

Un même espace

Alain Connes

en préambule d'une table ronde dans le cadre d'un séminaire Mathématiques et musique organisé par Moreno Andreatta, février 2026

MORENO ANDREATTA : Nous allons questionner cette notion de créativité depuis tous ses points de vue, à partir des mathématiques. Et donc, la petite originalité de la table ronde, c'est qu'on va avoir un petit exposé, un préambule par Alain Connes, je pense que je n'ai pas à le présenter, mais en un mot, je dirais, qu'il est un mathématicien passionné d'improvisation musicale et qui cherche des liens profonds entre les mathématiques et la musique.

ALAIN CONNES : Absolument. Merci.

MORENO ANDREATTA : Ça, c'est vraiment la petite introduction que je propose.

ALAIN CONNES : Merci. Donc, ce que je vais essayer d'expliquer, parce que j'ai réfléchi, si vous voulez, on dit musique, et on dit mathématiques.

Alors, je dis, qu'est-ce qui est la chose la plus profonde en mathématiques ? Ce sont les zéros de la fonction zêta de Riemann.

Et qu'est-ce que c'est que la musique ? Pour moi, d'abord, c'est la gamme musicale.

Qu'est-ce que c'est que la gamme musicale ? Ce sont toutes les fréquences, zéro à l'infini, on n'a pas besoin de spécifier une échelle parce que la musique ne comprend que les rapports. Et qu'est-ce qui joue un rôle essentiel dans la gamme musicale ? C'est le passage à l'octave, le passage à la tierce diminuée, etc., donc c'est la multiplication par les entiers positifs.

Ce que je veux expliquer en trois minutes, c'est que cet objet-là implique celui-là, sans avoir à définir la fonction zêta de Riemann, comme par magie. Alors, comment cette magie s'opère ? Elle s'opère à travers l'idée de Grothendieck de la théorie des topos, c'est-à-dire que quand on a cette gamme musicale, on obtient un topos.

Pourquoi on a besoin d'un topos ? Parce que la topologie n'est pas suffisante pour faire le produit semi-direct d'un espace topologique par l'action d'un semi-groupe, d'un monoïde comme $\mathbb{N}^\times$. Il faut la théorie des topos de Grothendieck pour pouvoir faire cela.

