

COLLÈGE DE FRANCE

CHAIRE D'ANALYSE ET DE GÉOMÉTRIE

LEÇON INAUGURALE

faite le Vendredi 11 janvier 1985

PAR

M. ALAIN CONNES

Professeur

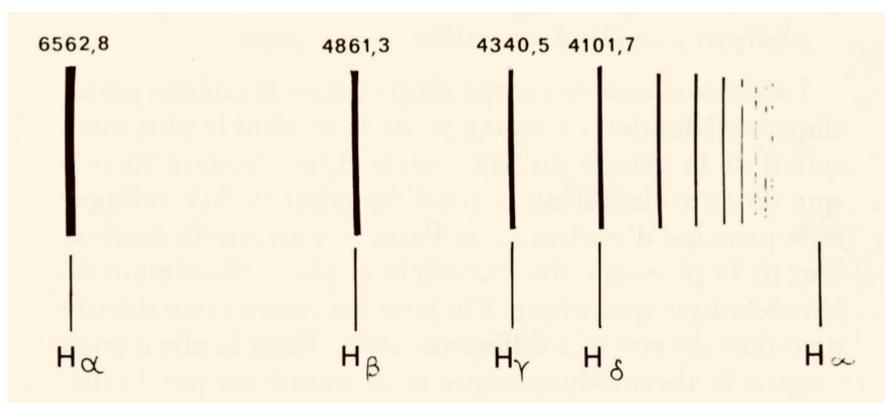
Monsieur l'Administrateur, mes chers Collègues, Mesdames et Messieurs, je m'efforcerai, dans l'exposé que je vais faire, d'abord de mettre en évidence grâce à la mécanique statistique quantique, l'interaction qui existe entre physique théorique et mathématiques pures dans le domaine spécialisé des algèbres d'opérateurs. J'essaierai ensuite de montrer le rôle en géométrie de ces mêmes algèbres d'opérateurs. J'aborderai, enfin, les problèmes attachés à la notion usuelle d'espace géométrique quand on essaie de réconcilier la théorie quantique et la relativité.

I. Heisenberg et l'algèbre non commutative des quantités physiques associées à un système microscopique.

La classification des corps simples dans le tableau périodique de Mendeleïev est sans doute le résultat le plus marquant de la chimie du XIX^e siècle. L'explication théorique de cette classification par l'équation de Schrödinger et le principe d'exclusion de Pauli, est un succès équivalent de la physique du XX^e siècle et plus précisément de la mécanique quantique. On peut envisager cette théorie de points de vue très différents. Avec Planck, elle a pour origine la thermodynamique et se manifeste par la discrétisation des niveaux d'énergie des oscillateurs. Avec Bohr, c'est la discrétisation du moment angulaire. Pour de Broglie et Schrödinger, c'est l'aspect ondulatoire de la matière. Ces divers points de vue sont tous des corollaires de celui de Heisenberg : *l'algèbre non commutative des quantité physiques*. Mon premier but sera de montrer combien ce dernier point de vue est proche de la réalité expérimentale.

Vers la fin du XIX^e siècle, de nombreux travaux expérimentaux ont permis de déterminer avec précision les raies du spectre d'émission des atomes qui composent les corps simples. On considère un tube de Geissler rempli d'un gaz tel que l'hydrogène. La lumière émise par le tube est analysée à l'aide d'un spectromètre, le plus simple étant le prisme, et l'on obtient un certain nombre de raies, indexées par leurs longueurs d'onde. La configuration ainsi

obtenue est la source la plus directe d'information sur la structure atomique. Elle ne dépend que du corps simple considéré et le caractérise. Il est donc essentiel de trouver les régularités qui apparaissent dans ces configurations ou *spectres atomiques*. C'est l'hydrogène qui, conformément au tableau de Mendeleïev, a le spectre le plus simple.



L'expression numérique de la régularité des raies $H_\alpha, H_\beta, H_\gamma, \dots$ a été obtenue par Balmer en 1885 sous la forme :

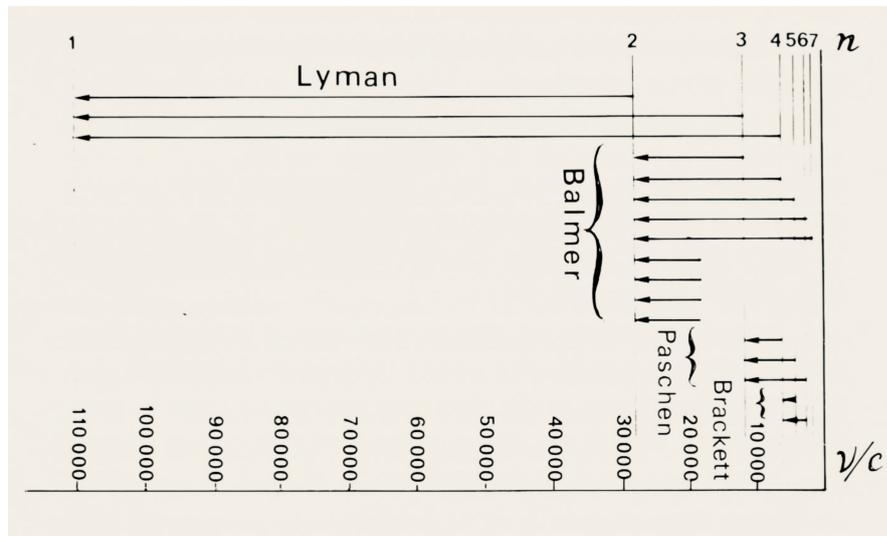
$$H_\alpha = 9/5L, H_\beta = 16/12L, H_\gamma = 25/21L, H_\delta = 36/32L$$

