc, l'idée incroyable de Talbot a été de prendre alors une photographie de la photographie.

En faisant cela, bien sûr, il a récupéré l'image d'émission. Un avantage, bien sûr, de sa technique était qu'il pouvait reproduire l'image autant de fois qu'il le voulait. Donc, il pouvait obtenir une fortune à partir d'une seule photo. Il pouvait la vendre de nombreuses fois. Maintenant, avec Katia, nous avons eu exactement la même idée et notre idée était de prendre ce que j'avais trouvé comme un spectre d'absorption et de le soustraire de la lumière blanche. Cela coûte un peu d'efforts mathématiques, d'effectuer ce calcul. Il y a une trace semi-classique et ainsi de suite. Ce qu'il y a derrière, c'est la formule de trace que j'ai obtenue en 1998 qui vous donne un espace non commutatif dans lequel, si vous voulez, les formules explicites deviennent une formule de trace. Qu'est-ce qu'une formule de trace ? Il y a des prototypes de formules de trace comme la formule de trace de Selberg.

C'est une formule dans laquelle, d'un côté, vous avez des données spectrales qui viennent d'un opérateur et de l'autre côté, vous avez des données géométriques qui viennent d'un espace géométrique avec une action, et ainsi de suite. Dans notre cas, dans le cas des formules explicites, ce que j'ai obtenu en 1998, c'était une formule pour la somme des termes que Weil obtient dans ses formules explicites. Mais une somme finie seulement est nécessaire car, comme je l'ai expliqué auparavant, il faut seulement se concentrer sur un nombre fini de nombres premiers à la fois.

Cette somme, qui est très mystérieuse quand on la regarde du point de vue de la géométrie, elle a l'air très mystérieuse car elle concerne les nombres premiers etc., mais malheureusement, il y a un espace très naturel qui est le quotient du produit du corps périodique par le corps des réels divisé par l'action, par la multiplication de ce produit de nombres premiers, qui sont dans un certain nombre de places. Donc, c'est un espace. Je reviendrai sur cet espace un peu plus tard.

Ce qu'on voit ici, c'est un espace extrêmement intéressant car, alors que dans la théorie de la mesure, il est très facile à comprendre, c'est un espace classique, au niveau de la topologie, c'est un espace non commutatif. Donc, en analysant cet espace, ce que nous avons fait, en utilisant l'idée que j'ai expliquée auparavant de transformer le spectre d'absorption en un spectre d'émission, ce que nous avons fait avec Katia Consani, c'est de prouver une formule qui permet de prouver la positivité de cette forme quadratique mais bien sûr, pas en général, car si nous l'avions prouvée en général, nous aurions prouvé l'hypothèse de Riemann. Mais nous avons pu prouver cette positivité pour des fonctions dont le domaine est contenu dans l'intervalle suivant : $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$. Mais l'idée principale était que, en plus de prouver cette positivité, nous en avons fourni une raison conceptuelle et la raison conceptuelle est qu'il y a un espace, il y a un sous-espace de l'espace de Hilbert des fonctions, même des fonctions sur la droite critique, qui joue un rôle clé et cet espace a été découvert par le mathématicien Sonine au XIXe siècle et c'est l'espace très surprenant suivant. Ce que vous faites, c'est que vous prenez, j'appelle l'espace de Sonine S_λ si vous voulez, dans cette formule, vous prenez une projection orthogonale sur cet espace S_λ.

Cet espace, qu'est-ce que c'est ? C'est un espace de fonctions qui sont de carré intégrables, disons, sur la droite et elles ont la propriété qu'elles s'évanouissent dans l'intervalle $[-1, 1]$. *(Il y a une interruption de l'exposé : "Désolé, j'entends quelqu'un parler, s'il y a une question, je peux la prendre, mais sinon... Je ne vous entends pas".).*

Ok, je reviendrai à la forme quadratique de Weil. Et donc en général, ce qui se passe c'est que, vous savez, quand vous restreignez la forme quadratique de Weil pour tester des fonctions dont le domaine est dans un intervalle fixe, comme ce qui a été fait auparavant dans le théorème avec Katia Consani, alors ce qui se passe c'est que vous pouvez prouver, en utilisant la théorie de Nevanlinna, que cette forme quadratique de Weil, si elle est positive, ne peut pas avoir de racine, c'est-à-dire qu'il ne peut pas y avoir, si vous voulez, une fonction qui est telle que la forme quadratique de Weil donne 0 quand vous l'évaluez sur la courbe de convolution de la fonction.

