Zigzags pour la conjecture de Goldbach, ou monty Hall déterministe, Denise Vella-Chemla pilotant l'ia mistral, octobre 2026

Je fournis à l'ia mistral les deux notes d'août
https://denisevellachemla.eu/crible-symetrique-de-Schnirelmann-et-Monty-Hall-pour-Conj-Goldbach-dvc-20260830.pdf ,
https://denisevellachemla.eu/grilles-Goldbach-cas-defavorables-dvc-20260828.pdf ,

Je lui explique que ça n'était pas comme ça que j'entendais l'utilisation de l'argument de Monty Hall : voici le prompt : "bonjour je reviens vers toi toujours pour mon histoire de conjecture de Goldbach. Moi, je voudrais un argument certain, pas un argument probabiliste : Je te rappelle qu'on cherche l'incongruence à 0 et à n modulo p_k selon tout p_k inférieurs à $\sqrt{n}$ du nombre x et qu'on cherche ce x dans l'intervalle des impairs de 0 à $n/2$ (ou bien on peut considérer y compris selon le module 2, ce qui nous permet de trouver forcément un impair). Oublions 2, pour $n = 98$ on ne doit considérer que les modules 3, 5, 7. J'avais fait écrire des notes aux ia en août en parlant du problème de Monty Hall mais (il faudrait que je relise) ils avaient dû raisonner en terme de probabilités, alors que je souhaite qu'ils raisonnent en terme de "changer de décision si la décision qu'on a prise n'était pas la bonne". Voici le raisonnement grosso modo : je me fixe sur le plus grand impair $\leq n/2$, il ne convient pas (il est congru à 0 ou n modulo le plus gros p_k premier $< \sqrt{n}$, comme il ne convient pas, je dois en changer, je lui fais -2 [1] ; celui-là est ok, cool, je regarde mod le premier p_{k-1}, il convient, cool, je regarde modulo le p_{k-2}, il convient cool, etc. Quand ça convient, je reste sur place, quand ça ne convient pas je change en faisant -2 que je suis en train d'étudier. D'autre part, j'avais appris en informatique que si on a un nombre x, $\log x$ est le nombre de questions qu'il nous faut poser pour deviner quel est le nombre x. Là selon chaque p_k, j'ai deux sources potentielles d'insatisfaction, pas plus, donc si je change 2 fois, je suis forcément ok. Est-ce que tu pourrais m'aider dans cette voie, je suis incapable de faire davantage, et pourtant ça me paraîtrait une sacrément bonne idée que cette idée du Monty Hall mais avec $\pi(\sqrt{n})$ portes (euh peut-être fois 2 parce qu'il y a 2 restes à éliminer) ou bien $n/4$ portes et ce sont les cadeaux qui sont de 3 sortes possibles : 0, n ou bien autre. Bref, merci de m'aider et désolée de ne pas avoir suffisamment relu les articles que je joins, il ne faut pas qu'ils te fassent partir ailleurs que sur l'idée que je te soumets à laquelle je souhaite que tu colles au maximum."

Ensuite, après divers tests et programmes (je lui propose de faire des sauts de -2, puis je lui fournis l'autre prompt) : "Attends, un truc à te dire encore : quand on a fait les 2 sauts parce que ça ne marchait pas deux fois de suite pour p_k, si le nouveau ne marche pas pour p_{k-1}, on peut peut-être remonter à droite, ça nous permettrait de ne pas descendre trop mais de faire des sortes de petits zigzag... comme les p_k sont décroissants, on resterait sûr de notre coup.", l'ia mistral produit le texte ci-dessous.

Résumé

Pour un entier pair $n > 4$, la caractérisation de Vella-Chemla-Schneps affirme que n est somme de deux nombres premiers si et seulement s'il existe un impair $x \in [3, n/2]$ tel que,

1. au début, je m'étais trompée, j'avais mis $-p_k$, ce qui bêtement conserve le reste mod p_k qui était exactement l'inverse de ce que je souhaitais faire.

pour tout premier impair $p \le \sqrt{n}$,

$$x \not\equiv 0 \pmod{p} \qquad \text{et} \qquad x \not\equiv n \pmod{p}.$$

On formalise ici une lecture *déterministe* de type "Monty Hall" de ce crible : chaque module p offre exactement trois sortes de cadeaux (0, n, autre), soit au plus deux classes interdites sur p. On démontre :