où la longueur L vaut approximativement $3645,6 \times 10^{-8}$ cm. Autrement dit, les longueurs d'onde ci-dessus sont de la forme $\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4}L$ où n est un entier égal à 3, 4, 5 ou 6.

Vers 1890, Rydberg montra que pour des atomes complexes, les raies du spectre peuvent se classer en séries, chacune d'elles étant de la forme $\frac{1}{\lambda} = \frac{R}{m^2} - \frac{R}{n^2}$ avec n et m entiers, m fixe.

Ici, $R = 4/L$ est la constante de Rydberg. De cette découverte expérimentale on déduira que, d'une part la fréquence $\nu = c/\lambda$ est un paramètre plus naturel que la longueur d'onde λ pour indexer les raies du spectre, et d'autre part que le spectre est un ensemble de différences, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble I de fréquences tel que le spectre soit l'ensemble des diffé-

rences $\nu_{ij} = \nu_i - \nu_j$ entre des couples arbitraires ν_i, ν_j d'éléments de I . Cette propriété montre que l'on peut combiner les fréquences ν_{ij} et ν_{jk} pour en obtenir une troisième $\nu_{ij} + \nu_{jk} = \nu_{ik}$. Ce corollaire important est le principe de composition de Ritz Rydberg, le spectre est doté naturellement d'une loi de composition partiellement définie, la somme de certaines fréquences du spectre est encore une fréquence du spectre.



Or ces résultats expérimentaux ne pouvaient s'expliquer dans le cadre de la physique théorique du XIX^e siècle, basée sur la mécanique de Newton et l'électromagnétisme de Maxwell. En effet si l'on applique la conception classique de la mécanique au niveau microscopique, un atome est alors décrit mathématiquement par l'espace des phases et l'Hamiltonien. L'espace des phases X est une variété symplectique dont les points sont les «états» du système. L'Hamiltonien H est une fonction sur X qui intervient pour spécifier l'évolution de toute quantité physique observable, i. e. de toute fonction f sur X , par l'équation

$$\frac{d}{dt}f = \{H, f\}$$

où $\{ \}$ désigne le crochet de Poisson.

Dans les bons cas, comme par exemple pour le modèle planétaire de

l'atome d'hydrogène, le système dynamique obtenu est totalement intégrable. Cela signifie qu'il a suffisamment de « constantes du mouvement » pour qu'en les spécifiant on réduise le système à un mouvement presque périodique. La description d'un tel système se fait très simplement, en effet, d'une part l'algèbre des quantités observables est l'algèbre commutative des séries presque périodiques :

$$q(t) = \sum_{q_{n_1, \dots, n_k}} \exp 2\pi i \langle n, \nu \rangle t$$

où les n_i sont des entiers, les ν_i des nombres réels positifs appelés fréquences fondamentales et $\langle n, \nu \rangle = \sum n_i \nu_i$. D'autre part, l'évolution dans le temps est donnée par la translation de la variable t .

L'interaction entre un atome classique et le champ électromagnétique est décrite par la théorie de Maxwell. Un tel atome émet une onde électromagnétique dont la partie radiative se calcule en superposant des ondes planes $W_n, n = (n_1, \dots, n_k)$ de fréquences $\langle n, \nu \rangle = \sum n_i \nu_i$, et dont l'amplitude et la polarisation se calculent simplement à partir de l'observable fondamentale qui est le moment dipolaire.

Le moment dipolaire Q a trois composantes Q_x, Q_y et Q_z qui sont chacune des quantités observables :

$$Q_x(t) = \sum q_{x,n} \exp 2\pi i \langle n, \nu \rangle t$$

et qui donnent l'intensité de la radiation émise de fréquence $\langle n, \nu \rangle$ par l'égalité

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{2}{3c^3} |2\pi \langle n, \nu \rangle|^4 (|q_{x,n}|^2 + |q_{y,n}|^2 + |q_{z,n}|^2)$$

où c désigne la vitesse de la lumière.

Il en résulte en particulier que l'ensemble des fréquences des radiations émises est un sous-groupe additif $\Gamma \subset \mathbb{R}$ des nombres réels. Ainsi à chaque fréquence émise correspondent tous ses multiples entiers ou harmoniques.

