

Entropie de Kolmogoroff Sinai et mécanique statistique quantique

Alain Connes

Résumé : Soient M une algèbre de von Neumann, ϕ un état normal sur M et $\theta \in \text{Aut } M$ un automorphisme de M tel que $\phi \circ \theta = \phi$. Nous montrons comment définir puis calculer l'analogue non commutatif $H(\theta, \phi)$ de l'entropie de Kolmogoroff et Sinai. Quand ϕ est une trace, notre définition coïncide avec celle de E. Størmer et de l'auteur.

La notion d'entropie d'une transformation ergodique avec mesure finie invariante, introduite par A. N. Kolmogoroff et J. Sinai [5] [13] joue un rôle important dans le formalisme de la thermodynamique classique. L'entropie, par unité de volume, au sens de la mécanique statistique, d'un état invariant par translations est égale à l'entropie, au sens de la théorie ergodique, du groupe des translations. ([12]).

En mécanique statistique quantique la notion d'entropie par unité de volume d'un état invariant par translations est bien comprise (cf [6] [8] [7]). Il n'existe cependant aucun analogue de l'entropie de Kolmogoroff et Sinai, sauf ([3]) dans le cas où l'état invariant est une trace, ce qui correspond à la valeur $T = +\infty$ pour la température absolue.

Le but de cette note est de montrer comment étendre la théorie élaborée dans [3] au cas général où l'état ϕ n'est plus une trace. À la difficulté principale due à la non commutativité : deux sous-algèbres de dimension finie engendrent en général une sous-algèbre de dimension infinie, se superpose la difficulté suivante : en général une sous-algèbre de dimension finie n'est pas invariante par le groupe d'automorphismes modulaires de l'état ϕ . Nous donnerons des exemples d'états d'entropie non nulle dont le groupe d'automorphismes modulaires ne laisse aucune sous-algèbre de dimension finie (sauf \mathbb{C}) globalement invariante.

Le cadre général est le suivant. Tout état invariant par translation d'un système statistique quantique définit :

- a) Une algèbre de von Neumann M ;
- b) Un état normal sur M ;
- c) Une action θ de \mathbb{Z}^d sur M laissant l'état ϕ invariant.

L'entier d est la dimension de l'espace. Nous traiterons uniquement le cas $d = 1$.

I. Entropie relative

Dans ce paragraphe, nous rappelons la définition et quelques propriétés de l'entropie relative $S(\phi_2, \phi_1)$, où ϕ_1 et ϕ_2 sont des formes linéaires positives sur une algèbre de von Neumann N de dimension finie. Le lemme 2 est crucial pour la suite. On suppose que le support $e_1 = s(\phi_1)$ de ϕ_1 est majoré par $e_2 = s(\phi_2)$. On pose

$$S(\phi_2, \phi_1) = \phi_1(\text{Log } \rho_1 - \text{Log } \rho_2)$$

Référence : Mars 1985, THES/M/85/23, Institut des Hautes Études Scientifiques, 35 route de Chartres, 91440 Bures-sur-Yvette, France.

Transcription en L^AT_EX : Denise Vella-Chemla, janvier 2026.

où $\rho_j \in N^+$ est déterminé par le choix d'une trace fidèle τ sur N par l'égalité :

$$\tau(\rho_j x) = \phi_j(x) \quad \forall x \in N^+.$$

La valeur de $S(\phi_2, \phi_1)$ est indépendante du choix de τ .

Proposition 1 ([7], [1], [2]).

