

**“Les analystes fonctionnels et les théoriciens des opérateurs célèbrent le 100e
anniversaire d’Acta Sci. Math.”
Alain Connes**

Pour commencer, laissez-moi vous dire qu’il y a longtemps, j’ai écrit un article, c’était en 1977 et cet article a été publié dans Acta. Et je veux dire que pour moi, donc, c’est une excellente occasion de célébrer cet anniversaire, que de revenir à cet article publié en 1977, donc voici le titre de mon exposé: “Opérateur d’onde prolate et zêta”. Donc si vous voulez, la motivation de la théorie des opérateurs est très simple à expliquer, c’est la suivante : vous savez que lorsque vous regardez les zéros de la fonction zêta de Riemann, je veux dire les zéros critiques, d’accord, ils sont un spectre fascinant et je veux dire qu’ils sont un spectre fascinant de quelque chose qui n’est pas comme un laplacien mais comme un opérateur de Dirac, et je veux dire que d’une certaine manière, si vous voulez, ils sont mystérieux à la fois dans l’infrarouge, donc si vous voulez, lorsque vous les regardez pour de petites valeurs de fréquences, vous voyez quelque chose d’extrêmement étrange, cela commence vers 14 et ainsi de suite, et continue sans cesse. Mais ils sont aussi extrêmement mystérieux au niveau ultraviolet et la raison pour laquelle ils sont si mystérieux au niveau ultraviolet, c’est que lorsque vous comptez le nombre de zéros dont la partie imaginaire est comprise entre zéro et E où E est un grand nombre, ce que vous trouvez, c’est quelque chose qui a déjà été, si vous voulez, conçu par Riemann et c’est une expression très étrange parce que je veux dire que si c’était quelque chose comme l’opérateur de Dirac sur un cercle, il serait proportionnel à E comme niveau d’énergie, mais ici, il y a un terme logarithmique donc qui est précisément égal à $\frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi}$, et il y a une correction, $-\frac{E}{2\pi}$ and then there is a logarithmic term $+O(\log E)$.

Maintenant, quand vous pensez géométriquement, et bien sûr, beaucoup de gens ont pensé géométriquement à ce que cela pourrait être, il est très difficile de voir quel type de géométrie pourrait être derrière cela. Et je veux dire, au niveau purement intuitif, et je vais suivre cette intuition, ce qui se passe, c’est que, dans un certain sens, on devrait penser à ces zéros, disons la façon dont je pense à eux, est que, comme vous savez, vous avez un pôle infini. Et je veux dire, il faut prouver que c’est exactement ainsi que cela devrait être. Mais parce que c’est infini, je veux dire, vous savez que c’est... c’est extrêmement difficile. Et euh, je veux dire, ce que je vais expliquer aujourd’hui est constitué de deux parties, je veux dire que la partie principale sera un travail conjoint très récent avec Henri Moscovici, qui paraîtra dans les Proceedings of the National Academy of Sciences, et qui traitera de la partie ultraviolette du spectre. Donc ce que nous avons trouvé, essentiellement je veux dire, vous savez, ce que nous avons trouvé avec Henri, je vais vous expliquer ce que c’est, mais ce que je dois souligner dès le début, c’est que nous ne cherchions pas ce que nous avons trouvé : nous regardions un opérateur, et ainsi de suite, et nous avons été étonnés de découvrir qu’il était lié aux zéros de ζ , et si on nous avait demandé d’écrire une proposition, nous n’aurions jamais pu deviner ce que nous allions trouver. Et la deuxième partie concerne la partie basse du spectre et ce qui est également étonnant, c’est que dans les deux cas, les fonctions qui sont impliquées et l’opérateur qui est impliqué est un opérateur qui est l’opérateur d’onde prolate. Alors laissez-moi d’abord vous expliquer cet opérateur. Je veux dire qu’il est lié à un fait important qui est assez utile lorsque nous travaillons avec l’espace de Hilbert, qui est la situation lorsque vous avez une

Référence : <https://www.youtube-nocookie.com/embed/vLekXpbTBI>.

Traduction : Denise Vella-Chemla, janvier 2025 (assistée de Google translate).

paire de projections dans l'espace de Hilbert, nous savons très bien que lorsque nous avons une seule projection, d'accord, les projections sont toutes les mêmes si elles ont la même dimension. Mais qu'en est-il d'une paire de projections ? Maintenant, si vous avez une paire de projections, il s'avère que la situation n'est pas du tout inextricable, car il s'agit essentiellement d'une situation bidimensionnelle dans le sens suivant : donner une paire de projections dans l'espace de Hilbert revient à donner une représentation unitaire du groupe diédral. Et je veux dire que c'est simple à obtenir, car ce que vous avez, ce sont deux unitaires, de carré un, qui s'obtiennent en prenant un moins deux fois la première projection ($U_1 = 1 - 2P_1$) et un moins deux fois la seconde projection ($U_2 = 1 - 2P_2$) ; elles sont de carré un évidemment. Elles ne commutent pas mais même si elles ne commutent pas, le groupe qu'elles génèrent est très très joli si on veut : c'est un groupe résoluble, c'est beaucoup plus simple que résoluble, c'est juste le produit semi-direct $\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de \mathbb{Z} par le groupe à deux éléments ($\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Donc une fois qu'on sait ça et qu'on connaît un peu la théorie des représentations, on découvre que les représentations irréductibles sont juste paramétrées par un angle et qu'on peut penser la situation irréductible comme étant bidimensionnelle au plus, et comme étant donnée, si on veut, par la projection sur l'axe des x d'une part, et d'autre part, la projection sur une droite qui fait un certain angle avec l'axe des x .

Et donc ce qui se passe, c'est que de cette connaissance des représentations irréductibles, et de la connaissance bien sûr du fait que toute représentation est une intégrale directe de représentations irréductibles, vous avez un contrôle total de la situation. Et vous comprenez que la situation est complètement connue une fois que vous connaissez le cosinus par exemple de l'angle, ou le sinus de l'angle, qui sont tous deux, si vous voulez, déterminés par des équations simples, je veux dire, $(P_1 P_2 P_1 = \cos^2(\alpha) P_1, (P_1 - P_2)^2 = \sin^2(\alpha))$. Le plus intéressant, c'est de considérer le sinus, car je veux dire que ce que vous trouvez, lorsque vous prenez le carré de la différence entre les deux projections, c'est un opérateur qui est au centre, c'est-à-dire qui commute avec P_1 et P_2 . Et donc je veux dire qu'il va servir à diagonaliser la paire de projections.