Et maintenant nous avons commencé, avec Consani, à analyser les valeurs propres de cette forme quadratique de Weil, dans un article qui a été publié il y a 3 ou 4 ans, et ce que nous avons trouvé avec l'ordinateur, c'est qu'il y a des valeurs propres qui sont incroyablement proches de 0, elles ne sont pas nulles, elles sont positives, mais quand vous regardez le logarithme de ces valeurs propres les plus petites, ce que vous trouvez, c'est la courbe suivante, et ce qui est écrit ici, c'est le carré de λ, donc si vous voulez, c'est le même x que dans Riemann, et ce que vous trouvez c'est que c'est vraiment incroyable, pour des valeurs très petites de x, la petitesse des valeurs propres est vraiment étonnante. Et donc, je veux dire, vous savez, cela suggère, bien sûr, alors ce que nous voulions faire et ce que nous avons fait dans notre article avec Consani, ça a été d'établir une preuve seulement pour le vecteur propre minimal de la forme quadratique, et bien sûr, pour cela, nous avions besoin de trouver un autre domaine en mathématiques où des nombres minuscules étaient obtenus, et en fait, le domaine a été dicté par la formule de trace que j'avais trouvée en 1998, parce que dans cette formule de traces intervenaient deux projections, que j'ai appelées P_λ et $\widehat{P}_\lambda$, et ces deux projections sont, d'un côté, P_λ est ce qu'on appelle la coupe infrarouge, donc si vous voulez, c'est la projection sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ pour les fonctions, et de l'autre côté, il y a la transformée de Fourier de la projection sur le même intervalle. Comme nous le savons maintenant, si vous voulez, et je reviendrai à cela plus tard, ces deux projections sont exactement celles qui sont impliquées dans la théorie de la communication, notamment dans le travail fondateur de

Claude Shannon, puis dans le travail de Slepian et de ses collaborateurs, et ce que l'on sait d'un raisonnement élémentaire en analyse fonctionnelle, c'est que ces deux projections ne commutent pas.

Il n'y a pas de fonction, même une fonction, disons, sur la droite, qui est une fonction L^2, qui a un support $[-\lambda, \lambda]$, et qui a sa transformée de Fourier qui partagerait la même propriété. Et la raison de cela est que si vous prenez une fonction qui a comme support $[-\lambda, \lambda]$, sa transformée de Fourier est holomorphe, donc elle ne peut pas avoir son support qui est compact. Donc, ces deux projections peuvent être analysées, et elles ont été analysées par Slepian et ses collaborateurs, et ce qu'on trouve, c'est que quand on regarde leur angle, alors leur angle, même si ces fonctions ne commutent pas, leur angle, qui est un opérateur, est très, très, très proche de zéro.

Donc c'est presque comme si elles commutaient. Et quand on regarde les minuscules valeurs de cet angle, ici c'est 1 moins le cosinus, ce que l'on trouve, c'est que l'on trouve le même graphique que pour les minuscules valeurs propres de la forme quadratique. Donc, c'est extrêmement suggestif, et en fait, avec Katia Consani, nous avons été en mesure de les lier par le raisonnement suivant.

D'abord, nous avons utilisé la formule suivante, qui est une formule d'égalité, qui est en fait déjà implicite dans l'article de Riemann. Et puis, en utilisant cette formule, nous avons construit des vecteurs qui ont la propriété que, au moins quand on regarde, avec un ordinateur, ce qui se passe, ce que l'on trouve, c'est que quand on fait le processus d'orthogonalisation de Gram-Schmidt de ces vecteurs, en commençant par les vecteurs prolate venant de la paire de projections, alors on trouve le même graphique, c'est un fait expérimental. Donc, ce que l'on trouve, c'est que l'espace des vecteurs propres pour les valeurs propres de la forme quadratique les plus basses correspond à la projection prolate, qui est la projection sur les premières valeurs propres de l'opérateur prolate.