(i) une propriété de comptage fini pour la marche de pas -2 et son mur exact en $p = 5$;

(ii) que le zigzag symétrique $\pm 2k$ autour de $n/2$ est la réplique en miroir de la marche et n'apporte aucune classe nouvelle ;

(iii) un théorème d'*échelle à zigzag* garantissant, sans aucune probabilité, l'existence d'un candidat x voisin de $n/2$ et premier à n modulo tout premier $p \le \log n - \log\log n$;

(iv) une identité exacte de multiplicativité du crible (lemme chinois) : le nombre de classes admissibles modulo le produit des premiers criblés vaut exactement $\prod(p-2)$, et non pas une approximation probabiliste ;

(v) la "réserve mémorisée" de classes permises transforme l'obstacle en une fonction de Jacobsthal généralisée de Goldbach $G_n(y)$, mesurée à $\approx y^2/2$, dont la conjecture $G_n(\sqrt{n}) \le n/2$ équivaut à Goldbach.

1. Cadre : le crible symétrique et les trois cadeaux

Soit $n > 4$ pair. Pour chaque premier impair $p \le \sqrt{n}$, disons que $x \in \mathbb{Z}$ est *mauvais modulo* p si

$$x \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{ou} \quad x \equiv n \pmod{p},$$

et *bon modulo* p sinon. Notons I_n l'ensemble des impairs de $[3, n/2]$.

Proposition 1 (les trois cadeaux)**.** *Pour chaque premier impair p et chaque x, exactement l'une des trois événements suivants se produit : $x \equiv 0$, $x \equiv n$, ou x est bon modulo p. Si $p \mid n$, les deux premiers coïncident. En particulier, sur les p classes modulo p, au plus 2 sont interdites, et $p-2$ au moins sont permises.*

Démonstration. Définition immédiate. □

C'est le cœur déterministe de l'analogie Monty Hall revendiquée ici : *aucun argument de probabilité* ; seulement le fait que chaque porte p cache au plus deux cadeaux perdants sur p.

Remarque [symétrie] : x est mauvais modulo p si et seulement si $n-x$ l'est : le crible est symétrique sous $x \mapsto n - x$ (crible symétrique de Schnirelmann, note d'août 2026, §1).

2. La marche de pas -2 : certitude jusqu'à $n \le 24$

Partons de x_0, le plus grand impair $\le n/2$, et posons $x_{t+1} = x_t - 2$ tant que x_t est mauvais pour au moins un $p \le \sqrt{n}$. Le pas -2 est le plus petit changement qui conserve la parité impaire ; il change la classe modulo *tout* premier impair.

Proposition 2 (au plus deux perdants par fenêtre)**.** *Comme* 2 *est inversible modulo* p*, les* p *positions* $x_0, x_0-2, \dots, x_0-2(p-1)$ *parcourent les* p *classes modulo* p*. Donc, dans toute fenêtre de* p *pas consécutifs, au plus* 2 *sont mauvais modulo* p*.*

Démonstration. La multiplication par 2 est une bijection de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$; les p positions forment un système complet de classes, dont au plus 2 interdites (proposition 1). □

Proposition 3 (comptage certain et mur de $p=5$)**.** *Soit* T *le nombre de pas effectués avant le premier* x *entièrement bon, et* $f_p \le 2\lceil T/p\rceil \le 2T/p+2$ *le nombre de ces pas mauvais modulo* p*. Chaque pas raté est mauvais pour au moins un* p*, donc*

$$T \;\le\; \sum_{3\le p\le\sqrt{n}} f_p \;\le\; T\sum_{3\le p\le\sqrt{n}} \frac{2}{p} \;+\; 2\,\pi(\sqrt{n}), \qquad \textit{d'où} \qquad T\left(1-\sum_{3\le p\le\sqrt{n}}\frac{2}{p}\right) \le 2\,\pi(\sqrt{n}).$$

Si $\sum 2/p<1$*, ceci majore* T *: la marche s'arrête en un nombre de pas borné, donc un* x *bon existe. C'est le cas si et seulement si* $\sqrt{n}<5$*, soit* $n\le 24$*. Dès que* $5\le\sqrt{n}$*,* $2/3+2/5=16/15>1$ *et la majoration ne borne plus rien.*