- a) $S(\phi_2, \phi_1) \geq 0$ si $\phi_2(1) = \phi_1(1)$;
- b) $S(\phi_2, \phi_1) \leq 0$ si $\phi_1 \leq \phi_2$;
- c) $S(\lambda_2 \phi_2, \lambda_1 \phi_1) = \lambda_1 (S(\phi_2, \phi_1)) + \lambda_1 \operatorname{Log}(\lambda_1/\lambda_2) \phi_1(1)$;
- d) $S\left(\sum_{i=1}^n \phi_i, \sum_{i=1}^n \psi_i\right) \leq \sum_{i=1}^n S(\phi_i, \psi_i)$;
- e) Soient $M \subset N$ une sous-algèbre de von Neumann de N et ϕ_j/M la restriction de ϕ_j à M , alors

$$S(\phi_2/M, \phi_1/M) \leq S(\phi_2, \phi_1).$$

De la propriété d) nous déduisons le

Lemme 2 : Soient I et J deux ensembles finis et $\phi_{i,j}$, $i \in I$, $j \in J$ des formes linéaires positives sur N . Soit $\phi = \sum_{i,j} \phi_{i,j}$. On a

$$\sum_{i,j} S(\phi, \phi_{i,j}) \geq \sum_i S\left(\phi, \sum_j \phi_{i,j}\right) + \sum_j S\left(\phi, \sum_i \phi_{i,j}\right).$$

Démonstration : Soient τ une trace fidèle sur N et $\rho_{i,j} \in N^+$ tel que $\phi_{i,j}(x) = \tau(\rho_{i,j} x)$ $\forall x \in N^+$. On a,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} S(\phi, \phi_{i,j}) - \sum_j S(\phi, \sum_i \phi_{i,j}) \\ &= \sum_{i,j} \phi_{i,j} (\operatorname{Log} \rho_{i,j} - \operatorname{Log} \rho) - \sum_j \left(\sum_i \phi_{i,j} \left(\operatorname{Log} \left(\sum_k \rho_{k,j} \right) - \operatorname{Log} \rho \right) \right) \\ &= \sum_{i,j} \phi_{i,j} \left(\operatorname{Log} \rho_{i,j} - \operatorname{Log} \left(\sum_k \rho_{k,j} \right) \right) \\ &= \sum_{i,j} S\left(\sum_k \phi_{k,j}, \phi_{i,j}\right) \\ &\geq \sum_i S\left(\phi, \sum_j \phi_{i,j}\right). \end{aligned}$$

□

II. La fonction $H_\phi(N_1, \dots, N_n)$

Soient M une algèbre de von Neumann et ϕ un état normal sur M . Soient N_j , $j = 1, \dots, n$ des sous-algèbres de von Neumann de M , de dimension finie. En général, la sous-algèbre de M

engendrée par les N_j est de dimension infinie. Nous allons cependant définir un nombre réel fini $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \geq 0$ qui, quand M est commutative, coïncide avec l'entropie de la restriction de ϕ à l'algèbre engendrée par les N_j . Soit \mathcal{P}_n l'ensemble des applications de N^n dans le prédual de M telles que, a) $\phi_i \geq 0 \ \forall i \in \mathbb{N}^n$, b) $\sum \phi_i = \phi$, c) $\phi_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices $i \in \mathbb{N}^n$. Pour tout $\psi \in \mathcal{P}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \mathbb{N}$, posons

$$\psi_j^k = \sum_{i \in \mathbb{N}^n, i_k=j} \psi_i$$

Pour $x \in [0, 1]$ posons $\eta(x) = -x \operatorname{Log} x$ si $x > 0$ et $\eta(0) = 0$.

Définition 3 :

$$H_\phi(N_1, \dots, N_n) = \operatorname{Sup}_{\mathcal{P}_n} \left(\sum_i \eta(\psi_i(1)) + \sum_{k=1}^n \sum_j S(\phi/N_k, \psi_j^k/N_k) \right)$$

Nous appellerons partition de ϕ tout élément de \mathcal{P}_n .

Proposition 4 :

a) $0 \leq H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq \sum_{k=1}^n S(\phi/N_k) < \infty$;

b) Si M est de type I et si ϕ est un état pur, on a

$$H_\phi(N_1, \dots, N_n) = 0 \quad \forall N_1, \dots, N_n.$$

c) Si ϕ est une trace, $H_\phi(N_1, \dots, N_n)$ coïncide avec la fonction définie dans [3].

