C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I, p. 1231-1236, 1996
Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Formule de trace en géométrie non-commutative et hypothèse de Riemann

Alain CONNES

Collège de France, 3, rue d'Ulm, 75005 Paris, France.

Résumé. Nous réduisons l'hypothèse de Riemann pour les fonctions L sur un corps global k à la validité (non justifiée rigoureusement) d'une formule de trace pour l'action du groupe des classes d'idèles sur l'espace non-commutatif quotient des adèles par le groupe multiplicatif de k.

Trace formula in noncommutative geometry and the Riemann hypothesis

Abstract. *We reduce the Riemann hypothesis for L functions on a global field k to the validity (not rigorously justified) of a trace formula for the action of the idele class group on the noncommutative space quotient of the adeles of k by the multiplicative group of k.*

Introduction

Soit k un corps global. Ainsi k est un sous-corps discret et cocompact de l'anneau localement compact A des adèles de k. Le groupe multiplicatif J_k des idèles de k agit sur A par multiplications,

$$(j,\, a) \in J_k \times A \to ja \in A. \tag{1}$$

Nous analysons l'action du groupe $C_k = J_k/k^*$ des classes d'idèles sur l'espace quotient

$$X = A/k^*. \tag{2}$$

(Cet espace est un espace non-commutatif au sens de [3] mais la connaissance de [3] n'est pas nécessaire pour comprendre les résultats de cette Note.)

Dans la section 1 nous calculons la distribution D sur C_k caractère de la représentation naturelle de C_k dans l'espace de Hilbert $L^2_\delta(X)$ des fonctions de carré intégrable sur X. (On pose $(U(j)\eta)(a) = \eta(j^{-1}a)$ pour $j \in C_k$, $a \in X$.) Le résultat obtenu dépend (th. 1) du réel δ, $1 < \delta$, qui précise le choix de la mesure sur X. Il s'écrit,

$$D(h) = \widehat{h}(0) + \widehat{h}(1) - \sum_{\chi \in \Gamma,\, s \in \mathbf{R},\, L(\chi,\, \frac{1}{2}+is)=0} \widehat{h}(\chi,\, 1/2 + is) \tag{3}$$

Note présentée par Alain Connes.

où $\widehat{h}$ désigne la transformée de Fourier de la fonction h sur C_k, et où l'on identifie le groupe des quasi-caractères de C_k au produit d'un groupe abélien discret Γ par le groupe des quasi-caractères principaux $a \to |a|^z$, $z \in \mathbb{C}$. Il est crucial que le troisième terme du membre de droite de (3) soit précédé du signe $-$ et que la somme ne porte que sur les quasi-caractères de *partie réelle* égale à $\frac{1}{2}$.

Le résultat principal de la section 1 est le théorème 1 qui donne de manière très simple un espace de Hilbert et une action de C_k qui admet pour spectre exactement les zéros des fonctions $L(\chi, z)$ situés sur la droite critique. Cet espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est le troisième terme d'une suite exacte de C_k-modules,

$$0 \to L^2_\delta(X)_0 \to L^2_\delta(C_k) \to \mathcal{H} \to 0 \tag{4}$$

où $L^2_\delta(X_0)$ est un sous-espace de codimension 2 de $L^2_\delta(X)$ et où $L^2_\delta(C_k)$ est une variante de la représentation régulière de C_k. C'est cette suite exacte qui rend compte du signe $-$ dans (3).

Dans la section 2 nous calculons les points fixes de l'action de C_k sur X. Nous montrons que les orbites périodiques sont paramétrées par les places de k et que la contribution de la place v à la trace de l'action de C_k, donnée par les formules de [6], [9] est

$$D_v(h) = \int_{K_v^*} \frac{h(u^{-1})}{|1-u|} d^*u \tag{5}$$

où K_v désigne le corps local associé à v et où K_v^* est identifié naturellement à un sous-groupe de C_k, les mesures de Haar de C_k et K_v^* étant normalisées comme dans [12]. On notera que les distributions (3) et (5) ne sont bien définies que dans l'hyperplan des fonctions h, $h(1) = 0$ ([1]).

Les formules explicites de la théorie des nombres [12] réduisent l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L de k à démontrer (pour δ assez grand) l'égalité

$$D = \Sigma D_v \tag{6}$$

(sur l'hyperplan $h(1) = 0$).