En fait, la spectroscopie et ses nombreux résultats expérimentaux montre que ce dernier résultat théorique est contredit par l'expérience, l'ensemble des fréquences émises par un atome ne forme pas un groupe, il est faux que l'addition de deux fréquences arbitraires en soit encore une. Ce que dicte l'expérience c'est le principe de composition de Ritz Rydberg qui permet d'indexer les raies spectrales par l'ensemble Δ de tous les couples (i, j) d'éléments d'un même ensemble I d'indices. La théorie de Bohr en discrétisant artificiellement le moment angulaire de l'électron parvenait à prédire les fréquences des radiations émises par l'atome d'hydrogène mais était incapable d'en prédire l'intensité et la polarisation. C'est par une remise en cause fondamentale de la mécanique classique qu'Heisenberg est parvenu à ce but, et à aller bien au-delà de ce qu'avaient fait ses prédécesseurs. Cette remise en cause de la mécanique classique est à peu près la suivante : dans le modèle classique, l'algèbre des quantités physiques observables se lit directement à partir du *groupe* Γ des fréquences émises, c'est l'algèbre de convolution de ce groupe de fréquences. Comme Γ est un groupe commutatif, cette algèbre est commutative. Or dans la réalité on n'a pas affaire à un groupe de fréquences, mais à cause de la règle de composition de Ritz Rydberg, on a affaire au groupoïde $\Delta = \{(i, j); i, j \in I\}$ avec la règle de composition $(i, j).(j, k) = (i, k)$. L'algèbre de convolution garde encore un sens quand on passe d'un groupe à un groupoïde, et l'algèbre de convolution du groupoïde Δ n'est autre que *l'algèbre des matrices*, le produit de convolution s'écrit en effet

$$(a.b)_{(i,k)} = \sum_j a_{(i,j)} b_{(j,k)}$$

ce qui est identique à la règle de composition des matrices.

En remplaçant l'algèbre commutative de convolution du groupe Γ par l'algèbre non commutative de convolution du groupoïde Δ dicté par l'expérience, Heisenberg a remplacé la mécanique classique dans laquelle des quan-

tités observables commutent deux à deux par la *mécanique des matrices*, dans laquelle des quantités observables aussi importantes que la position et le moment ne commutent plus. Dans la mécanique des matrices de Heisenberg, une quantité physique observable est donnée par ses coefficients $q_{(i,j)}$ indexés par le groupoïde Δ et l'évolution dans le temps d'une observable est donnée par l'homomorphisme $(i, j) \in \Delta \rightarrow \nu_{ij} \in \mathbb{R}$ de Δ dans \mathbb{R} , qui associe à chaque raie spectrale sa fréquence, on a :

$$(*) \quad q_{(i,j)}(t) = q_{(i,j)} \exp 2\pi i(\nu_{ij}) t$$

Cette formule est l'analogue de la formule classique

$$q_{n_1, \dots, n_k}(t) = q_{n_1, \dots, n_k} \exp 2\pi i \langle n, \nu \rangle t$$

Pour obtenir l'analogue de la loi d'évolution de Hamilton,

$$\frac{d}{dt}q = \{H, q\}$$

on définit une quantité physique particulière, H , qui joue le rôle de l'énergie classique et est donnée par ses coefficients $H_{(i,j)}$, avec :

$$H_{(i,j)} = 0 \text{ si } i \neq j, H_{(i,i)} = h\nu_i \text{ où } \nu_i - \nu_j = \nu_{ij} \forall i, j \in I$$

où h est la constante de Planck qui permet de convertir fréquences en énergies. On voit que H est définie uniquement à addition près d'un multiple de la matrice identité et de plus la formule (*) ci-dessus est équivalente à

$$(**) \quad \frac{d}{dt}q = \frac{2\pi i}{h}(Hq - qH).$$

Cette équation est semblable à celle de Hamilton qui utilisait les crochets de Poisson. Elle est en fait encore plus simple puisqu'elle n'utilise que le

produit des observables, et plus spécifiquement le commutateur, $[A, B] = AB - BA$ qui joue le rôle que jouait le crochet de Poisson en mécanique Hamiltonienne. Par analogie avec la mécanique classique, on impose aux observables q de position et p de moment de vérifier $[p, q] = i\hbar$ où $\hbar = \frac{h}{2\pi}$. La forme algébrique simple de l'énergie classique comme fonction de p et q donne alors l'équation de Schrödinger pour déterminer l'ensemble $\{\nu_i, i \in I\}$ ou spectre de H .