Démonstration

a) Posons $\psi_0 = \phi$ et $\psi_i = 0$ si $i \neq 0 \in \mathbb{N}^n$. On a $\psi_j^k = 0$ si $j \neq 0$ et $\psi_0^k = \phi$. Cela montre que $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \geq 0$. Soit $\psi \in \mathcal{P}_n$. La sous-additivité de l'entropie usuelle montre que,

$$\sum_i \eta(\psi_i(1)) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \sum_j \eta(\psi_j^k(1))$$

Ainsi $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq \sum_k H_\phi(N_k)$. Montrons que $H_\phi(N) \leq S(\phi/N)$. Soit $\psi \in \mathcal{P}_1$, et soit τ une trace fidèle sur N . Soient $\rho_i \in N^+$ tels que $\psi_i(x) = \tau(\rho_i x) \ \forall x \in N$ et $\rho = \sum \rho_i$. On a :

$$\begin{aligned} \sum_i \langle \eta(\psi_i(1)) + S(\phi/N, \psi_i/N) \rangle &= \sum_i \tau \langle \rho_i (\operatorname{Log} \rho_i - \operatorname{Log} \rho) \rangle - \tau(\rho) \operatorname{Log} \tau(\rho) \\ &= \sum_i \tau \langle \rho_i \operatorname{Log}(\rho_i/\tau(\rho)) \rangle - \tau(\rho) \operatorname{Log} \rho. \end{aligned}$$

Choisissons τ telle que $\tau(e) = 1$ pour tout projecteur minimal de N , on a alors $\rho_i \leq \tau(\rho_i)1_N$ et $-\tau(\rho \operatorname{Log} \rho) = S(\phi/N)$ d'où l'inégalité cherchée.

b) Si ϕ est un état pur, tout $\psi \in \mathcal{P}_n$ vérifie $\psi_i = \psi_i(1)\phi \quad \forall i$.

On a donc $S(\phi/N_k, \psi_j^k/N_k) = -\eta \langle \psi_j^k(1) \rangle$ et $H_\psi(N_1, \dots, N_n) = 0$.

c) Si ϕ est une trace, toute forme linéaire $\psi \in M_*^+, \psi \leq \phi$ détermine un unique

$$x \in M^+, 0 \leq x \leq e = \text{Support } \phi \in \text{Centre } M \text{ tel que } \psi(y) = \phi(xy) \quad \forall x \in M.$$

Comme la restriction de ϕ à M_{1-e} est nulle, on peut supposer que $e = 1$. On peut alors identifier \mathcal{P}_n à l'ensemble des partitions de l'unité utilisé dans [3]. De plus, si N est une sous-algèbre de von Neumann de dimension finie de M et $E_N(x)$ est l'espérance conditionnelle de M dans N associée à x , on a :

$$S(\phi/N, \psi/N) = \phi(E_N(x) \log E_N(x)).$$

La conclusion est alors immédiate. \square

Les propriétés fondamentales de la fonction H_ϕ sont les suivantes :

Théorème 5 : Soient $N_j, P_j, j = 1, \dots, n$ des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de M .

- a) Si $N_j \subset P_j \quad \forall j$, on a $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq H_\phi(P_1, \dots, P_n)$;
- b) $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq H_\phi(N_1, \dots, N_p) + H_\phi(N_{p+1}, \dots, N_n) \quad \forall p = 1, \dots, n$;
- c) Si $N_j \subset P_1, j = 1, \dots, k$, on a $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq H_\phi(P_1, N_{k+1}, \dots, N_n)$;
- d) Posons $\delta_{N_1}(\phi) = S(\phi/N_1) - H_\phi(N_1)$. Alors δ_{N_1} est une fonction positive, convexe, de la variable ϕ , et s'annule si $\phi = \psi \circ E$ où $\psi \in N_{1+}^*$ est une projection de norme 1 de M sur N_1 ;
- e) Si ϕ est fidèle et si l'algèbre de von Neumann P engendrée par N_1, \dots, N_n est engendrée par $P_j \subset N_j$, où $xy = yx \quad \forall x \in P_i, y \in P_j, i \neq j$ et $\sigma_t^\phi(P_j) = P_j \quad \forall j, \forall t \in \mathbb{R}$, on a