Notations. – Soient $\delta \in \mathbb{R}$, $1 < \delta$ et $k(t) = (1+t^2)^{\delta/2}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Étant donné un groupe localement compact modulé G, $G \xrightarrow{||} \mathbb{R}_+^*$ (*cf.* [11]), on notera d^*g l'unique mesure de Haar sur G normalisée par

$$\int_{1 \le |g| \le \Lambda} d^*g \sim \operatorname{Log} \Lambda \quad \text{quand } \Lambda \to \infty. \tag{7}$$

On note $L^2_\delta(G)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur G pour la mesure $k(\operatorname{Log}|g|)d^*g$ et V la représentation régulière de G dans $L^2_\delta(G)$, de sorte que $(V(g)\eta)(u) = \eta(g^{-1}u)$, $\forall u, g \in G$ (*cf.* [10] par exemple pour le rôle de ces espaces en analyse).

I. Le C_k module $L^2_\delta(X)$, $X = A/k^*$

Soit $\mathcal{S}(A)$ l'espace de Schwartz-Bruhat des fonctions tests sur A et posons

$$\mathcal{S}(A)_0 = \left\{ f \in \mathcal{S}(A);\ f(0) = \int f dx = 0 \right\} \tag{8}$$

où dx est une mesure de Haar sur le groupe additif A. Pour toute $f \in \mathcal{S}(A)_0$ on obtient une fonction à décroissance exponentielle sur C_k en posant,

$$E(f)(u) = |u|^{1/2} \sum_{k^*} f(qu). \tag{9}$$

THÉORÈME 1. – *Soit $\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert conoyau de l'application $E : \mathcal{S}(A)_0 \to L^2_\delta(C_k)$ et soit W la représentation de C_k dans $\mathcal{H}$ obtenue par passage au quotient de la représentation régulière de C_k dans $L^2_\delta(C_k)$. Pour toute fonction $h \in \mathcal{S}(C_k)$ l'opérateur $W(h) = \int W(g)h(g)d^*g$ est traçable* (i.e. $\in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$) *et l'on a* $\mathrm{Trace}\, W(h) = \sum_{\chi \in \Gamma,\, s \in \mathbb{R},\, L(\chi,\, \frac{1}{2}+is)=0} \widehat{h}(\chi,\, is)$ *où la somme est effectuée sur les zéros des fonctions L situés sur la droite critique $\frac{1}{2} + i\mathbb{R}$, comptés avec multiplicité $< \frac{1+\delta}{2}$.*

L'application E vérifie l'équivariance,

$$EU(g) = |g|^{1/2} V(g) E \tag{10}$$

où V désigne la représentation régulière de C_k sur L^2_δ,

$$(V(g)\eta)(u) = \eta(g^{-1}u) \tag{11}$$

et où U désigne la représentation de C_k sur $\mathcal{S}(A)$,

$$(U(g)f)(x) = f(g^{-1}x), \qquad \forall x \in A. \tag{12}$$

Il résulte de (10) que la fermeture de l'image de E est un sous-espace invariant de L^2_δ.

La représentation V n'est pas unitaire mais vérifie

$$\|V(g)\| = O(|\mathrm{Log}|g||)^\delta, \qquad g \to \infty \tag{13}$$

ce qui reste vrai pour W et suffit à en déduire *a priori* que le spectre de W est unitaire. Bien entendu le théorème 1 détermine entièrement ce spectre.

En prenant $k = \mathbb{Q}$ et le sous-espace $\mathcal{H}_1$ de $\mathcal{H}$ associé au caractère $\chi = 1$, par

$$\mathcal{H}_\chi = \{\eta \in \mathcal{H};\ W(g)\eta = \chi(g)\eta,\ \forall g \in C_k,\ |g| = 1\} \tag{14}$$

on obtient,

COROLLAIRE 2. – *Soit S le générateur infinitésimal du groupe à un paramètre $W(g)$ où g parcourt la composante connexe de l'unité dans C_k, $k = \mathbb{Q}$. $S\eta = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{W(1+\varepsilon)-1}{\varepsilon}\eta$, $\eta \in \mathcal{H}_1$. L'opérateur S est fermé, à spectre discret et imaginaire pur. On a $is \in \mathrm{Spectre}\, S$ ssi $\frac{1}{2} + is$ est un zéro de partie réelle $\frac{1}{2}$ de la fonction ζ de Riemann.*