Donc, en 1996, quand j'ai commencé, vous savez, aussi par accident, à travailler sur ζ , j'ai voulu introduire une coupure en termes d'opérateurs appropriés, et j'ai dû traiter une paire spécifique de projections, qui est la suivante : vous prenez des L^2 -fonctions qui sont paires et donc vous prenez les paires suivantes : la première est extrêmement simple, c'est une projection de coupure extrêmement simple, ce qui signifie que vous ne considérez que les fonctions qui s'annulent lorsque l'argument est une valeur absolue supérieure à λ , λ est un nombre fixe. Et la deuxième projection est ce que vous obtenez en prenant la transformée de Fourier de cette première projection. Donc vous conjuguez cette première projection par la transformée de Fourier, et il est pratique, je veux dire, pour des raisons de normalisation en théorie des nombres, de prendre la transformée de Fourier telle que définie ici, à savoir avec un facteur 2π . En fait, vous savez qu'il y a une règle générale en mathématiques qu'on apprend très tôt, c'est que quand on a un i , il est rare qu'on n'ait pas un 2 et quand on a un 2π , il est très rare qu'on n'ait pas un i . Donc je veux dire que c'est la règle. Et donc quand on prend cette paire de projections P_λ et \widehat{P}_λ , il s'avère qu'il y a un miracle qui se produit. Et ce miracle a été découvert à plusieurs endroits en fait, mais l'un de ces endroits était les laboratoires Bell (Bell-labs) dans les années 60 et il a été découvert par Slepian, Landau et Pollak, et ce qu'ils ont fait, c'est de pouvoir diagonaliser en utilisant des fonctions prolate (je reviendrai plus tard sur l'opérateur principal) mais ils ont pu, si vous voulez, diagonaliser l'angle et ce qu'ils ont fait plus précisément dans plusieurs articles, ce qu'ils ont fait, c'est de diagonaliser

quelque chose qui est comme la racine carrée du cosinus, à savoir ils diagonalisent l'opérateur qui s'appelle la transformée de Fourier tronquée et qui est essentiellement le produit $P_\lambda \widehat{P}_\lambda P_\lambda$, je veux dire, si vous le mettez au carré, d'accord.

Donc leur motivation était très concrète, c'était de résoudre un paradoxe dans la communication des signaux qui est le suivant : c'est que, vous savez, par exemple, quand je parle maintenant, la durée de mon discours est limitée, donc je suis limité dans le temps ; d'un autre côté, il est clair aussi que je n'utilise pas de fréquences extrêmement élevées, etc., donc d'une certaine manière, la gamme de fréquences est également limitée. Et donc, je veux dire qu'il y a un paradoxe, et le paradoxe est le suivant : le paradoxe est que si vous réfléchissez un peu, et que vous regardez cette paire de projections que j'expliquais, vous savez, ces deux projections, alors il est clair que leur intersection est vide, je veux dire, est nulle. Pourquoi ? Parce qu'une fonction qui a un support compact, je veux dire, qui est nulle à l'extérieur, lorsque $|q|$ est plus grand que λ a une transformée de Fourier qui est analytique, et donc, elle ne peut pas s'annuler sur un intervalle. Donc d'une certaine manière, je veux dire, ce que Slepian et ses collaborateurs ont trouvé, ils ont trouvé qu'il y avait une réponse, et la réponse était donnée par des fonctions très spéciales qui sont appelées les fonctions d'onde sphéroïdales prolates, et qui, comme je l'ai dit, diagonalisent la transformée de Fourier tronquée. Donc ici, vous voyez la transformée de Fourier mais vous ne l'appliquez qu'aux fonctions à support compact et vous ne la regardez que pour la variable dans le même intervalle (*entourant de bleu la ligne décrivant la transformée de Fourier de sa diapositive*). Et donc vous obtenez des fonctions, ce sont des fonctions extrêmement spécifiques, elles ont des modes, elles sont étiquetées par des entiers, d'accord, et elles forment la meilleure solution possible à ce paradoxe de la théorie de la communication. Elles n'ont rien à voir avec le cosinus et le sinus ou quoi que ce soit de ce genre, d'accord, mais elles ont à voir avec le cosinus de l'angle entre les deux projections. Et donc ce qu'ils font, ils diagonalisent cette transformée de Fourier tronquée avec des valeurs propres et en conséquence, ils calculent le cosinus de l'angle entre les deux projections. L'angle des deux projections s'avère être... pendant un certain temps, donc le carré du cosinus est pendant un certain temps, je veux dire pour la première valeur de m extrêmement proche de un, ce qui signifie que même si ces deux projections ne se croisent pas, l'angle est presque nul pour ces valeurs. Et puis, d'accord, il passe essentiellement de zéro à $\frac{\pi}{2}$, d'accord. Et donc ce que vous voyez, vous voyez le comportement de ce carré du cosinus qui est essentiellement un, puis il transite, et ensuite il est essentiellement nul, il est incroyablement proche de zéro, ce qui signifie que les deux projections sont essentiellement orthogonales après un certain temps. Ok, donc ce sont, si vous voulez, les graphiques de ces fonctions.

Je n'y consacre pas beaucoup de temps, mais à titre d'exemple concret, par exemple, vous pouvez voir que pour une très petite valeur, ce qui est tout à fait raisonnable, qui est 3.8, vous pouvez voir la valeur du cosinus carré. Vous pouvez donc voir que le cosinus carré est essentiellement un et que l'angle est essentiellement zéro et donc, d'une certaine manière, je veux dire, à bien des égards, vous savez, on peut penser que ces projections, même si elles ne se croisent pas, ont quelque chose qui est une intersection essentielle qui sont ces vecteurs, ces fonctions d'onde prolates.

Le secret de ces fonctions est le fait qui a été découvert par Slepian et ses collaborateurs, mais aussi par Mehta en théorie des matrices aléatoires, c'est le fait que ces deux projections commutent avec un opérateur différentiel. Si vous voulez, plutôt, la façon dont ils l'ont trouvé est que cette transformée de Fourier tronquée commute avec un opérateur différentiel. Maintenant, il peut

sembler très surprenant que l'opérateur différentiel puisse commuter avec une projection, à savoir une fonction qui est nulle quelque part et un quelque part, vous savez, car bien sûr cette fonction n'est pas continue. Donc, pour avoir un exemple concret de cela, il suffit de considérer l'opérateur différentiel qui est $x \frac{d}{dx}$ (noté ∂_x). Or, cet opérateur commute en fait avec la fonction caractéristique de l'intervalle positif. Pourquoi ?

Parce que, si vous voulez, le groupe qu'il génère est un groupe de mise à l'échelle, et bien sûr cette fonction est invariante sous mise à l'échelle. Donc si vous remplacez la variable x par λx ok, vous ne changez pas la fonction. Donc si on réfléchit un peu plus, ce qu'on trouve c'est qu'en fait l'opérateur, qui est $\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x)$, commute avec la fonction caractéristique de l'intervalle, et avec un peu plus de travail, on trouve que cet opérateur maintenant (montrant $\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x)$) commute avec cette fonction caractéristique $1_{[-\lambda, \lambda]}$ de l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$.

