À propos du cheminement dans les graphes

Histoire chaotique d'une idée

Jean Claude Derniame [1]

Cet article a pour origine le colloque organisé à Nancy le 14 juin 2019 en l'honneur de Claude Pair, un des fondateurs de la science informatique. Il a pour ambition de rappeler l'antériorité d'une idée apparue à Nancy à la fin des années 60 et souvent reprise, quelquefois même avec des déclarations d'originalité, mais rarement citée. Cette idée est d'ailleurs loin d'être la seule à vérifier la loi d'éponymie de Stigler : « une découverte scientifique ne porte jamais le nom de son auteur » [32]. *Pierre Lescanne a découvert cette situation au cours des recherches bibliographiques qu'il a faites pour rappeler les travaux de Claude Pair.*

Nous préciserons d'abord les problèmes de cheminement dans un graphe. Puis nous décrirons sommairement la situation de la recherche dans les années 60, avant de rappeler le travail nancéien sur les algorithmes de cheminement. L'article se terminera par une étude non exhaustive de travaux ayant ensuite traité des mêmes problèmes, avec souvent les mêmes solutions, mais en oubliant leur origine. La bibliographie est chronologique.

1. Cheminer dans un graphe

Un graphe est un couple (E,A) comprenant un ensemble E de *points* (ou nœuds) et un ensemble A d'*arcs* qui sont des couples de points, l'*origine* et l'*extrémité* de l'arc. L'ensemble A définit une *relation binaire* entre points. Nous nous intéressons ici au cas où E et A sont des ensembles finis. Un *chemin* est une suite d'arcs « à la

1. Professeur émérite, Université de Lorraine, LORIA, `jeanclaude@derniame.fr`

queue leu-leu » : pour deux arcs successifs, l'origine du premier est l'extrémité du second. Il *joint* son *origine* (celle du premier arc) à son *extrémité* (celle du dernier arc) en passant par une suite de points. Pour le *chemin vide* noté $\varnothing$, nous convenons qu'il joint tout point à lui-même. Un chemin non vide est un *circuit* si son origine et son extrémité sont identiques ; il est *élémentaire* s'il ne contient pas de circuit sauf éventuellement lui-même.

Étant donné un point x d'un graphe, quels sont les points y pour lesquels il existe un chemin joignant x à y ? Un tel problème est un cas particulier de problème de cheminement (*routing problem*), c'est-à-dire un problème portant sur les chemins d'un graphe. Il en existe beaucoup d'autres, parmi lesquels on peut citer [15] :

— existence ou non d'un chemin d'un point donné à un autre pour tous les couples de points du graphe, i.e. *fermeture transitive de la relation binaire* définie par ce graphe ;
— nombre de chemins élémentaires d'un point à un autre ;
— ensemble de tous les chemins d'un point à un autre, éventuellement vérifiant une condition simple comme d'être élémentaires, d'avoir un nombre d'arcs donné etc ;
— si chaque arc est valué par un nombre (longueur, probabilité, capacité, etc.), recherche d'une distance entre points, du (ou des) plus court(s) chemin(s), ou plus long(s), plus probable(s), de flot maximum, etc.

Les problèmes de cheminement sont donc nombreux et ils ont été étudiés depuis longtemps. Par exemple, les problèmes de ponts ou graphes eulériens (les ponts de Königsberg par Euler[2] qu'Édouard Lucas appellera ponts de Paris[3]). Leurs solutions ont beaucoup d'applications en recherche opérationnelle, en gestion de projets et ordonnancement de tâches (méthode PERT), en navigation cartographique, en économie (flots), en dépannage (recherche de composantes connexes dans un circuit électronique) et dans la vie quotidienne.

2. La situation dans les années 60

Dans les années 60, la théorie des graphes est bien connue, particulièrement en France grâce entre autres à Claude Berge [6]. L'arrivée des ordinateurs a conduit à la création d'algorithmes de cheminement, basés sur le calcul matriciel.