$$H_\phi(N_1, \dots, N_n) = S(\phi/P).$$

(Ici σ_y^ϕ est le groupe d'automorphismes modulaires de ϕ).

Démonstration

- a) Soit $\psi \in \mathcal{P}_n$. La proposition 1 e) montre que $S(\phi/N_k, \psi_j^k/N_k) \leq S(\phi/P_k, \psi_j^k/P_k)$, d'où le résultat.
- b) Soient $\psi \in \mathcal{P}_n, \psi' \in \mathcal{P}_p, \psi'' \in \mathcal{P}_{n-p}$ tels que

$$\psi'_i = \sum_{j_1, \dots, j_{n-p}} \psi_{i, \dots, i_p j_1 \dots j_{n-p}} \quad \forall i = (i_1 \dots i_p) \in \mathbb{N}^p$$

$$\psi''_j = \sum_{i_1, \dots, i_p} \psi_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_{n-p}} \quad \forall j = (j_1 \dots j_{n-p}) \in \mathbb{N}^{n-p}$$

La sous-additivité de l'entropie usuelle montre que,

$$\sum_{\mathbb{N}^n} \eta(\psi_i(1)) \leq \sum_{\mathbb{N}^p} \eta(\psi'_i(1)) + \sum_{\mathbb{N}^{n-p}} \eta(\psi''_i(1))$$

De plus, pour $1 \leq k \leq p$, on a $\psi_j^k = \psi_j'^k \quad \forall j \in \mathbb{N}$ et pour $k > p, k \leq n$, on a

$$\psi_j^k = \psi_j''^{k-p} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

c) En utilisant a), on peut supposer que $N_j = P_1, j = 1, 2, \dots, k$. Montrons que

$$H_\phi(P_1, \dots, P_1, N_{k+1}, \dots, N_n) \leq H_\phi(P_1, N_{k+1}, \dots, N_n).$$

Soient $\psi \in \mathcal{P}_n$ et $\psi' \in \mathcal{P}_k$ tels que $\psi'_i = \sum_{j_1, \dots, j_{n-k}} \psi_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_{n-k}} \quad \forall i = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{N}^k$.

Le lemme 2 montre que,

$$\sum_{q=1}^k \sum_j S(\phi/P_1, \psi_j^q/P_1) \leq \sum_{\mathbb{N}^k} S(\phi/P_1, \psi'_i/P_1).$$

On obtient l'inégalité cherchée en remplaçant $\psi \in \mathcal{P}_n$ par $\psi'' \in \mathcal{P}_{n-k+1}$ défini en utilisant une bijection π de \mathbb{N} dans \mathbb{N}^k par l'égalité,

$$\psi''_1 \dots, i_{n-k+1} = \psi_{\pi(i_1), i_2, \dots, i_{n-k+1}} \quad \text{avec } i_1, \dots, i_{n-k+1} \in \mathbb{N}.$$

d) La proposition 4 montre que $\delta_N(\phi) \geq 0$. Soit τ la trace sur N telle que $\tau(e) = 1$ pour tout projecteur minimal de N . Avec les notations de la proposition 4 a) on a :

$$\delta_N(\phi) = \inf_{\mathcal{P}_1} \sum (\eta(\psi_i(1)) - S(\psi_i/N)) = \inf_{\mathcal{P}_1} \sum \psi_i(1) S(\psi'_i/N)$$

où $\psi'_i = \psi_i/\psi_i(1)$ si $\psi_i(1) \neq 0$ et $\psi'_i = 0$ si $\psi_i(1) = 0$.