Maintenant, l'opérateur que Slepian et ses collaborateurs ont trouvé est l'opérateur suivant : $W_\lambda = -\partial_x((\lambda^2 - x^2)\partial_x) + (2\pi\lambda x)^2$: il est donné par les mêmes éléments que précédemment, au signe près, donc moins d par dx fois lambda carré moins x au carré fois d par dx plus un potentiel, plus $2\pi\lambda x$ au carré et je veux dire, ce qui se passe, c'est que parce que vous avez ajouté cet autre terme qui bien sûr commute avec n'importe quelle fonction, donc cela ne change pas le fait qu'il commutera avec P_λ , quand vous avez ajouté ce terme, cela implique que l'opérateur est maintenant invariant sous Fourier. Donc parce qu'il est invariant sous Fourier, il commute, non seulement avec P_λ , mais aussi avec sa transformée de Fourier.

Et c'est vraiment un miracle, je veux dire que c'est vraiment un fait qui est totalement incroyable. Et cet opérateur spécifique était connu avant, je veux dire, il était connu, vous savez, dans les années 30 et ainsi de suite, et comment est-il apparu? Il est apparu parce qu'il apparaît par séparation de variables lorsque vous regardez le laplacien sur le sphéroïde. Donc ce qui se passe, c'est que vous considérez le laplacien dans un sphéroïde qui est prolata. Alors qu'est-ce que cela signifie ? Il y a un axe de révolution et c'est en quelque sorte si vous voulez, la direction de l'axe selon laquelle le sphéroïde est plus long (que dans l'autre direction ici), c'est comme vous savez un ballon de rugby, c'est pourquoi on l'appelle prolata.

Et puis il y a une façon de traiter le laplacien qui consiste à prendre ce qu'on appelle des coordonnées prolates, et lorsque vous utilisez ces coordonnées prolates, il s'avère que vous avez une séparation des variables. Donc en d'autres termes, le laplacien sépare maintenant comme ceci, et ce que cela signifie, c'est que si vous voulez connaître le son de ce sphéroïde et ainsi de suite, si vous voulez diagonaliser le laplacien, ce que vous devez faire, c'est que vous devez résoudre séparément ces opérateurs prolates, mais ensuite, regarder les valeurs propres qui sont les mêmes pour les deux. Et cela vous limite aux valeurs propres positives, ok, donc c'est ce qui se passe. Et je veux dire, dans mon cours au Collège de France en 98, j'avais regardé cet opérateur prolata, j'avais été étonné par cet opérateur et j'avais regardé l'opérateur non seulement sur l'intervalle, ce que les gens font normalement, sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ mais je l'avais regardé sur la droite complète. Et je m'étais intéressé aux extensions auto-adjointes mais je n'en ai rien fait. Et ce qu'on a fait avec Henri Moscovici, c'est que l'année dernière, on a commencé à regarder en détail cette extension auto-adjointe dont je savais qu'elle existait, et qui s'obtient comme suit : quand on regarde ça, l'opérateur prolata, sur la droite complète, et quand on prend le domaine minimal qui est un espace

de Schwartz, l'espace des fonctions de Schwartz sur la droite, alors on peut calculer les indices de déficience de von Neumann de cet opérateur. Vous trouvez qu'il est symétrique mais qu'il n'est pas auto-adjoint, et ce que vous trouvez, c'est que les indices de déficience sont 4 et 4. Je veux dire, c'est, vous savez, déjà une chose assez surprenante, donc il est auto-adjoint. Mais d'accord, il admet une extension auto-adjointe unique, qui a les propriétés qu'en tant qu'extension, vous savez, elle commute avec ces projections P_λ and \widehat{P}_λ et non, pas sur la droite réelle complète, non, seulement, vous savez, lorsque vous vous limitez aux fonctions L^2 de l'intervalle. Donc elle commute avec ces deux projections, et elle est aussi invariante selon Fourier, d'accord.

Et maintenant, je veux dire, ce que nous avons commencé à faire avec Henri, il y a un peu plus d'un an, c'était de prendre au sérieux cet opérateur, et de comprendre ce qu'il est, et de regarder son spectre et ainsi de suite, et nous allions d'une surprise à l'autre, et donc ce que nous avons trouvé, les premières choses que nous avons trouvées et que j'ai trouvées extrêmement surprenantes, parce que ce n'était pas du tout ce à quoi on pouvait s'attendre, c'est bien sûr qu'il est livré avec Fourier, mais le fait étonnant, le premier fait étonnant, c'est qu'il a un spectre discret. Et je veux dire que nous verrons une raison plus tard, lorsque nous passerons aux coordonnées de Liouville, et nous verrons que c'est dans le cercle limite aux deux extrémités, d'accord.

Et maintenant, il est auto-adjoint, il a un spectre discret, et maintenant on peut regarder ses fonctions propres, et la façon dont ses fonctions propres, si vous voulez, se comportent et bien sûr, par des conditions aux limites à la fois avec λ fini, et à l'infini. Pour λ fini, la condition aux limites est essentiellement que la fonction n'explose pas, je veux dire, vous savez, à la singularité (au λ), ce qui se passe, c'est que les solutions ont normalement soit une singularité logarithmique, soit sont régulières, et donc nous mettons comme condition aux limites le fait qu'elles soient régulières. Et maintenant, à l'infini, il s'avère qu'à l'infini, les fonctions propres doivent avoir ce comportement (*montrant* $\phi(x) \sim c \frac{\sin(2\pi\lambda x)}{x}$) qu'elles sont équivalentes à un quotient de la fonction sinus avec le coefficient correct, je veux dire divisé par x . Et c'est pour les fonctions paires, et si vous prenez des fonctions impaires, elles doivent avoir le comportement cosinus. Et c'est ce qui va nous permettre bien sûr de calculer le spectre en utilisant l'ordinateur, d'accord.

Nous étions déjà assez étonnés de découvrir que cet opérateur avait un spectre discret. On aurait pu s'attendre à ce qu'un spectre continu apparaisse parce que nous étions en dehors de cet intervalle compact et ainsi de suite. Non. Il a un spectre discret et nous avons donc commencé à étudier ce spectre. Et la première chose que nous avons faite pour comprendre à quoi ce spectre pouvait ressembler, a été d'utiliser ce que font les physiciens, à savoir utiliser l'approximation semi-classique. Donc ce qui se passe dans l'approximation semi-classique, c'est la chose suivante ; ce que nous avons en réalité, c'est un hamiltonien qui est de la forme suivante. Je veux dire, lorsque vous regardez cet opérateur W_λ , l'opérateur d'onde prolate sur la droite réelle complète, alors je veux dire, au signe près et à un terme supplémentaire près, c'est en réalité le produit de deux termes, c'est vraiment comme $(p^2 - \lambda^2)(q^2 - \lambda^2)$, où p et q sont, vous savez, les variables de l'espace des phases comme dans le cas de la physique. Et quand on regarde à première vue, si vous voulez, le nombre de valeurs propres de l'opérateur, maintenant ce sont des valeurs propres négatives à cause du signe moins ici, qui vérifient que l'hamiltonien est inférieur à a où $a = \left(\frac{E}{2\pi}\right)^2$ parce que ça serait le lien avec ζ , alors, on doit calculer une aire dans l'espace des phases, c'est l'aire qui est délimitée par cette courbe ici, et où p est plus grand que λ et où q est plus grand que λ , ok et donc, on peut

faire ce calcul, je veux dire qu'il est donné par une intégrale, cette intégrale est convergente, et il s'avère que lorsqu'on calcule l'intégrale ah, ok, on a déjà un assez bon signe qui arriv, etc qui est que cette aire a le même type de terme principal que pour les zéros de ζ . A savoir qu'elle est de la forme $\frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi}$.