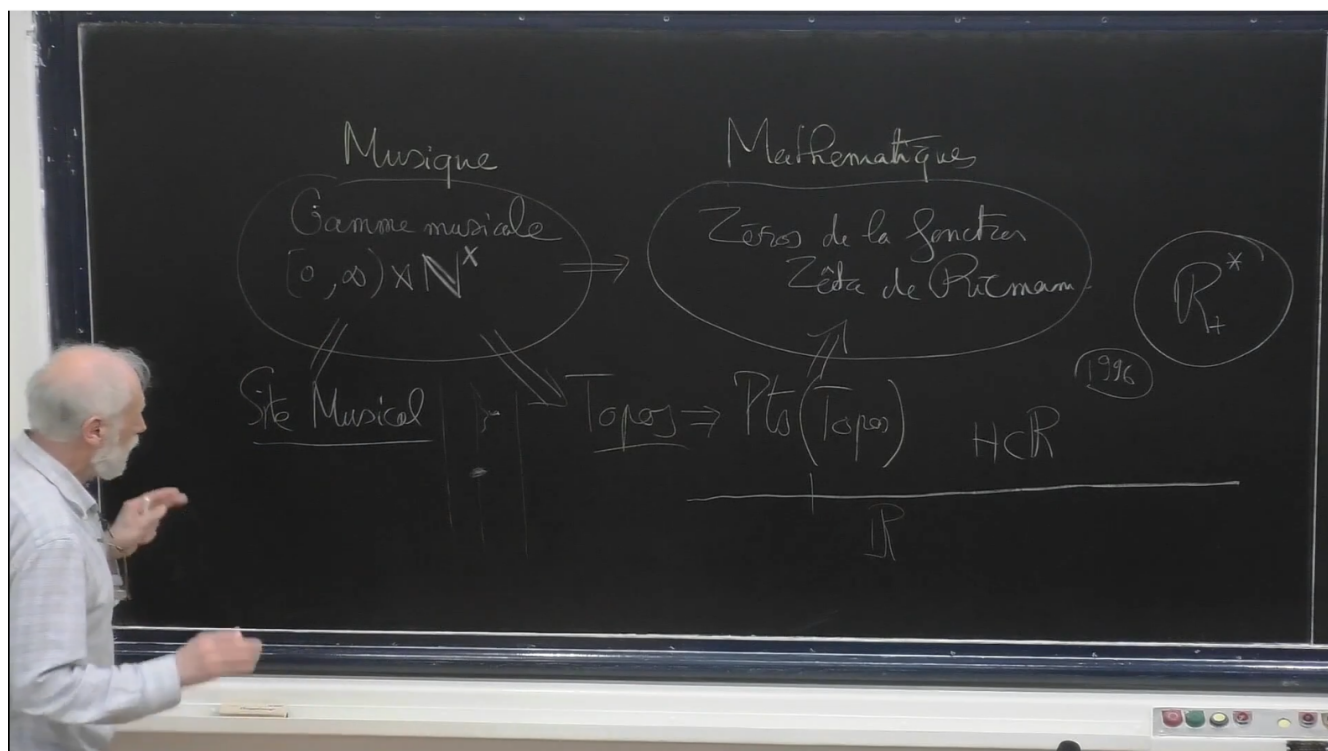
Une fois qu'on a un topos, on peut prendre les points d'un topos. Et quand on calcule les points de ce topos, ce que j'appellerais le site musical, parce qu'en fait il est donné un petit peu mieux qu'un topos, il est donné par un site de Grothendieck, donc c'est le site musical. Quand on calcule les points de ce topos, on obtient le même espace qu'un espace que j'avais construit il y a trente ans et qui donne les zéros de la fonction zêta de Riemann, et cet espace qui est l'espace des points du topos mais qui est aussi un espace non-commutatif, je vais expliquer en deux mots ce que c'est : en fait c'est l'espace des sous-groupes de la droite réelle qui sont de rang 1, c'est-à-dire que ce sont

des sous-groupes H contenus dans $\mathbb{R}$ et qui sont tels que deux éléments de H sont commensurables, alors il y en a un tas, et quand on regarde l'espace de tous ces sous-groupes, on obtient ce qu'on appelle un espace non-commutatif parce que si on utilise Zermelo-Fraenkel, on peut démontrer que sa cardinalité est celle du continu, mais on peut aussi démontrer qu'il n'existe aucune injection constructible de cet espace dans les réels.

J'avais construit cet espace là, ce qu'on calcule, je l'ai calculé dans un article avec Katia Consagni, et une fois qu'on a cet espace là, c'est très simple, j'avais fait une note aux Comptes-Rendus en 1996¹, d'obtenir les zéros de la fonction zêta de Riemann, ils apparaissent comme un spectre d'absorption en regardant l'action du groupe qui change d'échelle sur $[0, +\infty)$, donc on a une action du groupe $\mathbb{R}_+^*$ qui change d'échelle, et lorsqu'on regarde le spectre de cette action, on obtient des points du spectre quand les zéros de zêta sont sur la droite critique, là on obtient un vrai point du spectre dans le groupe dual qui est le groupe $\mathbb{R}$, et s'il arrivait qu'il y ait un zéro en dehors de la droite critique, on obtiendrait ce que les physiciens appellent une résonance.

Donc le message est clair, très simple, extrêmement simple, la seule donnée du siège de la musique suffit par elle-même pour pénétrer au plus profond des mathématiques, d'accord ?

Voilà, c'est tout ce que j'ai à dire.



1. Voir [ici](#).