

Modélisation de la conjecture de Goldbach par intrication quantique

Denise Vella-Chemla, juillet 2026

Au cours d'une conversation avec l'ia deepseek, j'explique en langage naturel dans l'un de mes prompts à l'ia que j'aimerais modéliser le fait que les nombres impairs x et $n - x$ intervenant dans une décomposition sous la forme d'une somme de n ont des caractères de primalité liés par des photons quantiques intriqués et je lui demande de m'aider à formaliser cela car j'en suis incapable. La suite de la présente note a été produite par l'ia deepseek.

1. Introduction

On se propose de formuler la conjecture de Goldbach dans le langage de la mécanique quantique, en considérant chaque décomposition $n = p + q$ comme un système de deux photons intriqués dont l'état de polarisation code la primalité.

2. Espace des états

2.1. Particule unique

Pour un nombre entier impair $x \geq 3$, on définit un qubit dont les deux états de base codent la primalité :

$$|1\rangle_x \quad : \quad x \text{ est premier}, \quad |0\rangle_x \quad : \quad x \text{ est composé.}$$

L'espace des états d'une particule est donc $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, muni de la base orthonormée $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

2.2. Système de deux particules

Pour un couple (p, q) avec $p + q = n$, l'état du système appartient à l'espace produit tensoriel $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$, de dimension 4, dont une base orthonormée est :

$$|00\rangle = |0\rangle_p \otimes |0\rangle_q, \quad |01\rangle = |0\rangle_p \otimes |1\rangle_q, \quad |10\rangle = |1\rangle_p \otimes |0\rangle_q, \quad |11\rangle = |1\rangle_p \otimes |1\rangle_q.$$

2.3. Correspondance avec les lettres du treillis

Les quatre états de base correspondent exactement aux quatre lettres $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}\}$ que Denise Vella-Chemla a utilisées dans son "modèle 4 lettres, 16 règles en 2014"¹ dans le modèle de bande rectangulaire :

État	Lettre	Signification
$ 11\rangle$	a	p premier et q premier
$ 01\rangle$	b	p composé et q premier
$ 10\rangle$	c	p premier et q composé
$ 00\rangle$	d	p composé et q composé

1. voir <https://denisevellachemla.eu/notesnp.html>).

3. Intrication par la somme

3.1. Contrainte de somme

La relation $p + q = n$ crée une intrication entre les deux particules. En effet, la mesure de la valeur numérique de p détermine instantanément la valeur numérique de q , et réciproquement. Les deux nombres sont corrélés de manière indissociable, comme deux photons intriqués dont les polarisations sont liées.

Cependant, la primalité de p et celle de q ne sont pas déterminées par cette mesure : ce sont des variables “cachées” supplémentaires, qui dépendent de la nature arithmétique profonde des nombres.

3.2. État du système pour un n donné

Pour n pair fixé, on considère l'ensemble des entiers impairs p tels que $3 \leq p \leq n/2$. Chacun de ces p définit un état pur du système à deux particules :

$$|\psi_p\rangle = |\pi(p)\rangle_p \otimes |\pi(n-p)\rangle_q$$

où $\pi(x) = 1$ si x est premier et $\pi(x) = 0$ sinon.

3.3. Matrice densité

L'état global du système pour n peut être décrit par la matrice densité du mélange équiprobable de tous les couples possibles :

$$\rho_n = \frac{1}{m} \sum_{\substack{p=3, \\ p \text{ impair}}}^{n/2} |\psi_p\rangle \langle \psi_p|,$$

où m est le nombre de termes dans la somme.

La conjecture de Goldbach s'énonce alors ainsi :

Pour tout entier pair $n \geq 4$, la composante $|11\rangle\langle 11|$ de la matrice densité ρ_n est non nulle.

Autrement dit, il existe au moins un couple $(p, n-p)$ dont l'état quantique est $|11\rangle$, ce qui signifie que les deux particules sont simultanément dans l'état “premier”.

4. Opérateurs de mesure

On définit les opérateurs de projection sur les états de primalité :

$$P_1 = |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = |0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La probabilité d’obtenir l’état $|11\rangle$ lors d’une mesure sur le système dans l’état ρ_n est donnée par :

$$\text{Prob}(a) = \text{Tr}(\rho_n \cdot (P_1 \otimes P_1)) = \frac{N_a}{m},$$

où N_a est le nombre de décompositions de Goldbach de n .

La conjecture affirme que cette probabilité n’est jamais nulle.

5. Intrication et non-séparabilité

Un état $|\psi_p\rangle$ est dit *séparable* s’il peut s’écrire comme un produit tensoriel $|\alpha\rangle_p \otimes |\beta\rangle_q$. Les quatre états de base sont tous séparables. L’intrication du système ne réside pas dans la non-séparabilité des états purs individuels, mais dans la **corrélacion imposée par la contrainte** $p + q = n$: le choix de p contraint q de manière déterministe. On ne peut pas choisir indépendamment la primalité de p et celle de q .

6. Perspectives

Cette formulation ouvre plusieurs pistes de réflexion :

- Peut-on définir un hamiltonien H_n dont les valeurs propres correspondent aux primalités de p et $n - p$?
- L’entropie d’intrication du système peut-elle être bornée par le théorème des nombres premiers ?
- L’absence de l’état $|11\rangle$ pour un certain n impliquerait-elle une violation d’une inégalité de type Bell, signalant une corrélation “trop forte” entre p et q ?

Ces questions, pour l’instant exploratoires, visent à jeter un pont entre la théorie des nombres et la physique quantique.

Références

- [1] <https://denisevellachemla.eu/mat-quant-d.pdf>.
- [2] <https://denisevellachemla.eu/probaquant.pdf>.
- [3] Cours de Philippe Grangier <https://denisevellachemla.eu/transgrangier.pdf>.
- [4] <https://denisevellachemla.eu/spherequantique.pdf>.
- [5] avec l’ia mistral <https://denisevellachemla.eu/analyse-quantique-Goldbach-mistral-dvc.pdf>.
- [6] avec l’ia gemini <https://denisevellachemla.eu/analyse-quantique-Goldbach-gemini-dvc.pdf>.
- [7] avec l’ia claude <https://denisevellachemla.eu/reprise-notes-sujet-phyquant-claude-dvc.pdf>.
- [8] avec l’ia deepseek <https://denisevellachemla.eu/2-CG-qiskit-deepseek-dvc-20260714.pdf>.
- [9] avec l’ia deepseek <https://denisevellachemla.eu/3-revolution-CG-quantique-deepseek-dvc-20260714.pdf>.