Je veux dire que ce que j'ai utilisé, j'ai utilisé un carré ici parce que je pense au laplacien et nous devons atteindre l'opérateur de Dirac à un moment donné. Donc déjà, ce que nous voyons, c'est ceci. Mais il y a une dépendance à λ , dans les termes inférieurs ou dans ce que vous obtenez ici, et bien sûr il faut s'en occuper. Et je veux dire que le calcul plus précis est que, tout d'abord, on a une sorte de règle de mise à l'échelle, qui est ce qui se passe quand on redimensionne le paramètre par λ , et en fait on peut calculer l'intégrale explicitement en termes d'intégrales elliptiques et elle est donnée, vous savez, en termes de première espèce et de deuxième espèce, je veux dire, elle est donnée par une formule de ce type. Et cela nous donne bien sûr un premier contrôle sur le nombre de valeurs propres. Mais bon, vous savez, ce contrôle nous a conduit à fixer la valeur de λ à la racine carrée de deux, et j'expliquerai plus tard comment cela est lié, je veux dire, au travail avec Katia Consani. Donc, ça nous a permis de fixer la valeur de lambda mais ensuite, on voulait avoir un bien meilleur contrôle sur les valeurs propres. Et pour ça, ok, je veux dire, c'est utile de faire une transformation de Liouville. Et pour passer à un problème de Sturm-Liouville. Et quand on fait une transformation de Liouville, alors ce qu'on trouve, c'est que, vous savez, il y a un isomorphisme unitaire de l'opérateur que l'on restreint à l'intervalle pertinent, on va ignorer, si on veut, les valeurs propres qui sont déjà connus, qui sont positives. Et il conjugue l'opérateur à un opérateur sur $(\coth^2(y) - 2)$: la demi-droite qui a suivante $(Q(y) = -(2\pi))$. Ça veut dire qu'il y a un potentiel, il y a ce terme ici, et il y a $2\cosh(y)^2$. Maintenant, cela a la forme d'un potentiel, qui est un potentiel assez délicat, si vous voulez, parce qu'il fait intervenir cette fonction cosh au carré et le coth au carré. Donc en fait, il y a un nouvel hamiltonien qui apparaît ici dans les variables de Liouville qui est de la forme p au carré plus q de la variable d'espace ($H = p + Q(q)$). Et je veux dire que cet hamiltonien a la propriété suivante, c'est là qu'on voit qu'on est dans le cas du spectre discret, parce qu'il est dans le cas du cercle limite à l'infini et il est aussi dans le cas du cercle limite à zéro. Maintenant on est passé à zéro par le changement de variables. Et la fonction qui intervient là-dedans comme potentiel, dans cet hamiltonien, est cette fonction : $(Q(y) = -(2\pi\Lambda^2)2\cosh(y)^2 - \frac{1}{4}(\coth^2(y) - 2))$:

$$h(y) = 16\pi^2 \cosh^2(y) + \frac{1}{4}(\coth^2(y) - 2)$$

Donc, je veux dire que c'est impliqué mais que c'est du mauvais signe et c'est très important, sinon on n'aurait pas de valeurs propres négatives. Donc, je veux dire que ce que nous avons trouvé avec Henri, c'est un beau calcul qui a été fait par Nursultanov et Rozenblum, et qui donne l'asymptotique des valeurs propres pour exactement le type d'opérateurs que nous avons, à savoir un opérateur de Sturm-Liouville avec un potentiel ayant une forte singularité locale négative.

Nous avons donc utilisé cet article, que je reproduis ici, je reproduis la formule principale que nous utilisons dans cet article. Et je veux dire que dans cet article, il y a une formule pour le nombre de valeurs propres positives et le nombre de valeurs propres négatives. Et comme nous nous intéressons pour notre opérateur d'onde prolate à sa valeur propre négative, et qu'il y a ce signe moins, nous allons utiliser cette formule, la première formule ici.

Donc vous savez, il faut commencer à calculer, et donc la formule en termes de fonction $h(y)$ que j'avais montrée avant est de la forme suivante : c'est cette formule de Nursultanov et Rozenblum donc c'est $\frac{1}{\pi}$ fois l'intégrale de zéro à l'infini de cette expression ici ($N(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ((a + h(y))^{1/2} - h(y)^{1/2}) dy$) et je veux dire qu'en tant que tel, ce n'est pas facile à gérer, mais si $N(a) = \frac{1}{2}a$ vous différenciez par rapport à a , vous obtenez une expression plus simple évidemment, il y a un facteur cause de la racine carrée et ainsi de suite, et donc vous obtenez cette expression et ensuite, vous devez changer de variable : quand vous changez de variable et que vous définissez x égal à l'exponentielle de y , toutes ces fonctions trigonométriques, vous savez, comme le cosinus hyperbolique et ainsi de suite, elles crachent des fonctions rationnelles, et cela signifie qu'à la fin de la journée, vous devez calculer une intégrale qui est du type de celle que Legendre calculait : c'est une intégrale elliptique; le terme qui est à l'intérieur de la racine carrée est assez compliqué, ok, il est donné par cette expression, et je veux dire... donc il faut se référer à la notation standard pour les intégrales elliptiques qui sont, vous savez, cette intégrale elliptique incomplète ici (*montrant* $F(\phi|m) := \dots$) et voici l'intégrale complète (*montrant* $K(m) := \dots$), et puis ok, ce que l'on trouve c'est qu'il y a une forme explicite pour la réponse pour cette fonction qui est une dérivée J de a , et elle est donnée par une somme de deux termes donc il y a un premier terme, qui implique cette intégrale elliptique complète de première espèce et puis il y a ce terme.

Et je veux dire, tous les coefficients que vous voyez sont tous assez compliqués, mais ce sont des sortes de polynômes, vous savez, comme par exemple $s(a)$ est donné par cette expression, $d(a)$ est donné par cette racine carrée et ainsi de suite, et puis il y a ce facteur global $v(u)$ qui est donné par cela. Donc vous calculez, vous calculez, et vous pouvez utiliser les développements asymptotiques des différents termes et des intégrales elliptiques complètes, vous continuez à calculer, puis, lorsque vous évaluez ce que cela devrait être pour $a = (E/2)^2$, vous trouvez exactement maintenant la contribution qui vous donne le nombre de zéros de zêta et vous trouvez $\frac{E}{2\pi} \log \frac{E}{2\pi}$.