Cependant, les échanges entre chercheurs sont beaucoup moins abondants qu'aujourd'hui et la recherche bibliographique se fait *sans moteur*, en lisant *effectivement*

2. Leonhard Euler, « *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* », dans Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin, 1759, `https://fr.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler`.

3. Édouard Lucas, Récréations mathématiques : Les traversées, les ponts, les labyrinthes, les reines, le solitaire, la numération, le baguenaudier, le taquin, 1892, `https://www.amazon.fr/R%C3%A9cr%C3%A9ations-Math%C3%A9matiques-Travers%C3%A9es-Labyrinthes-Baguenaudier/dp/0282420401`.

les livres et les rares revues. Les chercheurs se rencontrent quelquefois, s'envoient de *vraies* lettres manuscrites par la poste et fonctionnent par le bouche à oreille, mais celui-ci ne traverse guère l'Atlantique, en grande partie pour des raisons financières.

En France, les échanges sont possibles mais limités, se faisant le plus souvent en français, essentiellement grâce aux séminaires, congrès, ainsi qu'à la revue d'une association portant les noms successifs AFCAL (1956-62), AFCALTI (1962-63), AFIRO (1963-68), AFCET (1968-98) [36], précédant la SIF d'aujourd'hui. L'objet et le titre de la revue sont liés à ceux de l'association, par exemple Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle (RIRO). La limitation des échanges peut ainsi expliquer, voire excuser, les redécouvertes et oublis de citation, comme ce fut le cas pour les travaux de Nancy.

3. Les premiers algorithmes : de Dantzig à Warshall

Un premier algorithme de cheminement est celui de Dantzig, en 1957 [1], qui détermine le plus court chemin pour tous les couples de points. La même année, Moore traite du même problème dans un symposium, mais son article paraît plus tard [4]. En 1958, paraît l'algorithme de Bellman-Kalaba [2] qui permet de déterminer les plus courts chemins d'un point donné à tous les autres. Dijkstra [3] propose un algorithme plus rapide, fondé sur une exploration du graphe, mais se limitant aux longueurs positives. Plus tard, Tomescu [16] présentera un algorithme pour les n plus courts chemins.

Bernard Roy publie, en 1959, un algorithme [5] pour la *fermeture transitive* de la relation binaire définie par un graphe (i.e. les couples de points joints par un chemin). L'article paraît dans un compte-rendu de l'Académie des sciences, recueil prestigieux mais dont la diffusion hors de France est restreinte, et il ne sera guère cité. Trois ans plus tard, Stephen Warshall décrit le même algorithme dans le journal de l'ACM [10]. De même, Floyd publie un algorithme analogue à celui de Bellman [8], et Ford le redécouvre dans un autre contexte [9]. On le citera sous les noms de Bellman-Floyd, Bellman-Ford ou Ford-Floyd-Moore...

Chacun de ces algorithmes s'applique en général à un seul problème : fermeture transitive, plus court(s) chemin(s) issus d'un point, ou distances entre tous les points, mais le « squelette » est toujours le même : l'algorithme de Mc Naughton et Yamada [7] utilisera un schéma analogue pour construire une expression régulière dénotant le langage rationnel reconnu par un automate fini, schématisé par un graphe dont les arcs sont valués par une lettre. Ce constat a conduit Claude Pair à ouvrir une voie nouvelle.

4. La contribution de Nancy

Les problèmes de cheminement consistent, pour certains couples x,y de points d'un graphe, à associer à un ensemble de chemins joignant x à y (comme ceux dont le nombre d'arcs est donné ou vérifient une autre condition comme d'être élémentaires, etc.) une information qui, selon les cas, est une valeur logique (existence d'un chemin), un nombre (distance entre deux points), un chemin (le plus court entre deux points), etc. Par exemple, on peut chercher la longueur du plus court chemin entre tout couple de points. La définition du problème peut ainsi être divisée en deux : l'ensemble des chemins étudiés et l'information demandée. Bien entendu, ce serait du gaspillage que de construire d'abord l'ensemble de chemins qui peut être très vaste et prendre beaucoup de place, pour en déduire ensuite l'information cherchée. L'idée originale de Nancy consiste à travailler sur les algorithmes et transformer celui qui construit l'ensemble de chemins en celui qui donne l'information [15, 18].