II. *État statistique d'un système macroscopique et mécanique statistique quantique.*

Un centimètre cube d'eau contient un nombre considérable, de l'ordre de $N = 10^{23}$, de molécules d'eau agitées d'un mouvement incessant. La description détaillée du mouvement de chaque molécule, de même que la connaissance précise de l'état microscopique du système, n'est pas nécessaire pour déterminer les résultats des observations macroscopiques. En mécanique statistique classique, un état microscopique du système est représenté par un point de l'espace des phases qui est de dimension $6N$ pour N molécules ponctuelles. Un état statistique est décrit non par un point de l'espace des phases mais par une mesure μ sur cet espace qui à chaque observable f associe sa valeur moyenne

$$\int f d\mu$$

Pour un système maintenu à température fixe en le plongeant dans un thermostat, la mesure μ est appelée ensemble canonique de Gibbs et est donnée par une formule qui invoque l'Hamiltonien H du système et la mesure de Liouville qui provient de la structure symplectique de l'espace des phases. On pose

$$d\mu = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \times \text{Mesure de Liouville}$$

où $\beta = 1/kT$, T étant la température absolue et k la constante de Boltzmann

qui vaut environ $1,38 \times 10^{-23}$ joules par degré Kelvin.

Les grandeurs thermodynamiques telles que l'entropie ou l'énergie libre se calculent en fonction de β et d'un petit nombre de paramètres macroscopiques introduits dans la formule qui donne l'Hamiltonien H . Pour un système fini l'énergie libre est une fonction analytique de ces paramètres. Pour un système infini des discontinuités apparaissent, ce qui correspond au phénomène de transition de phase. La démonstration rigoureuse, à partir de la formule mathématique qui spécifie H , de l'absence ou de l'existence de ces discontinuités est une branche difficile de l'analyse mathématique.

Mais, comme nous l'avons vu, la description microscopique de la matière ne peut se faire sans la mécanique quantique. Considérons, pour fixer les idées, un solide ayant un atome en chaque maille d'un réseau cristallin \mathbb{Z}^3 . L'algèbre des grandeurs physiques observables associées à chaque atome $x = (x_1, x_2, x_3)$ est une algèbre de matrices Q_x et si l'on suppose pour simplifier que ces atomes sont de même nature et ne peuvent occuper qu'un nombre fini n d'états quantiques, on a alors $Q_x = M_n(\mathbb{C})$ pour tout x . Soit alors Λ une partie finie du réseau, l'algèbre Q_Λ des grandeurs physiques observables pour le système formé par les atomes contenus dans Λ , est donnée par le produit tensoriel

$$Q_\Lambda = \bigotimes_{x \in \Lambda} Q_x$$

L'Hamiltonien H_Λ de ce système fini est une matrice autoadjointe $H_\Lambda \in Q_\Lambda$ Q_n qui est typiquement de la forme :

$$H_\Lambda = \sum_{x \in \Lambda} H_x + \lambda H_{\text{int}}$$

où le premier terme correspond à l'absence d'interactions entre atomes distincts et où λ est une constante de couplage qui gouverne l'intensité de l'interaction. Un état statistique du système fini Λ est donné par une forme linéaire Φ qui associe à toute observable $A \in Q_\Lambda$ sa valeur moyenne $\Phi(A)$ et

qui a les mêmes propriétés de positivité et de normalisation qu'une mesure de probabilité μ , à savoir

$$\alpha) \textit{ Positivité} : \Phi(A^*A) > 0 \quad \forall A \in Q_\Lambda$$

$$\beta) \textit{ Normalisation} : \Phi(1) = 1$$

Si l'on maintient le système à température fixe égale à T , l'état d'équilibre est donné par l'analogie quantique de la formule ci-dessus

$$\Phi_\Lambda(A) = \frac{1}{Z} \text{trace}(e^{-\beta H_\Lambda} A) \quad \forall A \in Q_\Lambda$$

où l'unique trace sur l'algèbre Q_Λ remplace la mesure de Liouville. Comme en mécanique statistique classique, les phénomènes intéressants se manifestent quand on passe à la limite thermodynamique, c'est-à-dire quand $\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^3$. Un état du système infini est donné par la famille (Φ_Λ) de ses restrictions aux systèmes finis indexés par Λ , on obtient ainsi toutes les familles (Φ_Λ) telles que :

a) Pour tout Λ , Φ_Λ est un état sur Q_Λ

b) Pour $\Lambda_1 \subset \Lambda_2$, la restriction de Φ_{Λ_2} à Q_{Λ_1} est égale à Φ_{Λ_1} .

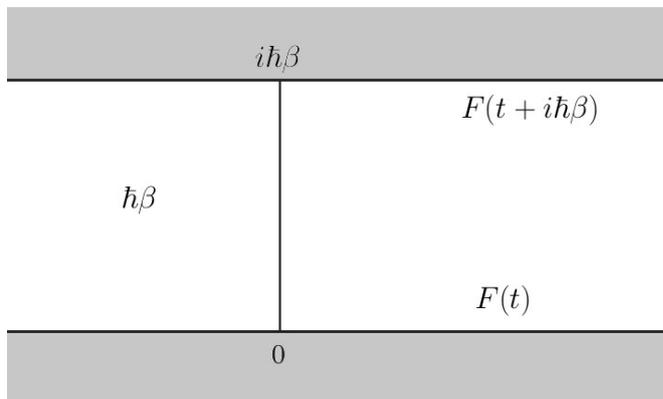
En général la famille Φ_Λ définie ci-dessus à partir de $\exp(-\beta H_\Lambda)$ ne vérifie pas la condition b) et il est nécessaire de mieux comprendre la notion d'état d'un système infini. C'est ici que les C^* algèbres font leur apparition : En effet, si l'on prend la limite inductive Q des C^* algèbres de dimension finie Q_Λ on obtient une C^* algèbre qui a la propriété suivante :