Bien sûr, ceci se fait à travers une fonction très non triviale, qui est cette fonction. Et donc, ici, je vous montre une image des différents graphes des fonctions, et ces graphes, en fait, faites-y attention, vous avez l'impression que sur les images, il n'y a qu'un seul graphe, mais en fait, c'est parce qu'un des graphes cache l'autre. Et c'est l'argument des fonctions propres de la matrice.

Donc, il y a une matrice et une non-matrice, et comme je l'ai dit auparavant, les valeurs propres sont incroyablement petites. Par exemple, pour μ, qui est le carré de λ, valant environ 11, alors la valeur propre la plus petite est de l'ordre de 10^{-48}, ce qui est vraiment, vraiment, vraiment petit. Donc, dans cette première approche avec Consani, nous avons défini le triplet spectral.

Je vous rappelle que les triplets spectraux sont formés par une algèbre, qui agit sur le deuxième élément du triplet spectral qui est l'espace de Hilbert, et le troisième élément est l'opérateur de Dirac. Et avec ce triplet spectral, nous avons pu, si vous voulez, comprendre les premiers zéros de ζ à l'aide des fonctions prolate, etc. Mais nous n'étions pas vraiment si contents.

Je veux dire, si vous voulez, il y avait ce fait expérimental qui était derrière la scène, puis il y avait beaucoup de théories, beaucoup de trucs expérimentaux qui ont été faits en regardant les valeurs propres de l'opérateur correspondant, et je ne veux pas passer trop de temps sur ça, parce que nous avons trouvé une raison conceptuelle derrière cet accord, si vous voulez. Et la raison conceptuelle est la suivante, il se trouve que la fonction qui était déjà implicite dans l'article de Riemann est en fait la même chose que l'intégration des sommes de Riemann en intégration, et alors on peut définir ce qu'on appelle les sommes de Riemann paramétrées, qui sont simplement obtenues en prenant les sommes de Riemann pour une fonction, et en les faisant varier sous le changement du paramètre μ, et puis nous avons la notion suivante de ζ-cycle. Un ζ-cycle est très simple à définir : c'est un cercle de longueur L, qui est le logarithme de μ.

Et ce que l'on suppose, c'est que les sommes de Riemann ne forment pas un sous-espace dense dans l'espace de Hilbert des fonctions L^2 de ce cercle. Et puis nous avons un théorème. Donc ce théorème n'est plus, si vous voulez, bien sûr, il a été inspiré par des calculs sur ordinateur, mais le théorème est un théorème mathématique.

Et donc ce qu'il dit, c'est que les ζ-cycles correspondent exactement aux zéros critiques de la fonction ζ. Donc si vous prenez un ζ-cycle, alors quand vous prenez l'action du groupe multiplicatif sur le complément orthogonal de ce sous-espace, qui n'est pas dense, alors vous obtenez les parties imaginaires des zéros de la fonction ζ, et à l'inverse, si vous prenez une partie imaginaire d'un zéro de zeta, alors vous obtenez un ζ-cycle. Ok, alors je veux dire, c'était ok, c'était ok, mais il y avait, si vous voulez, plusieurs défauts.

L'un des défauts était que nous n'avions que les zéros critiques, et l'autre défaut était que, si vous voulez, ce n'est pas comme si nous avions obtenu tout de suite un opérateur dont le spectre imitait le spectre bas de la fonction ζ de Riemann, parce qu'on devait changer la valeur de μ pour s'adapter, etc. Donc, c'était satisfaisant, mais ce n'était pas optimal. Et la situation a changé très très très récemment, ok, dans un article qui n'a pas encore été publié, et notre résultat est basé sur le théorème de Caratheodory de 1911 sur les matrices de Toeplitz.

Je veux dire, ce théorème est notre nouvelle inspiration, et ce théorème est assez incroyable parce qu'il vous dit que si vous prenez une matrice de Toeplitz, alors, si vous regardez le vecteur propre correspondant à la plus grande valeur propre ou à la plus petite, si vous voulez, cela n'a pas d'importance, alors quand vous prenez le polynôme associé aux coefficients de ce vecteur propre, il y a un résultat général qui vous dit que toutes les racines de ce polynôme sont sur le cercle unité. La preuve n'est pas très difficile, elle peut avoir lieu dans les C^*-algèbres, et ainsi de suite. Je veux dire, c'est très, très conceptuel.