Cette expression montre que δ_N est une fonction convexe de ϕ . Soit E une projection de norme 1 de M sur N et supposons que $\phi = \phi_0 \cdot E$ où $\phi_0 = \phi/N$. Toute partition $\psi_i, i \in \mathbb{N}$ de ϕ_0 définit alors par composition avec E une partition de ϕ . Cela montre que pour calculer $H_\phi(N)$, on peut remplacer M par N et ϕ par ϕ_0 . Soit alors $\rho \in N$ tel que $\phi_0(x) = \tau(\rho x) \quad \forall x \in N$. Soit $\rho = \sum_{i=1}^q \lambda_i e_i$ la décomposition spectrale de ρ , où $\lambda_i \geq 0$ et où e_i est un projecteur minimal de N pour tout i . L'égalité

$$\psi_i(x) = \tau(\lambda_i e_i x) \quad \forall x \in N$$

définit une partition (ψ_i) de ϕ_0 qui montre que $H_\phi(N) = S(\phi/N)$ d'où le résultat.

e) La propriété a) et la proposition 4 a) montrent que $H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq S(\phi/P)$.

Il suffit, en utilisant a), de montrer que $S(\phi/P) \leq H_\phi(P_1, \dots, P_n)$.

Par hypothèse $\sigma_t^\phi(P_k) = P_k \quad \forall t \in \mathbb{R}, k = 1, \dots, n$. Soient $e_j^k, j \in \mathbb{N}$, des projecteurs minimaux de P_j , deux à deux orthogonaux, de somme 1, et invariants par σ_t^ϕ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Posons,

$$\psi_{i_1 \dots i_n}(x) = \phi(e_{i_1}^1 e_{i_2}^2 \dots e_{i_n}^n x) \quad \forall x \in M.$$

On vérifie que $\psi \in \mathcal{P}_n$. On a $\psi_j^k(x) = \phi(e_j^k x) \quad \forall x \in M$, d'où l'égalité $S(\phi/P_k, \psi_j^k/P_k) = 0$. Ainsi, $H_\phi(P_1, \dots, P_n) \geq \sum \eta(\phi(e_{i_1}^1 \dots e_{i_n}^n)) = S(\phi/P)$. \square

III. Entropie d'un automorphisme

Soient M une algèbre de von Neumann, ϕ un état normal sur M et θ un automorphisme de M tel que $\phi \circ \theta = \phi$.

Lemme 6 : Soit N une sous-algèbre de von Neumann de dimension finie de M .

La suite $u_n = \frac{1}{n+1} H_\phi(N, \theta(N), \dots, \theta^n(N))$ est convergente et sa limite $h_{\phi, \theta}(N)$ vérifie

$$0 \leq h_{\phi, \theta}(N) \leq S(\phi/N).$$

Démonstration : Par construction $u_n = \frac{a_{n+1}}{n+1}$ où la suite a_n vérifie $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ (théorème 5 b)) $\forall n, m \in \mathbb{N}$. La convergence de la suite u_n est donc immédiate. De plus la proposition 4 a) montre que $h_{\phi, \theta}(N) \leq S(\phi/N)$. \square

Définition 7 : L'entropie du couple (θ, ϕ) est définie par $H(\theta, \phi) = \sup_{N \in \mathfrak{F}} h_{\phi, \theta}(N)$ où \mathfrak{F} est l'ensemble des sous-algèbres de von Neumann de dimension finie de M . Pour pouvoir calculer $H(\theta, \phi)$, il est crucial de pouvoir remplacer l'ensemble \mathfrak{F} .