Donnons une esquisse de la démonstration du théorème 1 en prenant pour fixer les idées $k = \mathbb{Q}$, $\delta = 2$ et en se restreignant au sous-espace $\mathcal{H}_1$. On commence par identifier le dual de $\mathcal{H}_1$ au sous-espace de $L^2_{-\delta}(\mathbb{R}^*_+)$ (noter le $-\delta$)

$$\mathcal{H}_1^* = \left\{\eta \in L^2_{-\delta}(\mathbb{R}^*_+);\ \int E(f)(x)\eta(|x|)d^*x = 0,\ \forall f \in \mathcal{S}(A)_0\right\}. \tag{15}$$

Soit alors $\eta \in \mathcal{H}_1^*$ et $\varphi = \widehat{\eta}$ la distribution tempérée sur $\mathbb{R}$ transformée de Fourier de η pour la dualité $\langle \lambda,\, s\rangle = \lambda^{is}$ entre $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}$. On obtient alors l'identité

$$\left\langle \int \Delta\left(\frac{1}{2} + is\right)\varphi(s)ds,\ f\right\rangle = 0, \qquad \forall f \in \mathcal{S}(A)_0 \tag{16}$$

où $\Delta(z)$, $z \in \mathbb{C}$ est la distribution homogène (*cf.* [13], (3), p. 162)

$$\langle \Delta(z),\, f\rangle = \int_{J_k} f(x)|x|^z d^*x \qquad \text{si} \quad \mathrm{Re}\, z > 1. \tag{17}$$

On spécialise alors (16) aux fonctions $f = 1_R \otimes g$ où R est le sous-anneau compact maximal des adèles finies et où $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})_0$. On déduit, en utilisant l'égalité,

$$\left\langle \Delta\left(\frac{1}{2}+is\right),\, 1_R \otimes g \right\rangle = \zeta\left(\frac{1}{2}+is\right) \int g(u)|u|^{-1/2+is}du \tag{18}$$

que la transformée de Fourier (sur $\mathbb{R}_+^*$) de la distribution tempérée $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)\varphi(s)$ est proportionnelle à $u^{1/2}$, $u \in \mathbb{R}_+^*$. Comme cette fonction est à croissance exponentielle sur $\mathbb{R}_+^*$ (où la variable additive est $\log u$) on en conclu que $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)\varphi(s)$ est nulle au sens des distributions. Il en résulte que φ est une somme de masses de Dirac δ_s, $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)= 0$. Réciproquement si $s \in \mathbb{R}$ vérifie $\zeta\left(\frac{1}{2}+is\right)= 0$ on a (*cf.* [3]) $\Delta\left(\frac{1}{2}+is\right)= 0$ et la fonction $\eta(|x|) = |x|^{is}$ appartient à $\mathcal{H}_1^*$. Pour montrer que $W(h) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{H})$ pour $h \in \mathcal{S}(C_k)$ on utilise (13) et le contrôle suivant du rang de $W(h)$ quand le support de $\widehat{h}$ est contenu dans $\Lambda \leq |s| \leq \Lambda + 1$,

$$\operatorname{Rang} W(h) = O(\log \Lambda). \tag{19}$$

Passons à la définition du C_k-module $L_\delta^2(X)$. On définit d'abord le sous-module $L_\delta^2(X)_0$ comme le séparé complété de $\mathcal{S}(A_0)_0$ pour la semi-norme préhilbertienne,

$$\|f\|_\delta^2 = \int |\sum_{k^*} f(qx)|^2 |x| k(\log |x|) d^*x. \tag{20}$$

On notera que toute différence $f - f_q$ d'une fonction f et de f_q, $f_q(x) = f(qx)$ pour $q \in k^*$, est dans le noyau de la semi-norme (20). On notera également que la mesure $|x|d^*x$ a la même homogénéité que la mesure de Haar additive sur A.