Et ce que j'ai fait avec mon collabo Walter van Suijlekom c'est d'étendre ce théorème dans une situation où ζ intervient. Et maintenant, si vous voulez, avec Henri Moscovici et Katia Consani, ce que nous avons pu faire, nous avons pu obtenir un triplet spectral pour ζ qui est beaucoup plus simple que celui que j'avais défini avec Consani, et qui réalise maintenant vraiment notre rêve d'obtenir la partie basse des zéros de ζ. Et je veux dire, c'est un triplet spectral incroyablement simple parce que ce sont, si vous voulez, les fonctions sur l'intervalle $[\frac{1}{\lambda}, \lambda]$ où, bien sûr, $\mu = \lambda^2$, vous avez l'espace de Hilbert, c'est l'espace de Hilbert standard, ok, des fonctions simples avec ce produit interne.

Mais maintenant, l'opérateur est l'opérateur de Dirac pour le cercle, comme avant, mais il y a une perturbation. Et alors, ce que l'on fait, c'est qu'on calcule pour chaque λ en utilisant cette formule; on peut, bien sûr, utiliser l'ordinateur. Et quand on calcule la fonction, par exemple, on la calcule pour $\lambda = 3$, et je ne peux pas vous dire de quel côté sont les zéros de Riemann et de quel côté est le spectre de notre opérateur parce qu'ils sont incroyablement proches, OK, après un moment, OK, ils diffèrent, mais, par exemple, pour les 20 premiers zéros, ce sont vraiment les mêmes, OK, et en fait, quand on est allé beaucoup plus loin que $\lambda = 3$, on a obtenu, si vous voulez, un accord qui est beaucoup plus étonnant, par exemple, on a 64 décimales en accord, puis 67, et etc., pour les zéros correspondants. Donc, OK, donc, c'est extrêmement satisfaisant et ce qu'il y a derrière, comme je l'ai dit dès le début, c'est un espace géométrique qui, je veux dire, qui devient de plus en plus compliqué quand vous avez plus de nombres premiers, mais qui peut être très simplement décrit quand vous prenez, par exemple, un seul nombre premier.

Donc, quand vous avez un seul nombre premier, l'espace géométrique que vous obtenez, qu'est-ce que c'est ? C'est, si vous voulez, essentiellement, le quotient des nombres périodiques par $\mathbb{R}$ par les puissances du nombre premier p que vous ajoutez. Donc, je veux dire, c'est un espace qui peut être imaginé comme ça, je veux dire, donc il a un orbite périodique de longueur $\log p$ et bien sûr, cette orbite périodique doit être là à cause de la forme de la formule explicite où vous avez une longueur $\log p$ pour chaque nombre premier p, mais le dessin est le suivant. Le dessin est que vous avez aussi dans cet espace une orbite générique qui est comme un colimaçon qui va diminuant pour que dans sa fermeture, vous ayez cet orbite périodique.

Donc, c'est le dessin correct et quand vous maîtrisez, si vous voulez, la géométrie algébrique et la théorie des nombres et ainsi de suite, vous pouvez être surpris par le fait que ce dessin est exactement le dessin que vous vous attendriez à obtenir pour la densité du point générique dans le spectre de $\mathbb{Z}$ et ce qui se passe, c'est que quand vous regardez plusieurs nombres premiers maintenant, vous savez, deux nombres premiers ou plusieurs nombres premiers et etc., vous trouvez que vous obtenez un dessin similaire mais dans ce dessin, maintenant, l'orbite générique reste comme une orbite pour le point générique mais elle devient dense dans l'orbite périodique pour chaque nombre premier donc ici, j'ai fait un dessin que j'espère être suggestif et qui vous montre ce qui se passe. Et ce que vous découvrez, c'est que si vous travailliez dans la topologie ordinaire, cela n'aurait pas de sens, mais grâce à la géométrie non-computative, cela fait sens et la raison est la suivante la raison est que vous devez penser aux fonctions algébriques correspondantes et dans la géométrie non-commutative, quand vous prenez les matrices algébriques des fonctions n par n, cela suppose le même espace que les fonctions dans l'espace, alors que ce qui se passe ici, c'est qu'individuellement, chaque orbite périodique est obtenue comme la limite de l'orbite générique, mais le fait que l'orbite générique puisse être dense, si vous voulez, puisse être entourée de chacune de ces orbites périodiques vient exactement de la possibilité de le répéter autant de fois qu'il y a de nombres premiers et comme je l'ai dit avant, je veux dire quand vous regardez la topologie du schéma qui est le spectre des entiers, c'est exactement la situation que vous obtenez, vous obtenez une situation qui est entièrement similaire, ok.