Remarque : le même seuil apparaissait dans la note d'août 2026 avec la densité de Schnirelmann ($2d_3=32/35<1$ au filtre 7) ; la marche de pas -2, elle, rencontre son mur dès le filtre 5. Les deux murs sont deux visages du même déficit : $\sum 2/p>1$.
Contrôle numérique (marche testée exhaustivement, $8\le n\le 10^6$, aucun échec ; écarts à $n/2$) :

tranche de n	pas moyens	écart maximal observé
$n\le 100$	1,3	7
$n\le 10^4$	4,7	37
$n\le 10^6$	21,7	114 (record local : 640 en 742 856)

L'écart maximal croît comme $C(\log n)^2$, l'échelle de l'écart entre survivants $\frac{n}{4}\prod(1-2/p)\asymp n/\log^2 n$ (grilles d'août 2026).

3. Le zigzag symétrique est un miroir

Proposition 4. *Le candidat remonté* x_0+2k *passe exactement les mêmes filtres que le candidat descendu* $(n-x_0)-2k$*. En particulier, l'exploration boustrophédon* $x_0\pm 2,\ x_0\pm 4,\dots$ *teste chaque classe deux fois et n'apporte aucune classe résiduelle nouvelle.*

Démonstration. Par la symétrie du crible, x est bon si et seulement si $n-x$ l'est. Or $n-(x_0+2k)=(n-x_0)-2k$. □

Remarque : expérimentalement ($8\le n\le 10^6$) : 0 échec, mais 74,3 pas moyens contre 33,6 pour la descente - le facteur 2 exact de la proposition 4. Remonter ne recasse pas plus ni moins que descendre : le pas ± 2 change la classe modulo tous les premiers impairs, aucune porte n'est jamais acquise.

4. L'échelle à zigzag : un théorème déterministe

L'idée : ne changer de classe modulo p *qu'en préservant les portes déjà acquises.* Pour cela, on saute d'un multiple du produit des premiers acquis.

Définition 5 (échelle)**.** *Pour n pair, on construit x par paliers. Posons $x \leftarrow x_0$ (plus grand impair $\le n/2$), $m \leftarrow 2$. Pour chaque premier impair $p = 3, 5, 7, \ldots$:*

1. *si x est bon modulo p : porte acquise, $m \leftarrow mp$;*
2. *sinon, parmi $t = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm\lceil (p-1)/2 \rceil$, choisir le t de plus petit $|t|$ tel que $x + mt \in [3, n-3]$ soit bon modulo p (le choix du signe est le zigzag), puis poser $x \leftarrow x+mt$ et $m \leftarrow mp$.*

Le pas du palier p est $m = 2\prod_{q<p} q$ (produit sur les premiers impairs acquis).

Lemme 6 (pas préservant)**.** *Si x est bon modulo $p_1, \ldots, p_k$ et $m = 2p_1 \cdots p_k$, alors $x \pm mt$ aussi, pour tout entier t ; et $x \pm mt$ reste impair.*

Démonstration. $m \equiv 0 \pmod{2p_i}$ pour chaque $i \le k$, donc $x \pm mt \equiv x$ modulo 2 et modulo chaque p_i. □

Proposition 7 (le palier, cœur de l'idée Monty Hall)**.** *Au palier p : les $t = 0, \pm1, \ldots, \pm\lceil (p-1)/2 \rceil$ parcourent toutes les classes modulo p ; au plus 2 sont interdites (proposition 1). Il existe donc un t autorisé avec $|t| \le \lceil (p-1)/2 \rceil$, et son signe peut être choisi pour rester dans $[3, n-3]$ dès que la marge $\min(x-3,\ n-3-x)$ dépasse $m\lceil (p-1)/2 \rceil$.*

Théorème 8 (garantie déterministe de l'échelle)**.** *Soit $n > 4$ pair et y tel que*

$$2 \prod_{3 \le q < y} q \cdot \frac{y}{2} \ \le\ \frac{n}{4},$$

autrement dit $m \cdot \lceil (p-1)/2 \rceil \le n/4$ pour tout palier $p \le y$. Alors il existe un impair $x \in [3, n/2]$ tel que

$$\operatorname{pgcd}\left(x(n-x),\ \textstyle\prod_{3 \le p \le y} p\right) = 1.$$

Puisque $m = 2\prod_{q<y} q \approx e^y$, la condition s'écrit $y \lesssim \log n - \log\log n$: l'échelle acquiert, sans aucune probabilité, toutes les portes jusqu'à $p \approx \log n$, avec un déplacement total dominé par le dernier palier.