On a une suite exacte tautologique de C_k-modules,

$$0 \to L_\delta^2(X)_0 \to L_\delta^2(C_k) \to \mathcal{H} \to 0. \tag{21}$$

Enfin on définit $L_\delta^2(X)$ de telle sorte que les C_k-modules suivants soient isomorphes,

$$\mathcal{S}(A)/\mathcal{S}(A)_0 \simeq L_\delta^2(X)/L_\delta^2(X)_0. \tag{22}$$

Bien entendu ce quotient est la somme du module $\mathbb{C}$ muni de l'action triviale et $\mathbb{C}(1)$ muni de l'action,

$$(j, \eta) \to |j|\eta. \tag{23}$$

On notera enfin qu'alors que la représentation W de C_k dans $\mathcal{H}$ est traçable au sens usuel, il est nécessaire pour définir le caractère de la représentation V de C_k dans $L_\delta^2(C_k)$ ou U dans $L_\delta^2(X)$ de prendre la partie finie quand $\varepsilon \to 0$ de l'expression

$$\operatorname{Trace}(V(h)R_\varepsilon) \tag{24}$$

où R_ε est l'opérateur de multiplication par la fonction paire sur C_k qui vaut $|x|^\varepsilon$ pour $|x| \leq 1$.

II. Les orbites périodiques de l'action de C_k sur X

Soient M une variété compacte et ξ un champ de vecteurs sans zéro sur M, $F_t = \exp t\xi$ le flot correspondant. Rappelons la formule ([6], théorème 8, p. 501) qui donne la distribution Trace $(U(t))$ où $U(t)$ désigne l'action

$$U(t)f = f \circ F_t, \qquad f \in C^\infty(M). \tag{25}$$

Si toutes les trajectoires de ξ sont non-dégénérées on a

$$\operatorname{Trace} U(t) = \sum \frac{T_\gamma^\#}{|1 - P_\gamma|}\delta(t - T_\gamma) \tag{26}$$

où la somme est effectuée sur toutes les orbites périodiques γ de période $T = T_\gamma$, où P_γ est la restriction de la différentielle $d(\exp T\xi)_x$ à l'espace transverse aux orbites (application de Poincaré); où $|1 - P_\gamma|$ est la valeur absolue du détermimant de $1 - P_\gamma$ et $T_\gamma^\#$ est la période de l'orbite primitive dont γ est l'itérée.

On peut réécrire la formule (26) sous la forme

$$\operatorname{Trace} U(h) = \sum_\pi \int_{H_\pi} h(t) \frac{1}{|1 - P_t|} d_\pi(t) \tag{27}$$

où la somme porte sur les orbites périodiques primitives π et où H_π est l'isotropie d'un point quelconque $x \in \pi$,

$$H_\pi = \{t \in \mathbb{R};\ F_t x = x\}, \tag{28}$$

alors que la mesure de Haar $d_\pi(t)$ sur H_π est normalisée de telle sorte que

$$\operatorname{Covolume} H_\pi = 1. \tag{29}$$

Sous la forme (27) cette égalité garde son sens quand on remplace $\mathbb{R}$ par un groupe localement compact commutatif modulé G.

Notons que si $H \subset G$ est cocompact la normalisation (7) des mesures de Haar de H et G assure (29).

De plus, si $H \xrightarrow{\rho} G$ est un morphisme injectif de groupes localement compacts, pour que $\rho(H)$ soit cocompact dans G il faut et il suffit que

$$H \text{ soit modulé par } u \to |\rho(u)|. \tag{30}$$

Considérons l'action de C_k sur $X = A/k^*$, on a

Proposition 2. – *Soit $x \in X$, $x \neq 0$. Pour que l'isotropie de x dans C_k soit cocompacte il faut et il suffit qu'il existe une place et une seule v de k telle que $x_v = 0$.*

En effet si x est la classe de $a \in A$ modulo k^*, l'isotropie de x est l'image dans C_k de l'isotropie H de a, $H \subset J_k$ et le morphisme $\rho : H \to C_k$ étant injectif on peut appliquer le critère (30). Cela montre que si $x_v = 0$ pour deux places distinctes $\rho(H)$ n'est pas fermé, car la restriction de $|\ \ |$ à $K_{v_1}^* \times K_{v_2}^*$ n'est pas propre. Ainsi les orbites périodiques de l'action de C_k sur X sont indexées par les places v

de k et le sous-groupe cocompact H_v associé à v est l'image de K_v^* dans C_k par l'application qui à $u \in K_v^*$ associe la classe de l'idèle j, $j_\ell = 1$, $\forall \ell \neq v$, $j_v = u$.