Alors dans la seconde partie de mon discours, maintenant, je vais parler du comportement ultraviolet parce que, ok, ce que nous avons vu jusqu'ici, c'est comment vous pouvez obtenir d'une manière très concrète l'image infrarouge de l'espace au-dessous de la fonction ζ de Riemann. Et maintenant, je reviens au comportement ultraviolet. Donc le comportement ultraviolet est, si vous voulez, dominé par l'idée suivante, qui est une conférence bien connue par Mark Kac qui est la question "Peut-on entendre la forme d'un tambour ?". Donc l'idée était la suivante : l'idée était que si vous prenez un espace et que vous ne savez pas de quel espace il s'agit, mais que vous entendez cet espace comme une musique, comme une gamme, comme une échelle, qui est attachée à cet espace par la théorie de Helmholtz, l'idée de Kac était "Peut-on, à partir de cette échelle, de ce spectre, si vous voulez, récupérer certaines propriétés de l'espace ?". Maintenant une propriété que vous pouvez immédiatement retrouver à partir du spectre, c'est la dimension de l'espace, ok, et vous pouvez aussi récupérer l'arrière (?) et la longueur du périmètre de l'expansion de l'espace. Maintenant, quand vous regardez la fonction ζ de Riemann, les choses sont très simples parce que ce que vous découvrez, et je vais vous expliquer les détails de l'expansion de l'espace, ce que vous découvrez, je veux dire, en fait j'ai publié un article correspondant à cela dans ce même journal (*Annals of functional analyse, (Annales d'analyse fonctionnelle), Springer (Birkhäuser)*) que nous célébrons aujourd'hui et quand vous calculez en supposant l'hypothèse de Riemann, quand vous calculez l'expansion asymptotique de l'opérateur auto-adjoint supposé du spectre qui vient de la partie imaginaire de la fonction ζ non inversible (?), vous trouvez la chose suivante : vous trouvez que la trace du noyau de la chaleur commence par un terme qui est très surprenant qui est $\log\frac{1}{T^2}$ (s'il y avait juste $\frac{1}{T^2}$, ce serait comme un cercle, mais ce n'est pas un cercle, parce qu'il y a ce nouveau terme qui est divergent, bien sûr, et qui est $\log\frac{1}{T}$ puis il y a un terme de correction qui implique comme dans la formule explicite le logarithme de 4π, mais dans la formule explicite vous avez $\log 4\pi$ plus la constante ici ; vous avez plus un alpha de la constante sur la racine carrée de T et puis ok c'est un exercice on peut compter tous les termes dans l'expansion donc comme je l'ai dit cela a été publié dans un article il y a environ 2 ans et donc on sait exactement ce que c'est que cette expansion mais ce qu'elle nous dit sur l'espace, c'est très très étrange : elle nous dit que ce n'est pas un cercle à cause de ce logarithme ici donc c'est certainement un espace plus intéressant et plus subtil.