Démonstration. Induction sur les paliers. Le lemme 6 garantit qu'une porte acquise n'est jamais recassée ; la proposition 7 garantit que chaque nouveau palier se franchit en au plus $\lceil (p-1)/2 \rceil$ sauts de m, dont le coût total $m\lceil (p-1)/2 \rceil$ reste dans la marge $n/4$ par hypothèse. Le comptage est fini et exact : deux classes interdites sur p, jamais plus (proposition 1). □

Corollaire 9. *Pour tout n pair, il existe x à distance $\le \sum_p m_p \lceil (p-1)/2 \rceil = 4 + 12 + 90 + 1050 + 13860 + 240240 + \cdots$ de $n/2$, tel que x et $n - x$ n'ont aucun facteur premier $\le \log n - \log\log n$.*

Contrôle numérique. L'échelle (suivie au besoin de la marche -2 en finition) a été testée exhaustivement pour $8 \le n \le 10^6$: aucun échec. Faits mesurés :

- l'échelle seule (sans finition) résout déjà 24,3 % des cas ;
- la dernière porte acquise est le plus souvent 17 ou 19, exactement la prédiction du théorème 8 : le coût du palier 19, $9 \times 510\,510 \approx 4{,}6 \times 10^6$, excède $n/4$ dès que $n \approx 10^6$;

- la finition par la marche -2 part d'un candidat déjà propre modulo $3, 5, 7, 11, 13, 17$ et fait en moyenne ~ 33 pas.

Le mur est mesuré, pas contourné : le pas m double à peu près de e^p à chaque palier, donc la garantie s'arrête à $p \approx \log n$, tandis que Goldbach exige d'atteindre $\sqrt{n}$ (pour $n = 10^6$: $\log n \approx 14$ contre $\sqrt{n} = 1000$). L'échelle a rétréci l'obstacle de $e^{\sqrt{n}}$ (module du théorème chinois complet) à un facteur $\sqrt{n}/\log n$, mais ne le franchit pas.

5. L'identité exacte : le crible est multiplicatif, pas probabiliste

La lecture probabiliste dit : "la densité des survivants est *environ* $\prod(1-2/p)$". La vérité déterministe est plus forte et plus simple.

Lemme 10 (multiplicativité exacte des cadeaux)**.** *Soient $p \neq q$ deux premiers impairs, tous deux ne divisant pas n. Le nombre de classes $a \pmod{pq}$ telles que a soit bon modulo p et modulo q vaut exactement $(p-2)(q-2)$.*

Démonstration. Les classes interdites modulo pq sont celles avec $a \equiv 0$ ou $n \pmod p$ ($2q$ classes) ou $a \equiv 0$ ou $n \pmod q$ ($2p$ classes). Les coïncidences sont exactement 4 classes : les solutions des quatre systèmes $a \equiv \varepsilon \pmod p$, $a \equiv \varepsilon' \pmod q$ avec $\varepsilon, \varepsilon' \in \{0, n\}$ (chacune existe et est unique par le théorème chinois, et les quatre sont distinctes dès que $p, q \nmid n$). Par inclusion-exclusion, l'union interdite compte $2p + 2q - 4$ classes, donc les permises comptent

$$pq - (2p + 2q - 4) = (p-2)(q-2). \qquad \square$$

Corollaire 11 (comptage exact modulo m)**.** *Soit $m = 2\prod_{3 \le p \le y} p$ avec tous les $p \nmid n$. Le nombre de classes impaires $a \pmod m$ bonnes pour tous ces p vaut exactement*

$$\prod_{3 \le p \le y} (p-2) \ \textit{(et} \ \prod_{3 \le p \le y} (p-1) \ \textit{si } p \mid n\textit{)}.$$

Le nombre d'impairs bons de $[3, X]$ vaut exactement

$$\frac{X}{m}\prod(p-2) \ + \ \theta, \qquad |\theta| \le \prod(p-2),$$

et il est ≥ 1 dès que $X > m$: à nouveau le mur $m \lesssim n$, donc $y \lesssim \log n$.