Au début de l'année 1966, Claude Pair propose à l'auteur de cet article ce sujet pour une thèse de troisième cycle [4]. Le travail commun donnera lieu à cinq publications :

— Une communication de Claude [15] pour un congrès à Rome organisé par Claude Berge, présentée en fait par Jean Claude Derniame, car Claude était retenu à Nancy pour des raisons familiales. À l'époque, c'était la manifestation internationale en théorie des graphes.
— La thèse de troisième cycle de Jean Claude [14].
— Le rapport d'un contrat de recherche [17] avec la Direction générale de la recherche scientifique et technique (DGRST), signé Claude et Jean Claude, non diffusé.
— Un article de Claude dans la revue RIRO [19].
— Un livre chez Dunod dans la collection des monographies d'informatique, à paraître en 1968 comme annoncé dans l'article ci-dessus, mais dont le manuscrit transmis à Jacques Arsac, directeur de la collection, a disparu de son bureau en mai 1968, ce que nous n'apprîmes que fin 1969. Nous n'étions pas encore à l'époque des photocopieuses à foison et nous n'en avions aucune sauvegarde. Il a fallu recommencer : cette seconde version a paru en 1971 [19].

4. En 1965, Claude Pair avait soutenu sa thèse de doctorat d'État : « Étude de la notion de pile, application à l'analyse syntaxique » [13] à la suite de l'écriture, qu'il dirigeait, d'un compilateur du langage Algol 60; l'analyse syntaxique, qui construit un arbre du programme à compiler, est la première phase de la compilation. Pour construire l'arbre, on se sert d'une pile, et, inversement, on peut utiliser une pile pour explorer un arbre, « en profondeur d'abord » ou « en largeur d'abord » dira-t-on plus tard. Un arbre est un cas particulier de graphe et c'est ce qui a conduit Claude, tout de suite après sa thèse, à proposer à Jean Claude Derniame le sujet du cheminement dans les graphes.

La communication de Rome traite des deux questions évoquées ci-dessus : la construction de divers ensembles [5] de chemins et la structure des divers types d'informations.

Algorithmes de construction d'ensembles de chemins

Les ensembles de base sont, outre l'ensemble vide noté $\varnothing$, ceux qui sont réduits à un chemin d'un arc. Les autres sont engendrés à partir d'eux par les opérations de réunion (notée $\cup$ ou $+$) et de produit (noté $\times$). Un opérande de x est un ensemble contenant des chemins ayant la même origine et la même extrémité : le produit de deux ensembles C et C' a pour éléments les chemins obtenus par *concaténation* d'un chemin de C et d'un chemin de C', ce qui suppose que l'origine de C' est l'extrémité de C. La réunion est commutative, associative et $\varnothing$ en est élément neutre ; le produit est associatif, distributif par rapport à la réunion, a un élément neutre $\{e\}$, et $\varnothing$ en est absorbant ($\forall C, C \times \varnothing = \varnothing \times C = \varnothing$). Ces propriétés définissent la structure algébrique connue sous le nom de *semi-anneau unitaire*.

Les algorithmes ne sont pas très compliqués :

Exemple 1 : Ensemble des chemins de p arcs de x à y dans un graphe (E,A) à n points.

$$J(x,y) = \begin{cases} arc(x,y) & \text{si } (x,y) \text{ est un arc} \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases},$$

$$K(x,y) = \begin{cases} \{e\} & \text{si } x = y \\ \varnothing & \text{sinon} \end{cases}, \text{ où } e \text{ est le chemin vide (cf. 2).}$$

$$\forall i \in [1,p],\ K(x,y,i) = \textstyle\bigcup_{z \in E} K(x,z,i-1) \times J(z,y)$$

Pour obtenir tous les chemins du graphe ayant p arcs, il suffit de faire une réunion des $K(x,y,p)$. Le nombre d'opérations est de l'ordre de pn^2.