Un état arbitraire Φ sur Q est donné par une famille (Φ_Λ) vérifiant les conditions a) et b). Ainsi les familles (Φ_Λ) vérifiant a) et b), c'est-à-dire les états du système infini sont en correspondance bijective naturelle avec les états de la C^* algèbre Q . De plus, la famille H_Λ détermine de manière unique un groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de la C^* algèbre Q par l'égalité :

$$\frac{d}{dt} \alpha_t(A) = \text{Lim}_{\Lambda \rightarrow \mathbb{Z}^3} \frac{2\pi i}{h} [H_\Lambda, A] \quad A \in \cup Q_\Lambda$$

Ce groupe à un paramètre donne l'évolution dans le temps des observables du système infini données par les éléments A de Q , et est calculé par passage à la limite à partir de la formule de Heisenberg. Pour un système fini, maintenu à température T , la formule donne l'état d'équilibre de manière unique en fonction de H_Λ , mais à la limite thermodynamique on ne peut avoir de correspondance trop simple entre l'Hamiltonien du système, ou si l'on préfère le groupe d'évolution dans le temps, et l'état d'équilibre de ce système. En effet, lors des transitions de phases, des états distincts peuvent coexister, ce qui exclut l'unicité de l'état d'équilibre en fonction du groupe (α_t) . Il est impossible de donner une formule simple qui définirait de manière univoque l'état d'équilibre en fonction du groupe à un paramètre (α_t) . Il existe par contre une relation entre un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) qui ne spécifie pas toujours uniquement Φ connaissant (α_t) mais qui est l'analogue de la formule. Cette relation est *la condition de Kubo-Martin-Schwinger* : étant donné T , un état Φ sur Q et le groupe à un paramètre (α_t) d'automorphismes de Q vérifient la condition KMS si et seulement si pour tout couple A, B d'éléments de Q il existe une fonction $F(z)$ holomorphe dans la bande $\{z \in \mathbb{C} ; \text{Im } z \in [0, \hbar\beta]\}$ où $\beta = \frac{1}{kT}$, telle que

$$\begin{aligned} F(t) &= \Phi(A \alpha_t(B)) & \forall t \in \mathbb{R} \\ F(t + i \hbar\beta) &= \Phi(\alpha_t(B)A) & \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$



Ici t est un paramètre de temps, de même que $\hbar\beta$ qui pour $T = 1000^\circ$ Kelvin vaut environ 10^{-8} secondes.

Cette condition permet de formuler mathématiquement en mécanique statistique quantique le problème de la coexistence de phases distinctes à température T donnée, c'est-à-dire le problème de l'unicité de Φ , étant donné (α_t) et β . Cette même condition a joué un rôle essentiel dans la théorie modulaire des algèbres d'opérateurs et est ainsi devenue un point d'interaction indiscutable entre physique théorique et mathématiques pures.

III. *Théorie de Tomita et classification des facteurs hyperfinis.*

Entre 1957 et 1967, un mathématicien japonais Minoru Tomita, motivé en particulier par l'analyse harmonique des groupes localement compacts non unimodulaires a démontré un théorème d'une importance considérable pour la théorie des algèbres de von Neumann. Une telle algèbre est une sous-algèbre involutive de l'algèbre des opérateurs dans un espace de Hilbert h , qui a la propriété d'être le commutant de son commutant $(M')' = M$.

Théorème de Tomita. Soient M une algèbre de von Neumann dans l'espace de Hilbert h et $\xi \in h$ un vecteur tel que $M\xi$ et $M'\xi$ soient denses dans h .

Soit S l'opérateur $x\xi \rightarrow x^*\xi \quad \forall x \in M$ alors,

- 1) S est fermable et $S^{-1} = S$.
- 2) La phase J de S vérifie $JMJ = M'$.
- 3) Le module Δ de S vérifie $\Delta^{it} M \Delta^{-it} = M \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Ainsi à tout état φ sur M on associe un groupe à un paramètre σ_t^φ d'automorphismes de M , le groupe d'automorphismes modulaires de φ . C'est exactement en ce point que se produit l'interaction entre physique théorique et mathématiques pures, en effet, M. Takesaki et M. Winnink ont montré simultanément que le lien entre l'état φ et le groupe à un paramètre σ_t^φ du théorème de Tomita est exactement la condition KMS pour $\hbar\beta = 1$.