Et vous trouvez qu'il y a un terme supplémentaire, qui est le plus difficile, qui vient de l'intégrale elliptique incomplète. Et étonnamment, ce terme supplémentaire vous donne, dans la formule de comptage du nombre de valeurs propres pour l'opérateur, un terme qui ressemble incroyablement aux termes supplémentaires que vous obtenez pour la fonction zêta de Riemann. Je veux dire que pour la fonction zêta de Riemann, vous avez un terme qui est dû à Trudgian et qui vous dit que la différence entre le nombre attendu de zéros qui est ceci, et la formule de Riemann est de l'ordre de $\log s E$ avec un certain coefficient. Ce que nous avons trouvé avec Henri est une formule très similaire où le coefficient que nous avons est ce coefficient (0.159155 pour Connes-Moscovici au lieu de 0.112 pour l'estimation de Trudgian).

Donc, si vous voulez, alors bien sûr, il faut travailler davantage parce que ce que l'on a à ce stade, c'est la connaissance du laplacien et ce qu'il faut trouver, c'est une sorte de racine carrée, si vous voulez, de ce laplacien. Nous avons donc cherché l'opérateur de Dirac correspondant et ce que nous avons fait, c'est de trouver l'opérateur correspondant, puis d'explorer la géométrie associée. Ok. Et je veux dire, je reviendrai sur le fait que, je reviendrai sur l'opérateur de Dirac un peu plus tard, mais laissez-moi avant de faire cela, laissez-moi vous montrer comment nous avons calculé les valeurs propres du laplacien W , qui sera finalement le carré de l'opérateur de Dirac, puis, après avoir pris la racine carrée, nous les comparons avec les zéros de zêta, et je vous montrerai cette comparaison des valeurs propres.

Mais pour ça, il faut prendre la racine carrée, donc il faut trouver l'opérateur de Dirac. Ok. Alors comment a-t-on trouvé l'opérateur de Dirac ? Eh bien, on a utilisé une méthode bien connue en théorie des opérateurs, qui est, si vous voulez, la méthode de Darboux. Et cette méthode de Darboux est la suivante : c'est une factorisation de l'opérateur comme un produit de deux opérateurs d'ordre un. Et puis, si vous voulez, l'idée, c'est que si on a une factorisation de ce type de deux équivalents unitaires de l'opérateur W_λ , alors on peut définir une racine carrée comme une matrice 2×2 . Donc c'est bien connu, bien sûr, et vous savez, que pour passer du laplacien à l'opérateur de Dirac, il faut utiliser des matrices de Clifford. Donc c'est ce que nous allons faire, et donc, la méthode Darboux est une méthode générale qui s'applique non seulement dans le cas de Liouville mais aussi dans le cas où vous avez, vous savez, la forme canonique de l'opérateur de Sturm-Liouville, dans le sens où vous êtes autorisé à insérer un p de x entre les deux différentiations, et quand vous faites ça, ok, il y a une recette, qui est une équation de Riccati que vous devez résoudre, afin de pouvoir en quelque sorte, vous savez, trouver une connexion qui vous permettra d'écrire l'opérateur différentiel d'ordre deux comme étant factorisé. Donc dans notre cas, ce que nous avons trouvé, nous avons trouvé la solution de l'équation de Riccati en utilisant une combinaison de solutions de l'équation différentielle avec un coefficient complexe, et lorsque le coefficient est vraiment complexe, alors, nous avons la factorisation. Il y a un module dans le choix de la factorisation qui est, si vous voulez, un nombre complexe mais avec l'axe réel exclu et puis une fois qu'on a la solution de l'équation de Riccati, on a l'opérateur de Dirac : c'est une matrice 2×2 , et cette matrice 2×2 est telle que lorsqu'on la met au carré, on obtient essentiellement... le premier terme qu'on obtient sur la diagonale est l'opérateur d'origine et le deuxième terme qu'on obtient sur la diagonale est isospectral à l'opérateur d'origine $W_\lambda + 2\delta w(x)$.

Et je veux dire, si vous voulez, ce que cela signifie, c'est que d'une certaine manière, le problème de trouver les valeurs propres de W_λ , le problème de l'opérateur de Dirac, se réduit bien sûr au problème des valeurs propres de W_λ , mais ce que vous avez fait essentiellement, c'est éliminer la symétrie qui se produit naturellement entre les zéros de zêta, en prenant la fonction qui, comme la mise au carré, si vous voulez, des zéros, ce qui élimine la symétrie. Et donc maintenant, bien sûr, on en est réduit à calculer le spectre de cet opérateur W_λ : ce que l'on trouve alors, c'est que cet opérateur, il faut multiplier par deux l'opérateur de Dirac, a un spectre simple discret, son spectre est contenu dans l'union de la droite réelle et de la droite imaginaire réelle, et cela parce que son carré correspond à cet opérateur d'onde prolate sur la droite complète, et cet opérateur d'onde prolate a des valeurs propres positives et négatives. Les valeurs propres positives vont en fait imiter les zéros triviaux de la fonction zêta de Riemann et les valeurs propres imaginaires vont vraiment imiter les zéros, les zéros non triviaux. Ils sont donc exactement symétriques pour zêta et lorsque vous calculez la fonction de comptage de ceux qui ont des parties imaginaires positives inférieures à E , ils remplissent exactement l'estimation de Riemann, d'accord.

Nous avons donc continué à calculer, à faire ces calculs avec l'ordinateur. Et la façon dont nous avons fait ce calcul a été, si vous voulez, d'étendre la fonction propre à l'infini, en fonction de la valeur propre. Nous savions quel était son comportement en fait, il y a un développement détaillé qui se trouve dans l'article de Ramis et de ses collaborateurs. Nous avons également étendu la fonction propre pour la valeur propre correspondante avec la condition limite à λ , je veux dire, qui est la racine carrée de deux. Et puis nous avons étendu la solution si vous voulez par l'équation

différentielle et nous avons essayé de les faire correspondre. Maintenant, en général, elles ne correspondent pas, bien sûr, mais elles correspondent pour des valeurs spécifiques du paramètre et nous avons collecté ces valeurs, d'accord, puis nous avons fait cette opération pour arriver au Dirac et nous avons comparé. Et quand vous comparez, ok, vous commencez à être totalement mystifié, parce que ce que vous trouvez donc dans la colonne de gauche, il y a ce que vous obtenez de notre opérateur, et dans la colonne de droite, il y a ce que vous obtenez des zéros de zêta, et ça continue, je veux dire, ça continue assez loin, en fait, nous avons pu les calculer assez loin, euh, et c'est le type de coïncidence que vous obtenez.