Exemple 2 : Ensemble contenant les chemins élémentaires de tout x à tout y. On ordonne les points du graphe en $z_1, z_2, \ldots, z_n$ et on construit successivement des ensembles de chemins de x à y passant par les points de z_1 à z_k pour k de 1 à n, parmi lesquels les chemins élémentaires (y compris les circuits). Il suffit à chaque étape d'ajouter les chemins passant par x_k :

$$\forall x \in [1,n],\ \forall y \in [1,n],\ K(x,y) \leftarrow J(x,y)$$
$$\forall k \in [1,n],\ \forall x \in [1,n],\ \forall y \in [1,n],\ K(x,y) \leftarrow K(x,y) + K(x,z_k) \times K(z_k,y)$$

À la fin du calcul, la réunion de tous les $K(x,y)$ conduit à un ensemble contenant tous les chemins et circuits élémentaires du graphe. Pour obtenir l'ensemble des seuls chemins élémentaires, il suffit d'écarter les autres à chaque étape de l'algorithme. Le

5. La communication parle plutôt de *suites* pour se rapprocher des programmes où un ensemble est représenté par une liste de ses éléments.

nombre total d'opérations est de l'ordre de n^3 : il est donc du même ordre de grandeur que l'exemple 1, avec $p = n$.

Cependant, l'algorithme ci-dessus peut être amélioré [15]. Si $K(x,z_k) = \varnothing$, rien n'est à ajouter à $K(x,y)$. Ensuite, on peut choisir l'ordre $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des points en explorant le graphe grâce à une pile qui permet de revenir en arrière : l'ordre optimal est celui des sorties de la pile [6] et l'algorithme alors obtenu est le plus efficace [12, 19].

D'un algorithme sur les chemins à un autre pour une information sur eux

Les ensembles de chemins dont nous avons traité sont construits en utilisant les opérations de réunion et de produit. Pour obtenir un algorithme donnant une des informations (valeur logique, nombre entier, distance, probabilité, chemin vérifiant une condition...), il suffit d'interpréter autrement ces opérations ($+$ et $\times$), plus précisément de créer un homomorphisme entre l'ensemble des ensembles de chemins et celui des informations, tous deux étant structurés de la même manière, comme semi-anneaux unitaires. Du point de vue du programmeur, il suffit de décrire les opérations $+$ et $\times$ comme des fonctions dépendant du problème de cheminement traité.

Par exemple, pour l'existence (vraie ou fausse) d'un chemin entre un point et un autre, interpréter $+$ comme OU, $\times$ comme ET, $\varnothing$ comme $Faux$, un ensemble non vide comme $Vrai$:

$$\forall x \in [1,n],\ \forall y \in [1,n],\ K(x,y) \leftarrow \begin{cases} Vrai & \text{si } (x,y) \text{ est un arc} \\ Faux & \text{sinon} \end{cases}$$
$$\forall k \in [1,n],\ \forall x \in [1,n],\ \forall y \in [1,n],\ K(x,y) \leftarrow K(x,y)\ OU \{K(x,z_k)\ ET\ K(z_k,y)\}$$

Il s'agit de l'algorithme de Warshall [10] calculant la fermeture transitive de la relation associée au graphe : cet algorithme est présenté sous forme matricielle, mais la justification qu'en donne l'auteur est beaucoup moins simple que la nôtre.

Nos travaux ont permis de proposer une vingtaine d'algorithmes et leurs nombreuses variantes qui peuvent être transposés, pour une vingtaine de problèmes différents, par les homomorphismes correspondants, ce qui justifie le titre de [18] : « Mille et un algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes ». Pour [19], ils ont été programmés en Algol 60 puis Algol 68 [7]. Les premiers ont été exécutés sur l'ordinateur CAE 510 du centre universitaire de Nancy pour des graphes

6. Pour explorer le graphe, nous procédions en profondeur d'abord comme Tarjan [20], alors que Dijkstra [3] le faisait « en largeur d'abord », ces choix étant d'ailleurs sans influence sur l'efficacité de l'algorithme.