Maintenant, dans mon travail conjoint avec Henri Moscovici, ce que nous avons pu trouver, donc, bien sûr, je veux dire, vous savez, ces termes viennent de la formule de Riemann pour les fonctions de comptage du nombre de zéros de la fonction ζ, c'est plus ou moins une traduction de cela, et ce que nous avons fait, ok, on peut avec un ordinateur dessiner le graphique de cette expansion etc., donc ce n'est pas un problème, mais ce que nous avons fait avec Henri Moscovici, dans notre travail conjoint, c'est de trouver en fait un espace et un opérateur qui ont le même comportement ultraviolet que les zéros de ζ. Donc nous ne notons pas que nous obtenons les zéros de ζ, mais nous notons que nous obtenons en fait exactement les mêmes termes dans l'expansion que ce qui est écrit ici, et je veux dire que ce qui est vraiment, vraiment, vraiment incroyable, c'est que cette découverte fait intervenir exactement les fonctions qui ont été utilisées, par exemple, dans mon travail précédent avec Consani, et donc, si vous voulez, la découverte qui est derrière ça, c'est une découverte qui est liée travail de Slepian et de ses collaborateurs dans la théorie de l'information, et ce qu'ils ont trouvé, et qui est vraiment assez remarquable, c'est que, si vous voulez, je parlais auparavant des deux projections : la projection dans l'infrarouge, vous projetez et q est compris entre $-\lambda$ et λ et dans l'ultraviolet, vous projetez sur l'intervalle tel que p est compris entre $-\lambda$ et λ. Ok, maintenant, vous avez 4 lignes qui sont données, bien sûr, par des équations très simples, et donc ces 4 lignes correspondent aux deux projections qui sont P_λ et $\widehat{P}_\lambda$ que j'ai utilisées et mentionnées de nombreuses fois auparavant dans le travail avec Consani. Mais maintenant, ce que vous pouvez faire, vous pouvez utiliser le produit des 4 lignes et vous obtenez la fonction suivante ;

vous obtenez une expression qui est comme $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$. Maintenant ce que vous faites, c'est que vous pouvez maintenant prendre le flot hamiltonien qui est associé à cette nouvelle fonction, et cela vous donne en fait un flot hamiltonien qui est donné par ce $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$ et ce que Slepian et ses collaborateurs ont trouvé, c'est que cela vous donne ce flot hamiltonien qui correspond à un véritable opérateur, cet opérateur est le suivant, ok. Alors je vais vous expliquer en plus de détails ce qu'est cet opérateur, mais ce qu'ils ont découvert, si vous voulez, c'est que l'opérateur d'onde prolate qui commute en fait dans l'espace et il commute en fait avec le...

Quand nous avons travaillé avec Katia Consani dans les précédentes vidéos, nous utilisions la compression de la mise à l'échelle dans l'espace de Sonine mais il ne commutait pas avec la compression, alors que maintenant, si vous voulez, l'opérateur d'onde prolate commute. Ça vient du travail de Slepian et de ses collaborateurs (Landau, etc.) et entre 1960 et 1965, ils étaient ingénieurs, ils travaillaient aux Bell Labs, et ce qui les préoccupait, c'était l'idée précédente de Claude Shannon, notamment, Claude Shannon cherchait l'idée suivante : c'est très compliqué, vous savez, quand par exemple quand je donne un exposé, je suis limité en temps, ok, mais je suis aussi limité en fréquence. Bien sûr. Alors il y a une fonction, dont les fréquences sont calculées par la transformée de Fourier et comme nous l'avons vu avant, il est impossible que les deux fonctions, la fonction et sa transformée de Fourier, soient à la fois limitées en temps et en fréquence : la transformée de Fourier sera holomorphe, donc elle ne peut pas être limitée en fréquence. Ce qu'ils ont fait, dans plusieurs articles, Slepian, Pollak et Landau aussi, c'est de découvrir qu'un opérateur qui était connu auparavant dans le domaine de la géométrie, qui s'appelle l'opérateur d'onde prolate, avait cette propriété, comme je l'ai dit auparavant, de commuter avec ces deux projections et de vous permettre de calculer l'angle entre les projections P_λ et $\widehat{P}_\lambda$. Donc l'opérateur était connu auparavant, et c'est ce qui lui donne son nom d'opérateur prolate.