Donc en fait, ce que vous pouvez faire, c'est que vous pouvez tracer ces valeurs, d'accord, où vous avez sur le même tracé et pour le même entier n , vous avez la n -ième valeur propre du Dirac et vous avez le n -ième zéro de ζ qui est donné, et quand vous ne voyez qu'un seul point, cela signifie qu'en fait le point rouge cache le point bleu, donc je veux dire, si vous voulez, cela signifie qu'ils sont vraiment trop proches pour voir une différence, donc vous continuez pour des nombres de plus en plus élevés, et ce sont des valeurs propres ou si vous voulez les zéros pour le même n , ce qui est très surprenant car normalement vous vous attendriez à un décalage ou quelque chose comme ça. Et donc quand vous allez vraiment loin, quand vous montez jusqu'à 100, vous voyez que le comportement est assez similaire. Ok.

Donc, une fois que vous avez atteint cela, il y a un problème géométrique évident, qui est que maintenant, si vous voulez, ce que nous savons en géométrie non-commutative, c'est qu'une géométrie est donnée par l'opérateur de Dirac, elle est donnée par ce qu'on appelle un triplet spectral, où tout se passe dans l'espace de Hilbert, et, si vous voulez, où la métrique de l'espace en question est dictée par l'opérateur de Dirac.

Donc ici, la métrique est sur la demi-droite réelle, si vous voulez, et si vous voulez considérer la partie intéressante, c'est la partie de la racine carrée de 2 à l'infini, et donc $\lambda = \sqrt{2}$ ici, et ce que vous découvrez, c'est que la métrique associée au triple spectral pertinent, celui qui vient de l'opérateur de Dirac est donnée par cette formule $ds^2 dx^2$. Elle est donnée par cette formule et ce qui est très frappant, bien sûr, c'est que la métrique change de signe lorsque vous traversez le point singulier de l'opérateur.

Donc ce qui se passe, c'est que cette métrique s'avère s'étendre à la droite réelle, d'accord, en changeant de signe et ainsi de suite, et en fait, elle est naturellement liée à une métrique qui est bidimensionnelle, ce que nous allons faire bien sûr, c'est de rendre la variable temporelle périodique, et lorsque vous regardez cette métrique comme une métrique bidimensionnelle, vous constatez qu'elle est en fait liée à... c'est juste un trou noir.

Et il y a une astuce quand on regarde les trous noirs pour rendre la métrique lisse et quand on la rend lisse, on trouve ce qui suit, on trouve cette expression ($ds^2 = 4x^2 dv^2 - 2dv dx$). Donc je veux dire, ici on est toujours en retard, parce qu'il nous faut comprendre beaucoup plus de choses sur cette géométrie que ce que nous faisons pour le moment, mais ce qui est bien, c'est qu'en fait, on peut dessiner une image de cette géométrie si on le veut, de ce trou noir parce que ce qu'on peut faire, c'est l'intégrer, on peut réellement intégrer cette géométrie bidimensionnelle dans l'espace de Minkowski. Et quand on l'intègre dans l'espace de Minkowski, on obtient l'image suivante. C'est

donc la première image qu'on obtient. Donc vous voyez, voici le point singulier de l'opérateur, voici la partie qui va de la racine carrée de deux à l'infini (*montrant le cône jaune en haut de l'image*) et ici au milieu se trouve la partie à propos de laquelle, si vous voulez, les gens ont travaillé, et ils savent ce qui se passe et ainsi de suite, et quand vous regardez de plus près, vous découvrez que comme cela devrait être dans le trou noir, vous avez ces rayons de lumière, qui sont en blancs ici, qui tournent en spirale à l'intérieur, vous savez, et qui, bien sûr, tandis que, si vous voulez, la ligne qui est obtenue en prenant $t = 0$ la traverse de manière rectiligne. Donc, ce que nous avons fait avec Henri, c'est de tomber, presque par accident, sur un opérateur qui définit une géométrie, qui est un opérateur de Dirac, et qui a étonnamment les propriétés d'une géométrie lorentzienne, si vous voulez, ce n'est pas une géométrie riemannienne parce qu'il y a ce signe moins, et cela correspond au fait que lorsque vous regardez les zéros de zêta, vous avez les zéros critiques, mais vous avez aussi les zéros triviaux, et cela correspond au fait que l'opérateur prolate a des valeurs propres à la fois négatives et positives. Nous avons donc fait beaucoup plus de calculs sur ce sujet et, par exemple, nous avons l'hypothèse, si vous voulez, que le spectre négatif de l'opérateur prolate correspond exactement à l'espace de Sonin, où l'espace de Sonin est défini comme étant (P_λ^\perp) . En d'autres termes, il n'est pas vrai que l'orthogonalité de ces deux projections P_λ et \widehat{P}_λ soit telle que ces projections couvrent l'espace. Quand on prend leur supremum, il y a un sous-espace de l'espace de Hilbert qui est orthogonal aux deux et qui est l'espace de Sonin. Donc l'espace de Sonin remonte au 19e siècle, et il est caractérisé par le fait que vous prenez des fonctions et que de telles fonctions existent, donc vous avez des fonctions pour lesquelles ce P_λ^\perp est orthogonal à la projection P_λ et dont la transformée de Fourier s'annule aussi sur l'intervalle correspondant, d'accord, s'annulent sur l'intervalle $[-\lambda, \lambda]$ maintenant, d'accord.

Et ça, c'est en rapport avec le travail que je mène depuis de nombreuses années avec Katia Consani et ce travail est, si vous voulez, lié à une autre approche de la fonction zêta de Riemann, qui n'utilise pas d'opérateurs, mais qui essaie de prouver ce qu'on appelle la positivité de Weil. Donc si vous voulez, ce qui se passe, c'est qu'il y a une formule qui est due à Riemann et Weil (formule de Riemann-Weil), et qui exprime l'évaluation d'une fonction sur les zéros de zêta, les zéros non triviaux, au moyen de la transformée de Fourier de la fonction évaluée sur les places, ce qu'on appelle les places, du corps des nombres rationnels et cette évaluation porte sur la somme sur les nombres premiers, et les termes qui sont impliqués, dans l'évaluation, sont relativement simples pour chaque nombre premier, si vous voulez, ils sont de cette forme, on évalue juste la fonction sur p mais on prend une somme, mais c'est assez compliqué, à ce qu'on appelle la place archimédienne ; elle est donnée par une distribution de valeurs principales qui est de cette forme, cette fonctionnelle avec $z = 1/2 + is$.

Et puis il s'avère que si vous voulez que l'hypothèse de Riemann est équivalente à la positivité d'un $f(s)g(s)$ approprié, qui est cette fonctionnelle (*montrant $Q...(f, g) :=$*) ; c'est évident du point de vue de l'espace de Hilbert, mais le fait que cette fonctionnelle puisse être calculée en termes de nombres premiers, c'est ce qui rend le problème extrêmement difficile, car il faut prouver la positivité d'une fonctionnelle en utilisant ce type d'expression.