7. Le système avancé de type permettait une programmation générique. Ainsi, les notions de *mode* et d'opération *op* permettaient de décrire facilement les homomorphismes en paramétrant les programmes par ces modes.

jusqu'à 50 points et un programme PERT de 900 points [8], et leur complexité a été évaluée théoriquement et expérimentalement.

Cette étude systématique a suscité un intérêt en France, comme le montrent deux témoignages que nous avons conservés :

— Lettre du 03/02/1967 à Claude Pair de A. Kaufmann, spécialiste de combinatoire alors très connu [11] : « *Grâce à votre obligeance et à celle de votre élève Monsieur Jean-Claude Derniame, j'ai reçu les deux ouvrages suivants : Sur des algorithmes pour des problèmes de cheminement dans les graphes finis dont vous êtes l'auteur et Étude d'algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis dont M. Derniame est l'auteur. J'ai commencé la lecture de ces travaux qui sont pour moi d'un intérêt majeur étant donné mes préoccupations actuelles très axées sur les problèmes de dénombrement, énumération et optimisation dans le domaine des mathématiques combinatoires. Permettez-moi d'abord de vous féliciter tous les deux de cette contribution qui rendra les plus grands services* ».

— Préface [19] par J. Kuntzman, fondateur vers 1960 de l'IMAG (Institut de mathématiques appliquées de Grenoble) dont le rôle a été capital pour l'informatique française : « *L'histoire [du développement des algorithmes en théorie des graphes] comporte des étapes qui nous sont maintenant bien familières. On rencontre d'abord un fonctionnement très riche de « recettes de cuisine ». Puis, vient le désir de mettre un peu d'ordre. L'équipe de Nancy qui publie cet ouvrage était bien placée pour le faire. On s'aperçoit alors qu'il est possible de trouver quelques concepts simplificateurs et d'en faire une étude mathématique : dans le cas actuel, ce sont les concepts d'homomorphisme du côté des graphes et de pile du côté des algorithmes* ».

5. Publications suivantes sur le sujet

Cette idée de placer les différents problèmes de cheminement dans une structure algébrique unique pour les résoudre en transformant des algorithmes simples de construction d'ensembles de chemins va être la source d'un nombre important de publications, certaines allant plus loin que le travail nancéien, d'autres pas. La plupart ont été publiées en français, souvent dans la revue de l'AFCET, comme les travaux nancéiens. Mais Claude Pair et Jean Claude Derniame avaient quitté le domaine des graphes dès 1971 pour aborder d'autres questions ; ce qui explique qu'ils n'ont pas vu ces nouvelles publications. C'est grâce au travail bibliographique de Pierre Lescanne qu'ils apprirent récemment l'essentiel de ce qui suit.

En 1968, P. Robert et J. Ferland proposent une approche pour appliquer l'algorithme de Warshall au cas de la recherche de chemins optimaux. Ils considèrent des

8. Sur CAE 510 avec 8 Koctets et un dérouleur de bande magnétique... et deux nuits complètes !

semi-anneaux de matrices pour lesquels ils fournissent des applications pour passer de l'un à l'autre, abordant les graphes par leur matrice associée. Ils appliquent le résultat dans quatre contextes, dont un pour les automates finis, sans traiter le cas général. Ils n'avaient pas vu l'article de Pair [15], ni compris qu'ils pouvaient faire la même chose avec la plupart des algorithmes de cheminement. Il ne semble pas non plus que nous-mêmes ayons lu leur article. Dans leur livre sur les algorithmes [21], Aho, Hopcroft et Ullman affirment « *l'absence d'une approche générique pour les algorithmes de plus court chemin* » et ne mentionnent pas l'intervention de C. Pair [15] à la conférence de Rome, conférence qu'ils connaissent pourtant puisqu'ils en citent une autre communication.