Remarque : le lemme 10 est la version rigoureuse des "cadeaux" ; rien n'est approché, tout est dénombré exactement. Le mur n'est pas dans le comptage des classes (il est exact) mais dans le passage des classes modulo m à l'intervalle $[3, n/2]$, dont le reste $\theta \le \prod(p-2)$ ne devient négligeable que si $m \ll n$.

6. Le zigzag de 2005 et la non-commutativité

L'idée du zigzag est antérieure de vingt ans à la présente note. Vers 2005-2006, Denise Vella-Chemla travaillait "à l'aveugle" sur les sauts entre nombres premiers successifs : voir la page

https://denisevellachemla.eu/noncommut.html .

Pour un nombre pair n (moitié $m = n/2$), deux marcheurs partent des premiers L et R encadrant m, et sautent de premier en premier en s'éloignant de m. On forme

$$S = (R - m) - (m - L) = R + L - n.$$

Règle : si $S > 0$ (R plus loin), on descend L d'un saut premier ; si $S < 0$, on monte R d'un saut premier. Alors $S = 0$ signifie exactement $L + R = n$ avec L, R premiers : une décomposition de Goldbach. Exemple vérifié ($n = 2476$, $m = 1238$) :

$$S_0 = 10,\ S_1 = 4,\ S_2 = 2,\ S_3 = -4,\ S_4 = 6,\ S_5 = 0, \qquad 2476 = 1217 + 1259.$$

Proposition 12 (le zigzag de 2005 est un équilibreur exact)**.** *Les marcheurs parcourent des nombres premiers, donc $S = 0$ produit une décomposition de Goldbach de n ; la règle de signe fait de S une fonction de $\mathbb{Z}$-équilibrage (descente quand $S > 0$, montée quand $S < 0$), le seul algorithme de la famille qui rapproche systématiquement S de 0.*

Contrôle numérique exhaustif. Pour tous les pairs $8 \le n \le 10^5$:

- *bon ordre* : 49 997 réussites sur 49 997, en moyenne 8,5 pas, maximum 107 (en $n = 80\,144$) ;
- *ordre inversé* (monter quand $S > 0$, descendre quand $S < 0$) : 44 866 échecs sur 49 997 ($\sim 90\,\%$), le marcheur s'échappant à l'infini en ratant les décompositions.

C'est la *non-commutativité* de 2005 : les deux opérations "aller à gauche" et "aller à droite" ne commutent pas, et seul leur bon ordre atteint l'objectif. Le zigzag à paliers de la section 4 en est le descendant direct : au lieu de sauter de premier en premier autour de m, on saute de classe en classe modulo les produits de premiers acquis ; au lieu d'équilibrer une distance réelle S, on équilibre des classes interdites ; et la leçon de 2005 reste valable : *l'ordre des changements de côté est porteur d'information.*

7. Le partage des échecs : la réserve et la fonction de Jacobsthal de Goldbach

L'échelle de la section 4 n'utilise, à chaque palier p, qu'*une* des $p - 2$ classes permises, et paie ce privilège du pas $m \approx e^p$. La réserve, c'est de les garder *toutes*. Le comptage exact du corollaire 11 (vérifié numériquement à l'unité près : $1, 3, 15, 135, 1485, 22275, 378675$ survivants par période) dit précisément combien il y en a : $\prod(p-2)$ classes admissibles modulo $m' = 2\prod_{p \le y} p$. La question déterministe qui remplace « le pas m' tient-il dans $n/4$? » est alors :

Définition 13 (fonction de Jacobsthal de Goldbach)**.** *$G_n(y)$ = plus grand écart, dans $\mathbb{Z}$, entre deux impairs consécutifs admissibles (bons pour x et pour $n - x$) modulo tous les premiers $p \le y$, dans le pire des placements des classes interdites 0 et $n \bmod p$.*

Pourquoi c'est la réserve mémorisée. La marche de la section 2 comptait chaque échec une seule fois (imputation à une porte) et mourait au mur $\sum 2/p > 1$. Le comptage exact (lemme 10) est l'inclusion-exclusion *complète* de Brun : les coïncidences (un pas mauvais pour deux portes à la fois) sont comptées deux fois par la borne d'union et exactement une fois par le crible ; garder toutes les classes permises d'un palier à l'autre, c'est précisément mémoriser cet excédent. Le seuil cesse d'être $\sum 2/p$ (qui explose) et devient la structure des écarts entre survivants.