Le théorème de Tomita s'est montré d'une importance considérable pour

démarrer la classification des facteurs, ainsi que les travaux de R. Powers, d'Araki et Woods sur les facteurs produits tensoriels infinis, i. e. ceux qui proviennent de systèmes statistiques quantiques sans interaction.

Une algèbre de von Neumann M est loin d'avoir un seul état φ , ce qui fait que seules les propriétés de σ_t^φ qui ne dépendent pas du choix de φ ont une véritable signification pour M . Le second résultat important est le suivant *Théorème*. $\forall \varphi, \psi$ états sur M . Il existe un 1-cocycle canonique $t \rightarrow U_t \in M$ avec

$$\sigma_t^\psi(x) = U_t \sigma_t^\varphi(x) U_t^* \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

De plus, $\left(\frac{d}{dt} U_t\right)_{t=0}$ coïncide :

- 1) Dans le cas commutatif avec la dérivée de Radon Nikodym $\log d\psi/d\varphi$.
- 2) Dans le cas de la mécanique statistique avec la différence des Hamiltoniens correspondants à deux états d'équilibre.

Corollaire.

- a) *Étant donnée une algèbre de von Neumann M il existe un homomorphisme δ canonique de \mathbb{R} dans $\text{Out } M = \text{Aut } M / \text{Int } M$*
- b) *$\text{Ker } \delta = T(M)$ est un invariant de M .*
- c) *$\text{Sp } \delta = S(M) = \cap \text{Sp } \Delta_\varphi$.*

Ainsi les algèbres de von Neumann sont des objets *dynamiques*, une telle algèbre a automatiquement un groupe de classe d'automorphismes, paramétré par \mathbb{R} , et qui est trivial si et seulement si l'algèbre n'est pas de type III. Dix-sept ans après le théorème de Tomita, nous disposons d'une classification complète de toutes les algèbres de von Neumann hyperfinies. Au lieu de donner une définition de cette classe notons simplement que

- 1) Si G est un groupe de Lie connexe et $\pi \in \text{Rep } G$ une représentation unitaire de G alors $\pi(G)'$ est hyperfinie.
- 2) Si Γ est un groupe discret moyennable, et $\pi \in \text{Rep } \Gamma$ alors $\pi(\Gamma)'$ est hyperfinie.

- 3) Si A est une C^* algèbre limite inductive d'algèbres de dimension finie et $\pi \in \text{Rep } A$ alors $\pi(A)''$ est hyperfinie.

De plus, toute algèbre de von Neumann hyperfinie apparaît déjà dans chacune des listes 1) 2) et 3). La classification des algèbres de von Neumann hyperfinies est d'abord ramenée en écrivant $M = \int_{\oplus} M_t d\mu(t)$ à celle des facteurs, i.e. Centre $M = \mathbb{C}$. Elle est alors la suivante,

$$\begin{aligned}
\text{I}_n & M = M_n(\mathbb{C}) \\
\text{I}_\infty & M = L(h) \\
\text{II}_1 & R = \text{Cliff}(E), E \text{ espace Euclidien} \\
\text{II}_\infty & R_{0,1} = R \otimes \text{I}_\infty \\
\text{III}_\lambda & R_\lambda = \otimes_{\lambda=1}^\infty (M_2(\mathbb{C}), \varphi_\lambda) \\
\text{III}_1 & R_\infty = R_{\lambda_1} \otimes R_{\lambda_2} \quad \forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q} \\
\text{III}_0 & R_W W \text{ flot ergodique}
\end{aligned}$$

Le cas III_1 était le seul qui restait à élucider. U. Haagerup a montré récemment que tous les facteurs hyperfinis de type III_1 sont isomorphes.

IV. Rôle des algèbres d'opérateurs en géométrie.

Quand on spécialise la théorie des algèbres de von Neumann au cas très simple des *algèbres commutatives* on obtient la théorie de la mesure au sens de Lebesgue. Plus précisément, toute algèbre de von Neumann commutative M dans l'espace de Hilbert (séparable) h est engendrée par un opérateur autoadjoint H et M est le bicommutant de H .

$$\begin{aligned}
M &= \{H\}'' = \{T \in L(h), UTU^{-1} = T \quad \forall U, U \in L(h)\} \\
U^*U &= UU^* = 1, UHU^{-1} = H
\end{aligned}$$