M. Gondran publie « Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe » [23] et sa version anglaise [22]. Le résumé précise : « *On montre comment les problèmes de cheminement dans un graphe peuvent être résolus par des méthodes d'algèbre linéaire* ». Il s'agit d'un essai d'étude systématique dans lequel on retrouve l'ensemble du travail nancéien, cité quatre fois [9] pour les algorithmes et l'usage d'une pile, mais pas pour les transformations ; c'est pourtant le sujet important de l'article de M. Gondran et du travail de Nancy. Il s'appuie sur une structure algébrique « nouvelle », les *binoïdes* [10], et construit un binoïde de matrices carrées (matrice associée et ses puissances par exemple) ; il montre que le changement de définition des opérations du binoïde permet de passer d'un algorithme à un autre et donne quelques exemples. L'étude fait également le lien avec les méthodes classiques en algèbre linéaire, comme celle de Jacobi qui aboutit à l'algorithme de Bellman [2], celle de Gauss-Seidel qui aboutit à l'algorithme de Ford [9] et la méthode de « l'escalier » qui aboutit à l'algorithme de Dantzig [1].

M. Minoux [24] reprend le travail de M. Gondran, sans rien de nouveau, puis Gondran et Minoux publient un ouvrage sur ce sujet [26], qui reprend les propositions de [23], mais sans les références à Nancy.

M. J. Macowicz soutient à l'INSA de Lyon une thèse intitulée « Approche générique des traitements de graphes [28] ». Il reprend, pour l'approfondir, l'idée selon laquelle la résolution d'un problème de cheminement se décompose en un algorithme de construction de chemins et un homomorphisme approprié. Il introduit alors la notion de *généricité algébrique*, pour obtenir un algorithme concret par fusion entre un archétype algébrique [11] et une structure algébrique, et étudie deux cas de généricité : l'archétype *fermeture transitive* paramétré par le semi-anneau, pour lequel il cite [19], et l'archétype glouton paramétré par les structures de matroïdes. Après avoir rappelé les définitions nécessaires sur les graphes, l'auteur aborde l'application

9. À partir de [17] :« *y compris les algorithmes à pile... amélioration des algorithmes... par un rangement préalable des sommets du graphe (cf. la notion très intéressante de pile utilisée par Pair et Derniame)* »

10. Le concept de binoïde était déjà introduit, lui aussi, dans la thèse de Claude Pair [13].

11. Modèle d'algorithme ou algorithme abstrait, notion empruntée à [27].

aux problèmes de cheminement. La thèse se termine par une mise en œuvre sous la forme d'une bibliothèque d'archétypes algébriques et d'algèbres concrètes, réunis dans des « ateliers » de traitement de graphes.

L'article de Mehryar Mohri *Semiring Frameworks and Algorithms for Shortest-Distance Problems* [31] est plus choquant. Il s'appuie, pour annoncer une « nouvelle approche », sur la phrase du livre de Aho et Ulman qui mentionne « *The absence of a unifying framework for single-source shortest paths problems* ». Dans ce long article, l'auteur redéfinit les semi-anneaux et fournit un nombre important de théorèmes connus. L'idée principale est qu'il faut séparer l'algèbre qui donne un cadre et les algorithmes qui s'en servent pour résoudre des problèmes dans les différents semi-anneaux, correspondant aux domaines d'application : une paraphrase des propositions nancéiennes ! Puis il retrouve les algorithmes classiques pour les résoudre et fournit même un algorithme à pile. La complexité des différents algorithmes est analysée en détail. Tout cela n'est pas sans rappeler [18, 19, 23, 22, 26]. On ne peut que recommander leur (re ?)lecture à l'auteur ! Lecture qui lui sera facile puisqu'il a fait toutes ses études en France [12]. Notons cependant que, selon Wikipedia, cet article est parmi les trois les plus cités du *Journal of Automata Languages and Combinatorics*.

Plus tard encore, A. Delignat-Lavaud et autres [34] veulent « *montrer qu'on peut généraliser les algorithmes classiques de plus court chemin par un changement de l'algèbre sous-jacente* » : on introduit pour cela les structures algébriques dites *tropicales* [25]. Il s'agit en fait de semi-anneaux et dioïdes, et si les structures dites tropicales ont d'autres mérites, comme en géométrie et en théorie des langages [29], pour les problèmes de cheminement, cet article n'apporte rien qui n'ait été dit et répété dans les publications précédentes.