L'espace transverse s'identifie à K_v et l'application de Poincaré associée à $u \in H_v$ n'est autre que la multiplication

$$P_u(y) = uy, \qquad \forall\, u \in K_v^*, \quad y \in K_v. \tag{31}$$

On a $|1 - P_u| = |1 - u|$ et le terme de droite de la formule (27) s'écrit $\sum_v \int_{K_v^*} h(u) \frac{1}{|1-u|} d^*u$. En comparant les formules (12) et (25) on voit que l'expression formelle pour la trace de $U(h)$ est

$$\sum_v D_v \tag{32}$$

où D_v est donnée par la formule (5).

Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction la comparaison des formules explicites de la théorie des nombres [13] avec l'égalité $D = \sum D_v$ implique l'hypothèse de Riemann pour toutes les fonctions L de k, mais l'argument ci-dessus n'est pas une démonstration rigoureuse de cette égalité, car nous avons utilisé sans justification l'analogue de la formule (26) dans un cadre géométrique rendu beaucoup plus subtil par la nature de l'espace $X = A/k^*$.

Remarques. – L'espace non-commutatif X et l'action de C_k sur X apparaissent naturellement dans l'étude [2], *cf.* p. 455. Cette action de C_k sur X n'admet de mesure homogène de poids β que si $\beta > 0$ ce qui montre qu'elle n'est pas conjuguée à l'action opposée $(g, x) \to g^{-1}x$. Cette propriété était requise par les observations de Montgomery et Berry sur la statistique des zéros de ζ. L'espace X devrait être un bon candidat pour le site arithmétique de Deninger [4], il est relié par le théorème 1 à l'espace (J_k/k^*) considéré par Goldfed [5] et Haran [7].

(1) Cela tient pour (3) à la nécessité de régulariser la trace, ce qui fait apparaître une divergence proportionnelle à $h(1)$, la même divergence apparaît dans (5).

Remerciements. Je tiens à remercier l'Institut Américain de Mathématiques pour m'avoir invité au centième anniversaire du théorème des nombres premiers à Seattle (1996), ce qui m'a incité à réfléchir aux questions ci-dessus.

Note remise le 6 novembre 1996, acceptée le 19 novembre 1996.

Références bibliographiques

[1] **Berry M., 1986**. Riemann's zeta function: a model of quantum chaos, *Lecture Notes in Physics*, 263, Springer.
[2] **Bost J.-B. et Connes A., 1995**. Hecke Algebras, Type III factors and phase transitions with spontaneous symmetry breaking in number theory, *Selecta Mathematica*, New Series, n° 3, p. 411-457.
[3] **Connes A., 1994**. *Noncommutative Geometry*, Academic Press.
[4] **Deninger C., 1992**. Local *L*-factors of motives and regularised determinants, *Invent. Math.*, 107, p. 135-150.
[5] **Goldfeld D., 1994**. A spectral interpretation of Weil's explicit formula, *Lecture Notes in Math.*, 1593, Springer Verlag, p. 135-152.
[6] **Guillemin V., 1977**. Lectures on spectral theory of elliptic operators, *Duke Math. J.*, 44, n° 3, p. 485-517.
[7] **Haran S., 1990**. Riesz potentials and explicit sums in arithmetic, *Invent. Math.*, 101, p. 697-703.
[8] **Montgomery H., 1973**. The pair correlation of zeros of the zeta function, *Analytic Number Theory*, AMS.
[9] **Patterson S., 19..**. A compléter SVP.
[10] **Simon B., 1979**. Trace ideals and their applications, *London Math. Soc., Lecture Notes*, 35, Cambridge University Press.
[11] **Weil A., 1974**. *Basic Number Theory*, Springer, New York.
[12] **Weil A., juin 1966**. Fonctions zêta et distributions, *Séminaire Bourbaki*, n° 312.
[13] **Weil A**. Sur les formules explicites de la théorie des nombres, *Izv. Mat. Nauk.*, Ser. Mat., 36, p. 3-18.