De plus, pour toute fonction borélienne bornée f sur $X = \text{Sp } H \subset \mathbb{R}$, l'opérateur $f(H)$ a un sens, comme limite faible de polynômes $P(H)$, et

s'annule si et seulement si f est nulle presque partout pour la *mesure spectrale* de H . On obtient de cette manière un isomorphisme entre M et l'algèbre des fonctions mesurables essentiellement bornées sur le spectre de H . La théorie générale des algèbres de von Neumann apparaît ainsi comme un analogue non commutatif de la théorie de Lebesgue. L'importance mathématique de la théorie générale des algèbres de von Neumann résulte de l'existence d'espaces naturels pour lesquels la théorie de Lebesgue est inadaptée, et conduit à considérer de tels espaces comme pathologiques. La théorie des algèbres de von Neumann permet par contre de traiter la théorie de la mesure de ces espaces de manière très satisfaisante. Le prototype d'un tel espace est l'espace X des solutions d'une équation différentielle ou feuilles d'un feuilletage. Pour fixer les idées, considérons un exemple, le feuilletage de Kronecker $dy = \theta dx$ sur le tore T^2 . Si l'on essaye d'analyser cet espace, du point de vue de la théorie de la mesure, comme un espace ordinaire, on obtient un résultat pathologique : toute fonction mesurable f de X dans \mathbb{R} ou \mathbb{C} est presque partout égale à une constante. Ainsi $L^\infty(X, \mu)$ ou $L^p(X, \mu)$ sont réduits à \mathbb{C} et ne distinguent en rien l'espace X d'un point. En fait, à X correspond une algèbre de von Neumann non triviale dont le *centre* est réduit à \mathbb{C} . Alors qu'il n'est pas possible de construire une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ qui soit mesurable et non presque partout constante, il est très facile de construire une application q qui à chaque $x \in X$ associe un opérateur q_x dans l'espace L^2 de la feuille indexée par x et qui soit :

- a) Mesurable.
- b) Non presque partout constante.

On obtient une algèbre de von Neumann en utilisant les règles algébriques évidentes,

$$\begin{aligned}(pq)_x &= p_x q_x & \forall x \in X \\ (p^*)_x &= p_x^* & \forall x \in X\end{aligned}$$

et la norme : $\|p\| = \text{Sup essentiel}_{x \in X} \|p_x\|$. Dans l'exemple indiqué, l'algèbre

de von Neumann est le facteur hyperfini $R_{0,1}$ quand $\theta \notin \mathbb{Q}$. Le facteur R_∞ de type III₁ apparaît dans l'exemple du feuilletage d'Anosov associé à une surface de Riemann de genre > 1 . La théorie de la dimension de Murray et von Neumann permet de mesurer (dans le cas où l'algèbre de von Neumann est de type II) par un nombre réel positif, la dimension de l'espace des solutions L^2 d'une équation aux dérivées partielles elliptique le long des feuilles du feuilletage. Des entiers tels le nombre de pôles moins le nombre de zéros pour des fonctions méromorphes sur des variétés compactes sont alors remplacés par des densités, qui sont des nombres réels. En particulier, la *dimension continue* de Murray et von Neumann acquiert sa vraie signification de *densité de dimension*, très éloignée par exemple des dimensions de Hausdorff.

Mais des espaces tels que l'espace des feuilles d'un feuilletage ci-dessus ont en fait une structure beaucoup plus riche et rigide que celle qui leur est donnée par la théorie de la mesure, Dans la hiérarchie des moyens qui sont à notre disposition pour analyser un espace classique, la théorie de la mesure occupe en effet la place la plus primitive. Un espace ordinaire n'acquiert de connexité, de linéarité infinitésimale, et de géométrie que grâce aux théories suivantes :

- ② Topologie algébrique.
- ③ Variétés différentiables.
- ④ Géométrie Riemannienne.

Pour pouvoir adapter valablement ces trois outils aux espaces qui nous intéressent, il était nécessaire de disposer d'exemples à la fois simples, non triviaux et suffisamment généraux, possédant manifestement l'analogue de ② ③ et ④. Outre les espaces de feuilles de feuilletages de tels exemples proviennent de :

- a) Groupes discrets.
- b) Action d'un groupe de Lie (compact ou non) sur une variété.

Il n'est raisonnable de parler de l'espace, au sens classique, ensembliste, du

terme, des représentations irréductibles d'un groupe (discret) Γ que quand ce groupe est de type I. Or, cela n'arrive, en supposant que Γ est de type fini, que si Γ contient un sous-groupe normal commutatif d'indice fini. Quand le groupe Γ est commutatif, l'espace X dual de Γ est un espace compact dont la topologie est entièrement décrite grâce au théorème de Gel'fand par la C^* algèbre $C(X)$ des fonctions continues à valeur complexes sur X . Or, cette C^* algèbre est égale à la C^* algèbre de convolution $C^*(\Gamma)$. Quand Γ n'est pas de type I, l'espace X est pathologique si on lui applique les concepts classiques de la topologie, mais il est facile de voir pour le produit semi-direct $\Gamma = \mathbb{Z}^2 \times_{\alpha} \mathbb{Z}$, $\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ que l'on a bien une algèbre associée à un feuilletage. Le rôle de la K-théorie de la C^* algèbre $C^*(\Gamma)$ dans la théorie de l'homotopie des variétés non simplement connexes a été mis en évidence par les mathématiciens russes Miscenko et Kasparov. La signature Γ -équivariante est ainsi un élément de $K_0(C^*(\Gamma))$ qui est un invariant d'homotopie ($\Gamma = \pi_1(M)$). Ils ont aussi réussi à démontrer, quand Γ est un sous-groupe discret d'un groupe de Lie, la conjecture de Novikov : si M est un espace $K(\Gamma, 1)$ et $Y \xrightarrow{f} M$ une application continue, la signature

$$\sigma = \text{Signature } f^{-1}(N)$$

pour tout cycle $N \subset M$ est inchangée si l'on remplace (Y, f) par un couple (Y', f') homotope.