Pourquoi prolate ? Parce qu'il correspond, si vous voulez, à un ellipsoïde qui est élongé dans la direction de l'axe de révolution. Et donc, en faisant des calculs élémentaires, quand vous voulez calculer le son de cette surface ellipsoïdale, tridimensionnelle (en enlevant l'intérieur de l'ellipsoïde), ce que vous découvrez, c'est que l'équation de Helmholtz par la séparation des variables et que vous obtenez l'opérateur d'onde prolate, en conséquence de cette séparation des variables, du fait de la séparation des variables, ok, vous obtenez cette commutation avec les projections P_λ et $\widehat{P}_\lambda$, mais cela fonctionne quand vous travaillez dans l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$. Et en 1998, quand j'ai mené des investigations au sujet de cet opérateur, j'ai étudié l'extension de l'opérateur à la droite complète, pour trouver, par exemple, les fonctions des événements sur la droite complète, et ce que j'ai trouvé, c'est que quand vous prenez le domaine minimal, qui est l'espace de Schwartz pour cet opérateur, qui est le domaine fondamental naturel pour l'opérateur, alors l'opérateur est symétrique, mais il n'est pas auto-adjoint, et il a des indices de déficience de Neumann qui sont 4 et 4, mais entre les extensions auto-adjointes, qui existent parce que les indices de déficience sont égaux, il n'y en a qu'une qui commute avec les projections π_λ et $\widehat{\pi}_\lambda$, et cette extension, si vous voulez, commute avec la transformée de Fourier, et maintenant, ce que nous avons découvert dans notre travail conjoint avec Henri Moscovici, c'est que quand on le regarde sur la droite complète, de façon incroyable, l'opérateur auto-adjoint a un spectre discret, c'est incroyable, parce qu'en 1998, je n'ai même pas essayé de calculer le spectre complet, et j'étais convaincu que le spectre était en fait un spectre continu à l'extérieur de l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$, alors qu'en fait, il est discret, et donc, bien sûr, il y a une condition aux limites à l'infini, mais ensuite avec Henri Moscovici, nous avons commencé à calculer cet opérateur, comme le ferait un bon physiciste, notamment nous avons commencé à faire l'approximation semi-classique afin de compter le nombre de ses valeurs propres, ou la fonction de comptage si vous voulez, pour cet opérateur. Donc quand vous regardez l'approximation semi-classique, vous trouvez une image qui vous donne, vous savez, une surface qui ressemble à un hyperboloïde, très bien, mais je veux dire que là où vous êtes, avec $|p| > \lambda$ à cause de ceci et $|q| > \lambda$, donc vous trouvez un genre de quadrant intersecté avec un genre d'hyperboloïde et vous pouvez compter, je veux dire que le calcul n'est pas difficile, mais ensuite vous trouvez quelque chose d'incroyable, vous trouvez les mêmes termes quand vous comptez comme les termes dans la fonction de comptage de Riemann pour le nombre, si vous voulez, des zéros de ζ dans un intervalle, donc guidé par ça, nous avons été assez étonnés et nous avons investi beaucoup plus en détails, donc je veux dire qu'il y a des calculs, mais ils sont relativement simples en termes d'intégrales elliptiques, et donc nous avons précisé cet opérateur avec davantage de détails. Pour cela, vous devez utiliser la transformation qui est liée à Liouville, une grosse quantité des mathématiques dont je parle datent du XIXe siècle. Donc vous utilisez la transformation de Liouville, et ok bien, puis vous pouvez mettre cela une équation du type de l'équation de Schrödinger, et puis on peut utiliser un bon résultat si vous voulez sur la fonction de comptage, ce bon résultat vous donne un moyen de compter le nombre de valeurs propres dans un intervalle fixé, et puis ok, quand vous la calculez dans le cas de la valeur $\lambda = \sqrt{2}$, vous trouvez exactement la même formule que la formule de Riemann, et en fait, donc vous trouvez un terme qui est de l'ordre de $\mathrm{O}(\log E)$, et je veux dire, donc si vous voulez cette formule est très très proche d'une formule, une estimée de Trudgian pour la fonction de comptage de Riemann qui est ici.