Nous supposerons désormais que l'algèbre de von Neumann M est hyperfinie, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante $(N_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de \mathfrak{F} , $N_k \subset N_{k+1}, \forall k \in \mathbb{N}$, telle que M soit engendrée par la réunion $\bigcup N_k$. Le résultat principal est le suivant :

Théorème 8 : On a $H(\theta, \phi) = \lim_{k \rightarrow \infty} h_{\phi, \theta}(N_k)$.

L'existence de la limite de la suite $h_{\phi, \theta}(N_k)$ est assurée par le théorème 5 a) qui montre que cette suite est croissante.

Corollaire 9 : Si M est hyperfinie, on a $H(\theta^q, \phi) = |q| H(\theta, \phi)$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$.

Corollaire 10 : Soient N_0 un facteur de dimension finie, ϕ_0 un état fidèle sur N_0 et (M, ϕ) le produit tensoriel infini,

$$(M, \phi) = \bigotimes_{\nu \in \mathbb{Z}} (N_\nu, \phi_\nu) \quad \text{avec} \quad (N_\nu, \phi_\nu) = (N_0, \phi_0) \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}.$$

Soit $\theta \in \text{Aut } M$ le shift bilatéral, alors :

$$H(\theta, \phi) = S(\phi_0).$$

Corollaire 11 : Soient A la C^* -algèbre $A = \bigotimes_{\nu \in \mathbb{Z}} A_\nu$ où $A_\nu = M_n(\mathbb{C})$ pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$, et θ le shift bilatéral, $\theta \in \text{Aut } A$. Pour tout $I \subset \mathbb{Z}$, soit $A_I = \bigotimes_{\nu \in I} A_\nu \subset A$. Soit ϕ un état θ -invariant sur A . Soient $M, \bar{\phi}, \bar{\theta}$ l'algèbre de von Neumann, l'état normal et l'automorphisme construit à partir de A, ϕ, θ , alors,

$$H(\theta, \phi) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} S(\phi/A_{I_m}) \quad \text{avec} \quad I_m = \{1, 2, \dots, m\}.$$

L'outil principal dans la démonstration du théorème 8 est le lemme suivant que nous ne démonstrerons pas ici,

Lemme 12 : a) Pour $N, P \in \mathfrak{F}$, posons

$$H_\phi(N/P) = \sup_{\mathcal{P}_1} \sum (S(\phi/N, \psi_j/N) - S(\phi/P, \psi_j/P))$$

alors

$$H_\phi(N_1, \dots, N_n) \leq H_\phi(P_1, \dots, P_n) + \sum_{k=1}^n H_\phi(N_k/P_k)$$

pour tous $N_j, P_j \in \mathfrak{F}$.

b) Soient $N \in \mathfrak{F}$ et $N_k \in \mathfrak{F}$ avec $N_k \subset N_{k+1} \quad \forall k$ et $\bigcup N_k$ dense donc $H_\phi(N, N_k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Le corollaire 11 montre que l'entropie $H(\theta, \phi)$ que nous construisons est toujours majorée par l'entropie de la mécanique statistique quantique lorsque celle-ci a un sens. Nous n'avons pas de résultat général quant à l'inégalité inverse autre que l'estimation suivante.

Théorème 13 : Soient A la C^* -algèbre $A = \bigotimes_{\nu \in \mathbb{Z}} A_\nu$, où $A_\nu = M_n(\mathbb{C})$ pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$, et $\theta \in \text{Aut } A$ le shift bilatéral. Soient $V \in \bigcup_{I \text{ fini} \subset \mathbb{Z}} A_i$, $V = V^*$ et $\sigma_t \in \text{Aut } A$ le groupe à un paramètre d'automorphismes de A engendré par la dérivation $D(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} [\theta^\nu(V), x]$ (cf [11]).

Pour tout $\beta > 0$, soit ϕ_β l'unique état θ -invariant sur A qui vérifie la condition K.M.S. par rapport à σ_t à température inverse β .