La K-théorie de la C^* algèbre associée à un feuilletage permet par exemple de distinguer entre eux les feuilletages de Kronecker pour différentes valeurs de θ (modulo $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$) et joue un rôle crucial dans le théorème de l'indice pour les opérateurs elliptiques le long des feuilles¹. Dans des exemples simples, elle rend très bien compte de la structure topologique du feuilletage, on dispose d'une flèche μ de la K-homologie du quotient d'homotopie vers la

1. Résultat obtenu en collaboration avec G. Skandalis.

K-théorie de la C^* algèbre, et c'est un isomorphisme dans tous les exemples calculés jusqu'à présent. Ainsi, dans 2) c'est la K-théorie qui joue le rôle central, et en fait la K-théorie bivariante de Kasparov. En ce qui concerne 3), nous possédons maintenant l'analogie non commutatif des notions de *courants de de Rham et d'homologie*, grâce à la cohomologie cyclique. Cette notion permet en particulier de définir le cycle fondamental de l'espace des feuilles d'un feuilletage transversalement orienté. Les classes caractéristiques secondaires, tel que l'invariant de Godbillon-Vey, font alors leur apparition dans la cohomologie cyclique de l'algèbre du feuilletage : le cycle fondamental C de l'espace des feuilles n'est pas en général invariant par le groupe d'automorphismes modulaires (σ_t) de l'algèbre, mais en codimension 1 sa dérivée seconde est nulle

$$\frac{d}{dt}(\text{Cycle fondamental}) \neq 0, \quad \frac{d^2}{dt^2} C = 0.$$

L'invariant de Godbillon-Vey apparaît alors comme le cycle

$$GV = i_x \frac{d}{dt} C.$$

obtenu par contraction de la dérivée première $\frac{d}{dt} C$ par le générateur X du groupe d'automorphismes modulaires.

Comme application, on obtient immédiatement que si $GV \neq 0$, l'algèbre de von Neumann associée a une composante non-triviale de type III, résultat très technique de S. Hurder. De plus, l'aspect linéarisation infinitésimale qui était la caractéristique de 3) le reste encore mais à un autre niveau, en effet, les résultats de Loday et Quillen montrent que la cohomologie cyclique est la partie indécomposable de la cohomologie de *l'algèbre de Lie* du groupe GL de l'algèbre en question. Si l'on veut mieux que la partie linéarisée du caractère de Chern d'un élément de K-homologie, on doit alors invoquer la K-théorie

algébrique. On obtient ainsi, pour tout module de Fredholm $(H, F) \in \ell^n(A)$ une flèche de $K_{n+1}^{\text{alg}}(A)$ vers C^* . Dans le cas très simple où $A = C^\infty(S^1)$ et (H, F) est l'extension de Toeplitz, on obtient l'extension centrale du groupe de lacets qui apparaît, par exemple, dans les travaux de G. Segal et G. Wilson. Quand on cherche à expliciter cette flèche pour le module de Fredholm associé à l'opérateur de Dirac, on tombe exactement sur la deuxième quantification du champ des spineurs ; mais la difficulté de manipulation de la K-théorie algébrique au-delà de K_3 limite encore notre compréhension aux dimensions 1 et 2. C'est l'apparition de la théorie des champs dans ce problème et en particulier l'égalité entre le groupe de jauge : $C^\infty(X, U_N)$ et le groupe unitaire $U(M_N(C^\infty(X)))$ qui conduisent à un certain nombre de réflexions sur la nature de l'algèbre A des fonctions de classe C^∞ sur l'espace X quand on aborde le problème de l'interaction entre la relativité générale et la mécanique quantique.

Je terminerai donc sur deux remarques simples :

1) L'espace X n'intervient que a) pour définir l'espace *linéaire* des données de Cauchy pour les champs classiques en $t = 0$ et b) pour définir le groupe de jauge U . Cela n'utilise en rien la commutativité de A .

2) La relativité, la gravitation et la mécanique quantique spécifient une grandeur, de l'ordre de 10^{-33} cm, au-delà de laquelle la notion de *point* de l'espace devient illusoire. Quel modèle plus simple peut-on donner de ce phénomène que celui de supposer que l'algèbre A n'est pas strictement commutative, comme l'algèbre A_θ . Or, il existe une généralisation naturelle de la géométrie Riemannienne pour laquelle l'algèbre des fonctions n'est plus commutative. C'est en particulier cette généralisation et ses rapports avec la physique que j'ai l'intention d'explorer dans un avenir proche.