6. Chemins du monde réel

Dans de nombreuses situations concrètes, on ne peut se contenter de chemins dont les arcs sont valués par un nombre fixe, car les coûts de franchissement des arcs peuvent être variables : ils peuvent dépendre du temps ou des déplacements antérieurs, par exemple pour respecter des horaires dans un réseau de transports ou quand le coût varie en fonction du trafic.

Gondran et Minoux abordent ces problèmes dans le cadre de l'algèbre linéaire et en font une nouvelle étude systématique dans leurs ouvrages communs « Graphes, dioïdes et semi-anneaux [30, 33] ». Ils introduisent une algèbre des endomorphismes et montrent que les algorithmes itératifs (Warshall, Bellmann, Dijkstra et autres) peuvent être étendus dans cette algèbre. Puis ils établissent une liste des applications aux différents problèmes de cheminement. Cette liste reprend celle de Nancy, dont

12. Mehryar Mohri lit le français, car il a passé son enfance en France et fait ses études à Polytechnique et à la rue d'Ulm, suivi d'une thèse avec Maurice Gross.

les travaux ne sont pas cités alors qu'ils sont très similaires. Elle est complétée par deux nouveaux problèmes liés à la navigation dans les réseaux routiers : « plus court chemin avec contraintes temporelles » qui conduit à une extension des algorithmes de Ford [9] ; « plus court chemin avec longueurs fonctions du temps » qui mène à une transformation de l'algorithme de Dijkstra [3]. On cherche les chemins les plus probables, dans le cadre plus général des processus de Markov discrets. Il s'agit bien de nouvelles applications, mais c'est toujours la même approche, les nouveaux problèmes étant traités dans de nouveaux semi-anneaux. Dans cet ouvrage de référence sur les semi-anneaux et leur application à la théorie des graphes, on peut s'étonner de ne trouver aucune référence à l'*invention* de cette idée.

7. Conclusion

Comme le disent J. Baras et G. Theodorakopoulos [35] : « *Le problème du chemin algébrique est une généralisation du problème du plus court chemin dans les graphes. Divers exemples de ce problème abstrait sont apparus dans la littérature et des solutions similaires ont été découvertes et redécouvertes indépendamment. L'apparition répétée d'un problème est la preuve de sa pertinence.* »

En une cinquantaine d'années (à part, un peu, dans la thèse de Macowicz [28]), les différents articles publiés n'ont pas fondamentalement modifié cette « idée à l'histoire chaotique » apparue à Nancy, que l'on pourrait résumer de la façon suivante :

> Soit P, l'ensemble des problèmes de cheminement dans un graphe pouvant s'exprimer dans le cadre d'un semi-anneau unitaire. Appelons *Chemins* la catégorie regroupant ces semi-anneaux issus de P. Alors, pour tout couple (P_i, P_j) de problèmes, de tout algorithme construisant une solution de P_i, on peut déduire un algorithme construisant une solution de P_j par un endomorphisme de *Chemins*.

Remerciements

Remerciements particuliers à Pierre Lescanne et Claude Pair pour leurs conseils, ainsi qu'aux organisateurs du colloque dédié à Claude Pair.

Références

[1] George B Dantzig. Discrete-variable extremum problems. *Operations research*, 5(2) :266–288, 1957.

[2] Richard Bellman. On a routing problem. *Quart. Appl. Math.*, 16 :87–90, 1958.

[3] E W Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1) :269–271, 1959.

[4] E.F. Moore. *The Shortest Path Through a Maze*. Bell Telephone System. Technical publications. monograph. Bell Telephone System., 1959.

[5] Bernard Roy. Transitivité et connexité. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 249 :216–218, 1959.

[6] L. Bittner. C. berge, théorie des graphes et ses applications. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 40(5-6) :281–281, 1960.

[7] R. McNaughton and H. Yamada. Regular expressions and state graphs for automata. *IRE Transactions on Electronic Computers*, EC-9(1) :39–47, 1960.

[8] Robert W. Floyd. Algorithm 97: shortest path. *Commun. ACM*, 5(6) :345, June 1962.