Maintenant, ce que nous avons fait dans plusieurs articles avec Katia Consani, des articles très récents, je veux dire cet article qui est paru en 2021, donc ce que nous avons fait, c'est de prouver une forme forte de la positivité de Weil, mais encore une fois avec la même valeur $\sqrt{2}$, donc ce

que nous avons prouvé avec Katia Consani, c'est que nous avons la positivité de Weil sous une forme forte en utilisant le même espace de Sonin que je mentionnais avant, dans mon travail avec Henri, et en prouvant une inégalité entre la forme quadratique de Weil et la trace de l'opérateur d'échelle, compressée si vous voulez, je veux dire, en utilisant l'espace de Sonin. Maintenant, c'est une expression très délicate, pourquoi ?

Parce que si vous voulez avoir la projection sur l'espace de Sonin, vous avez l'action de mise à l'échelle, mais l'action de mise à l'échelle ne commute pas avec la projection sur l'espace de Sonin. Et donc vous êtes obligé de prendre une expression de ce type, qui est, vous savez, complètement positive.

Et il s'est avéré que dans le travail avec Katia, nous utilisons à nouveau les fonctions prolate, donc nous utilisons les fonctions d'onde prolate, ces fonctions d'onde prolate, je les avais introduites dans mon article de 98, je veux dire dans *Selecta*. Elles réapparaissent déjà dans le travail avec Katia, il y a deux ans, avec cette formule qui impliquait la projection sur l'espace de Sonin et la mise à l'échelle. Et maintenant, si vous voulez, quelle est la raison conceptuelle qui se cache derrière cette histoire et pourquoi cet opérateur prolate est-il si important, etc., eh bien, ce qui se passe, c'est que la mise à l'échelle ne commute pas avec cet espace de Sonin, avec la projection de Sonin, mais l'opérateur d'onde prolate commute avec la projection de Sonin et cela signifie qu'au lieu de prendre la mise à l'échelle, on devrait prendre la fonction appliquée à l'opérateur prolate et l'utiliser en remplacement.

Maintenant, dans le travail avec Katia, nous avons aussi fait le point suivant, nous avons aussi remarqué ce qui suit, en utilisant l'ordinateur, nous avons remarqué que la forme quadratique de Weil est une forme quadratique qui n'est pas dégénérée, d'accord, donc elle n'a pas de zéro, elle n'a pas de radical, mais elle en a en fait quand on la calcule en utilisant des matrices et ainsi de suite, elle a des valeurs propres incroyablement petites. Par exemple, pour la valeur de λ carré qui est 11, d'accord, donc essentiellement quand on prend en compte les nombres premiers deux et trois et pas plus, on trouve que la plus petite valeur propre positive est de l'ordre de 10^{48} . Donc encore une fois, ce qui s'est passé, c'est que la présence de ces minuscules valeurs propres positives pour la forme quadratique de Weil qui a quelque chose à voir avec, vous savez, cet opérateur d'onde a priori, qui est conceptuellement expliqué par l'opérateur prolate ; et comment ça s'explique, ça s'explique par le fait qu'on sait, c'est un fait très simple, que si on prend la forme quadratique de Weil complète, sur la droite réelle complète, alors elle a un radical et ce radical contient des fonctions qui s'obtiennent par l'application E , qui était l'application que j'ai utilisée au début pour obtenir si on veut le spectre comme spectre d'absorption, mais cette application E ne vous donnera jamais une fonction à support compact. Pourquoi ? parce que je veux dire que si la fonction f a un support compact dominé par λ , quand on prend la somme de $f(nx)$ pour x plus grand que un, vous allez respecter ce support, d'accord. Mais alors le problème que vous avez c'est : "qu'en est-il du support quand x tend vers zéro ?", parce que nous prenons des fonctions d'une variable positive, nous sommes sur \mathbb{R} et pour faire ça, ce que vous devez faire, pour obtenir que le support de la fonction $\epsilon(f)$, je veux dire cette somme ici, soit contenu dans l'intervalle, ce que vous devez faire, c'est utiliser la transformée de Fourier de la fonction. Et vous devriez utiliser le fait que la fonction appartient à la transformée de Fourier de la projection P_λ . Mais nous savons que l'intersection entre P_λ et \widehat{P}_λ est vide. Cependant, elle est vide, mais pas

tout à fait, il y a des fonctions qui sont presque à l'intersection des deux, et encore une fois, ce sont les fonctions prolates. Donc ce que nous avons fait avec Katia, nous utilisons les fonctions prolates, nous appliquons cette formule aux fonctions prolates et ensuite, nous comparons avec... ok, donc là-dessus, je reviendrai plus tard, je veux dire. Voici la variation des valeurs propres, lorsque vous ne prenez pas en compte les nombres premiers les plus élevés, d'accord. Mais ce sont les logarithmes des plus petites valeurs propres, et vous pouvez voir que vous savez que lorsque vous allez par exemple autour de cette valeur à 7, vous obtenez quelque chose comme 10^{-60} , ce qui est incroyablement petit pour les valeurs propres. Et donc, ce que nous avons fait avec Katia, c'est de comparer les plus petites valeurs propres, celles qui nous donnaient ces nombres incroyablement petits, avec les fonctions prolates, avec ce qui se passe lorsque vous appliquez l'application aux fonctions prolates. Et ce que nous avons trouvé, par ordinateur bien sûr, d'accord, ce que nous avons trouvé, c'est qu'après avoir construit ces fonctions en utilisant les fonctions prolates d'accord par cette application, et en construisant la projection correspondante, ce que nous avons trouvé, c'est que la coïncidence est étonnante, à savoir que l'espace des vecteurs propres pour les k valeurs propres les plus basses pour la forme quadratique de Weil correspond exactement à la projection prolate. Donc, cela a été fait en les comparant, vous savez, numériquement, et quand vous voyez un graphique comme celui-ci, en fait, cela signifie qu'il y a deux graphiques qui coïncident en fait parce que vous ne voyez qu'un seul graphique. Donc, ce sont les premières valeurs, d'accord, et pour cette valeur qui était, vous savez, si petite, et puis on continue, et ensuite ce qui se passe, c'est que lorsque vous essayez de pousser plus loin, lorsque vous essayez de l'appliquer à des choses qui ne sont pas les plus petites valeurs propres, alors il y a une divergence qui apparaît mais c'est normal. Donc, vous voyez, ici, ce qui se passerait si nous n'avions pas la coïncidence, vous pouvez voir qu'il y a deux graphiques qui apparaissent, il y a un graphique bleu et il y a un graphique rouge, et ils sont clairement différents.