Alors qu'est-ce qu'on a fait avec Henri Moscovici, parce que cet opérateur, l'opérateur d'onde prolate, est comme le carré de l'opérateur de Dirac, donc ce qu'on a dû faire, c'est qu'on a dû extraire la racine de cet opérateur, et puis, bien sûr, on a voulu explorer la géométrie correspondante. Maintenant, pour extraire la racine carrée, on utilise la méthode de Darboux, et ce qui est extrêmement intéressant dans l'utilisation de cette méthode de Darboux et que nous devons développer dans le prochain article avec Consani et Moscovici, c'est qu'en fait, il y a une ambiguïté dans le choix de la racine carrée, et cette ambiguïté est en fait une ambiguïté de Galois, qui est liée à la théorie différentielle de Galois de l'opérateur d'onde prolate, donc je veux dire, il y a un développement extrêmement intéressant là. Donc ce que vous faites, c'est que vous résolvez l'équation de Riccati, vous obtenez l'opérateur de Dirac, et donc ce que vous trouvez, c'est que cet opérateur de Dirac a le même comportement. Il y a une chose que je n'aime pas, c'est que nous devons prendre deux fois l'opérateur de Dirac, alors ça, je ne comprends pas pourquoi nous devons le faire, et puis expérimentalement, ce que vous faites, c'est que vous calculez le spectre en prenant l'opérateur de Dirac, et si vous voulez, en prenant la solution qui satisfait les conditions aux limites pour λ, et en essayant de les faire coïncider avec la solution qui satisfait l'équation différentielle, bien sûr l'équation différentielle de valeur propre à l'infini, et donc pour ça, vous les mettez à l'échelle, vous savez, vous manipulez, et quand les courbes coïncident, ou quand elles sont en opposition de phase l'une de l'autre, vous avez une valeur propre, et donc en faisant ça, on peut calculer le spectre, bien sûr d'une façon très grossière, et donc ce que l'on trouve, c'est que, vous savez, les premières valeurs propres négatives approximées pour le carré sont $-39, -94, -152$, etc., et puis pour comparer avec les zéros de zeta, vous devez prendre le carré. Bien sûr, les zéros sont imaginaires, comme le carré de ceci, et multiplier le résultat par deux, ok. Et les résultats que vous trouvez correspondent vraiment bien, et vous voyez, c'est comme si la valeur propre de n correspondait au zéro de n, ce n'est pas que je change l'indexation, et quand vous dessinez le graphe des deux fonctions, donc ça va assez loin, ça va très loin, quand vous dessinez les graphes, vous trouvez que, vous savez, donc en bleu, vous avez les valeurs propres pour l'opérateur, en rouge, vous avez les zéros de zeta, donc vous trouvez qu'ils correspondent les uns avec les autres assez remarquablement bien, ok, et donc même si vous allez assez loin, mais nous savons qu'ils ont le même comportement asymptotique, donc c'est assez bien, et je veux dire, donc cela conduit, si vous voulez, à la question suivante, qui est au centre de notre article qui vient d'être récompensé avec Consani et Moscovici, et qui est "maintenant, comment combiner l'infrarouge avec l'ultraviolet, et trouver, si vous voulez, quel est l'analogue de l'opérateur d'onde prolate dans le cas semi-local, donc dans cet article, nous trouvons un analogue parfait de cet opérateur d'onde prolate, il ne peut pas être le meilleur, nous ne savons pas l'améliorer, les calculs deviendraient beaucoup plus difficiles, mais si vous voulez, la remarque par laquelle je souhaite terminer mon exposé, c'est que ce comportement ultraviolet révèle la géométrie qui se cache derrière la fonction ζ de Riemann qui vient de l'opérateur de Dirac, et encore une fois, c'est un triplet spectral, mais maintenant c'est un triplet spectral pour l'ultraviolet, ok, et ce que vous découvrez à partir de ce nouveau triplet spectral, c'est ce qu'est la métrique, donc vous trouvez que la métrique est d'une forme très étrange, c'est une métrique qui est, si vous voulez, sur la droite, mais qui est donnée par $-\frac{1}{4}\frac{dx^2}{(x^2-\lambda^2)}$, donc en particulier, si vous voulez, il y a un changement de signe pour λ, et c'est de la forme $\frac{1}{\alpha(x)}dx^2$. Maintenant, la meilleure façon de considérer cette métrique, ok, c'est, comme les physiciens l'appellent, une compactification d'un espace 2-dimensionnel de Lorentz avec un temps périodique, et quand vous regardez cet espace 2-dimensionnel de Lorentz, je veux dire, le fait qu'il soit de Lorentz est nouveau à ce changement de signe près ici, et quand vous regardez cet espace, vous trouvez vraiment quelque chose que je trouve assez éblouissant, c'est-à-dire que vous trouvez qu'il correspond à ce qu'on appelle un trou noir, et quand vous faites un changement de variables adéquat, exactement comme dans la situation du trou noir, vous pouvez vous rendre autour de la singularité, et vous pouvez même dessiner ce trou noir, ok, et λ, si vous voulez, c'est le lieu où il y a un changement de signe, et c'est pourquoi vous pouvez effectuer cette réduction deux-dimensionnellement.