[9] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

[10] Stephen Warshall. A theorem on boolean matrices. *J. ACM*, 9(1) :11–12, January 1962.

[11] A Kaufmann and Yo Malgrange. Recherche des chemins et circuits hamiltoniens d'un graphe. *Rev. Fr.: Rech. Op*, 26 :61–73, 1963.

[12] A Emond. *Application de la notion de pile à des problèmes portant à des chemins des graphes*. PhD thesis, Université de Nancy, 1965.

[13] Claude Pair. *Étude de la notion de pile, application à l'analyse syntaxique*. PhD thesis, Université de Nancy, 1965.

[14] J.C. Derniame. *Étude d'algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis*. PhD thesis, Université de Nancy, 1966.

[15] Claude Pair. *Sur des algorithmes pour les problèmes de cheminement dans les graphes finis*. Institut de Calcul Automatique Nancy, 1966.

[16] I Tomescu. Sur les méthodes matricielles dans la théorie des réseaux. *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences série a*, 263(22) :826, 1966.

[17] J.C. Derniame and Claude Pair. Problèmes de cheminement dans les graphes, rapport dgrst 65-fr-189 (non diffusé). Technical report, 1968.

[18] C Pair. Mille et un algorithmes pour les problème de cheminement dans les graphes. *Revue franqaise d'informatique et de recherche opérationelle (RIRO) B-3*, pages 125–143, 1970.

[19] Jean Claude Derniame and Claude Pair. *Problèmes de cheminement dans les graphes*, volume 8. Dunod, 1971.

[20] Robert Tarjan. Depth-first search and linear graph algorithms. *SIAM journal on computing*, 1(2) :146–160, 1972.

[21] AV Aho, JE Hopcroft, and JD Ullman. The design and analysis of computer algorithms. *Addition-Wesley, Reading, MA*, 1974.

[22] M Gondran. Path algebra and algorithms. In *Combinatorial programming: methods and applications*, pages 137–148. Springer, 1975.

[23] Michel Gondran. Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle*, 9(V1) :77–99, 1975.

[24] Michel Minoux. Structures algébriques généralisées des problemes de cheminement dans les graphes. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, 10(V2) :33–62, 1976.

[25] Imre Simon. On semigroups of matrices over the tropical semiring. *RAIRO-Theoretical Informatics and Applications*, 28(3-4) :277–294, 1994.

[26] Michel Gondran and Michel Minoux. *Graphes et algorithmes*. 3. Eyrolles Paris, 1995.

[27] Mani Chandy. Parallel program archetypes. Technical report, California inst of tech Pasadena, 1997.

[28] Maciej Macowicz. *Approche générique des traitements des graphes*. PhD thesis, Lyon, INSA, 1997.

[29] Jean-Eric Pin. Tropical semirings. idempotency (bristol, 1994), 50–69. *Publ. Newton Inst*, 11, 1998.

[30] Michel Gondran and Michel Minoux. *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*: *Nouveaux modèles et algorithmes*. Editions Tec & Doc, 2001.

[31] Mehryar Mohri. Semiring frameworks and algorithms for shortest-distance problems. *Journal of Automata, Languages and Combinatorics*, 7(3) :321–350, 2002.

[32] Stephen M Stigler. *Statistics on the table*: *The history of statistical concepts and methods*. Harvard University Press, 2002.

[33] Michel Gondran and Michel Minoux. *Graphs, dioids and semirings*: *new models and algorithms*, volume 41. Springer Science & Business Media, 2008.

[34] Antoine Delignat-Lavaud. Algèbres tropicales et plus court chemin. *Quadrature*, 72 :22–28, 2009.

[35] John S Baras and George Theodorakopoulos. Path problems in networks. *Synthesis Lectures on Communication Networks*, 3(1) :1–77, 2010.

[36] Pierre-Éric Mounier-Kuhn. L'informatique en france de la seconde guerre mondiale au plan calcul. *L'émergence d'une science, Presses de l'Université Paris-Sorbonne*, 2010.