Bon, donc à partir de là, on a eu une idée complètement folle, avec Katia, qui était la suivante, qui était que maintenant, on allait essayer de saisir les petites valeurs propres, les petits zéros de la fonction zêta de Riemann et comment on essaie de faire ça ? On essaie de faire ça encore une fois avec l'opérateur de Dirac, et en prenant cet opérateur de Dirac, et en conditionnant l'opérateur de Dirac par cette projection prolate, c'est-à-dire, si vous voulez, en forçant l'opérateur de Dirac à avoir autant de zéros que cette fonction prolate. Et quand on a fait ça, on est allés d'une surprise à l'autre, dans le sens où on a calculé les spectres correspondants pour les petites valeurs, d'accord, et c'était comme si, vous savez, il y avait un diable dans l'arrière-scène qui se moquait de nous, parce qu'on comparait toujours ce spectre bas qui se produit pour zêta, d'accord, qui est à droite ici et je veux dire, ce qui a été montré par le calcul, c'est le calcul de l'angle des deux projections qui est presque nul. Donc ce qui s'est passé, c'est que, vous savez, nous obtenons une sorte de ressemblance de plus en plus claire entre ce que nous obtenons pour cet opérateur de Dirac et ce que nous obtenons pour les zéros de zêta. D'un autre côté, d'accord, nous n'avions aucune chance, vous savez, d'obtenir un accord complet parce que l'opérateur de Dirac sur le cercle n'a bien sûr pas le bon comportement à l'infini ; il n'a pas du tout le bon comportement des valeurs propres à l'infini. D'accord, mais nous avons continué, nous avons continué, puis nous avons compris après un certain temps que nous devons nous attendre à un accord, je veux dire que nous avons examiné, vous savez, différents cas jusqu'à 13,5 et ainsi de suite, d'accord, qui se ressemblaient de plus en plus, donc il y avait une similitude spectrale.

Et puis, on s'est rendu compte qu'en fait il y avait un théorème qui était derrière la scène, à savoir que ce qui se passait, c'est que nous obtenions cette vraisemblance, si vous voulez, de ces valeurs propres de l'opérateur de Dirac poussé si vous voulez dans l'orthogonale de ces fonctions prolates et des zéros de données, donc ce qui se passait, c'est qu'il y a un théorème derrière et donc pour arriver à ce théorème, nous avons compris que nous ne devrions pas simplement, vous savez, regarder un spectre spécifique pour une valeur spécifique de λ , mais que nous devrions comparer ce qui se passe lorsque nous changeons le nombre de fonctions prolates que nous utilisons pour conditionner. Et ce qui se passe, c'est que lorsque vous faites cela, vous découvrez que, d'accord, par exemple, si vous considérez comme nous $n + 1$ d'entre elles, elles vous donneront des graphiques différents pour les valeurs propres, mais pour certaines valeurs du paramètre λ , les deux coïncideront et lorsque les deux coïncident, elles concordent exactement avec le zéro correspondant de ζ . Nous avons donc fait cela pour la première valeur propre, pour la deuxième valeur propre, pour la troisième valeur propre, et la concordance était incroyablement bonne. Et après un certain temps, en regardant l'évolution des valeurs propres et ainsi de suite, nous avons découvert qu'il y avait un théorème mathématique derrière la scène et je vais terminer mon exposé là-dessus et ce théorème mathématique détermine complètement, si vous voulez, le spectre de basse altitude. Nous avons donc fait cela d'abord bien sûr en comparant l'évolution des valeurs propres, en comparant la façon dont elles se touchent et ainsi de suite, la façon dont elles se touchent avec les conditions de quantification, d'accord, qui ont été définies ici. Mais tout d'abord, voici la comparaison des spectres que vous obtenez en utilisant le critère que nous avons, donc ici je ne suis pas en mesure de vous dire lequel correspond aux zéros de données et lequel correspond à celui que nous avons calculé par notre critère car ils sont essentiellement identiques, je veux dire, il n'y a pas de différence. Et nous avons pu calculer ainsi les 31 premiers zéros en utilisant seulement les nombres premiers deux, trois et le nombre quatre et après avoir fait ces calculs, nous avons examiné ce qu'on appelle l'équation fonctionnelle approximative et la formule de Riemann-Siegel, et nous avons trouvé que les estimations étaient exactement les mêmes, à savoir que ce que nous avons fait était en fait de trouver une incarnation théorique de l'opérateur de la formule de Riemann-Siegel. Et l'explication conceptuelle, je serai très brève, c'est la notion de cycle ζ que nous avons décrite en détail dans notre article avec Katia.

Donc, je veux dire, pour conclure, je voudrais dire la chose suivante, vous voyez pour conclure, nous avons, dans le travail avec Henri, nous avons dévoilé un opérateur, qui est l'opérateur prolate, qui n'a à voir bien sûr qu'avec la place d'Archimède, mais qui présente déjà exactement le bon comportement ultraviolet, pour les zéros de ζ . D'accord. D'un autre côté, nous savons qu'il serait impossible d'obtenir le bon opérateur sans faire intervenir les nombres premiers. Maintenant, dans le travail avec Katia, nous faisons intervenir les nombres premiers, mais nous faisons également intervenir les fonctions prolates, sauf que nous appliquons à cette fonction prolate cette application $[\]$, et cela est lié au travail que nous avons fait avec Katia sur la formule de la trace semi-locale. Alors à ce moment-là, si vous voulez, la pièce clé qui manque dans ce puzzle, et qui devrait permettre de commencer à assembler si vous voulez l'ultraviolet avec l'infrarouge, c'est de comprendre que, quand dans le travail avec Katia, on prend l'orthogonale de la projection prolate, on était déjà en train de regarder les valeurs propres négatives d'un analogue de l'opérateur d'onde prolate mais pas pour la seule place archimédienne, mais en mettant déjà quelques-uns des nombres premiers dans la machine, en utilisant l'espace de Hilbert semi-local que j'avais défini il y a longtemps pour trouver la formule de trace semi-locale.

Donc, si vous voulez, c'est la situation maintenant, mais cela concerne beaucoup de travail et d'une certaine manière, c'est la réalisation d'un rêve de Slepian parce que lorsque Slepian a écrit des articles très intéressants, avec ses collaborateurs, et parmi ses articles il y en avait un dans lequel il avait l'impression, à cause de ce miracle, si vous voulez, de la commutativité, il avait l'impression qu'il avait affaire à quelque chose, à l'opérateur prolate, qui était beaucoup plus profond, et donc le fait que cet opérateur ici, en fait, vous savez, soit intimement lié aux zéros, je veux dire, aux zéros triviaux et non triviaux de zêta, c'est, à bien des égards, vous savez, une justification du rêve de Slepian, je veux dire, en ces temps anciens où les laboratoires Bell existaient, et ils ont malheureusement disparu depuis.

Ok, donc je pense que je terminerai mon exposé ici, oui, je souhaite vraiment terminer sur le travail de Slepian, vraiment.