On a $H(\theta, \phi_\beta) \leq S(\phi_\beta)$ et $S(\phi_\beta) - H(\theta, \phi_\beta) \rightarrow 0$ quand $\beta \rightarrow 0$.

Ici $S(\phi_\beta)$ désigne l'entropie de la mécanique statistique quantique, c'est une fonction croissante de la température absolue et donc décroissante de β . Il est facile de donner, en utilisant [9], un exemple où $\lim_{\beta \rightarrow 0} S(\phi_\beta) > 0$ et où le groupe d'automorphismes σ_t est asymptotiquement abélien. On en déduit le

Corollaire 14 : Soit M le facteur hyperfini de type III_1 ([4]). Il existe un état normal fidèle ϕ sur M de centralisateur $M_\phi = \mathbb{C}$ et un automorphisme $\theta \in \text{Aut } M, \phi \circ \theta = \phi$ tels que $H(\theta, \phi) > 0$.

Ceci montre bien que $H(\theta, \phi)$ ne peut se calculer à partir de la restriction de θ au centralisateur de ϕ .

Remarques 15 a) Grâce à la définition de H. Araki [1] de l'entropie relative de deux états normaux sur une algèbre de von Neumann, on peut définir $H_\phi(N_1, N_2)$ lorsque N_1 et N_2 sont des sous-algèbres de von Neumann de M qui ne sont pas nécessairement de dimension finie. On obtient alors l'analogue de la propriété fondamentale de [10], sous la forme :

Si $N_1 = M$ et $\phi = \phi/N_2.E$ où E est une projection de norme 1 de M sur N_2 , on a

$$H_\phi(M, N_2) \leq \text{Log}(\lambda^{-1}) \quad \text{avec} \quad \lambda \geq 0, \quad E(x) \geq \lambda x \quad \forall x \in M^+.$$

b) On a bien entendu $H(\theta, \phi) = 0$ dès que ϕ est un état pur. En utilisant la construction de Gelfand-Naimark-Segal, il en résulte que tout triplet (M, θ, ϕ) se prolonge en un triplet $(\alpha(k), \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ d'entropie nulle.

Bibliographie

- [1] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebras, *Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ.* 11 (1975) p. 809-833.
- [2] H. Araki, Relative entropy for states of von Neumann algebras, *Publ. R.I.M.S. Kyoto University* 13 (1977).
- [3] A. Connes et E. Størmer, Entropy for automorphisms of II_1 von Neumann algebras, *Acta Math.* Vol 134 (1975) p. 289-306.
- [4] U. Haagerup, Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III_1 , *Preprint Odense University*.
- [5] A.N. Kolmogoroff, A new invariant for transitive dynamical systems, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (119) (1958) p. 861-869.
- [6] O. E. Lanford III and D. Robinson, Mean entropy of states in Quantum statistical mechanics, *J. of Math. Physics*, Vol. 9, n° (July 1968) p. 1120-1125.
- [7] E. Lieb, Convex trace functions and the Wigner-Yanase-Dyson conjecture, *Advances Nath.* 11 (1973) p. 267-288.
- [8] E. Lieb and M.B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum mechanical entropy, *J. Math. Physics* 14 (1973) 1938-1941.
- [9] B. Narhofer, On Fermi lattice systems with quadratic Hamiltonians, *Acta Phys. Austriaca* 31 (1970) p. 349-353.
- [10] M. Pimsner and S. Popa, Entropy and index for subfactors, *Preprint INCREST* (to appear in *Ann. Sci. E.N.S.*).
- [11] D. Robinson, Statistical Mechanics of quantum spin systems II, *Commun. Eath, Phys.* 7 (1968) p. 337-348.
- [12] D. Ruelle, Statistical Mechanics, Rigorous Results, *Benjamin, New York Amsterdam* (1969).
- [13] J. Sinai, On the notion of entropy of a dynamical system, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* (124) (1959) p. 768-771.