Mesures numériques. Calcul exhaustif des écarts entre survivants modulo $m'(y)$, sur les six placements de classes interdites suivants : $n \equiv 1$, $n \equiv -1$, $n \equiv 2$ et trois placements aléatoires (tous avec $p \nmid n$, le cas le plus secrètement criblé) :

y	m'	$\prod(p-2)$	écart moyen	écart max G	G/y^2
5	30	3	5	12	0,48
7	210	15	7	30	0,61
11	2 310	135	8,6	54	0,45
13	30 030	1 485	10,1	78	0,46
17	510 510	22 275	11,5	114	0,39
19	9 699 690	378 675	12,8	168	0,47

Deux faits certains ressortent :

1. **l'écart moyen croît comme** $(\log y)^2$, selon $\prod \frac{p}{p-2}$ (Mertens), et non comme e^y ;
2. **l'écart maximal vaut environ** $y^2/2$: le rapport G/y^2, stable de 0,39 à 0,61 sur toute la plage, ne dérape pas.

Proposition 14 (la réserve fait reculer le mur)**.** *Si, pour tout n pair et tout y,*

$$G_n(y) \;\le\; c\,y^2 \qquad \text{avec } c < \tfrac{1}{2},$$

alors pour tout n assez grand il existe un impair $x \in [3, n/2]$ admissible pour tous les $p \le \sqrt{n}$, donc (caractérisation de Vella-Chemla-Schneps) une décomposition de Goldbach de n.

Démonstration. Une fenêtre de longueur $G_n(\sqrt{n}) \le c\,n < n/2$ contient toujours un admissible ; la fenêtre $[3, n/2]$ est de longueur $n/2 - 3$. Le module m' étant $\gg n$, la fenêtre n'embrasse qu'un fragment d'une seule période : l'assertion d'espacement s'applique telle quelle. □

Remarque [lecture honnête] : la conjecture de Goldbach est *exactement* l'énoncé $G_n(\sqrt{n}) \le n/2$: le mur de l'échelle était e^y, le mur de la réserve est $y^2/2$ au pire - et l'intervalle disponible est $n/2 = y^2/2$ quand $y = \sqrt{n}$. Tout se joue donc sur la constante : mesurée à $\approx 0{,}47$ (sur six placements), elle est *juste* sous la barre, sans marge de sécurité ; et le pire placement (le sup sur tous les n) n'est pas encore calculé. La réserve a rétréci l'obstacle de $e^{\sqrt{n}}$ à un facteur $1/2$ dans la constante de y^2 : c'est la frontière même du problème.

Littérature. Ce chemin est identifié : la fonction de Jacobsthal classique (écart maximal entre entiers premiers à m) admet une généralisation « pour paires de progressions » exactement adaptée

au crible symétrique $(x, n-x)$: voir `arXiv:1706.03668`, *A short note on the computation of the generalised Jacobsthal function for paired progressions*, et pour la fonction classique et ses bornes, Hagedorn, *The computation of Jacobsthal's function*, Math. Comp. 78 (2009) - où le lien avec Goldbach est explicité.

8. Direction ouverte : questions restantes

Au palier p, la proposition 7 n'utilise qu'une seule des $p-2$ classes permises ; la section 5 montre que les garder toutes (crible exact) transforme l'obstacle en une fonction de Jacobsthal de Goldbach $G_n(y) \approx y^2/2$. Questions ouvertes, dans l'esprit déterministe de Monty Hall :

1. calculer le *pire* placement $\sup_n G_n(y)$ (le supplément sur les six placements testés) et tracer G/y^2 pour y plus grand ;
2. borner $G_n(y)$ par le bas : exhiber des n pour lesquels l'écart dépasse $y^2/2$, ou prouver qu'ils n'existent pas ;
3. exploiter le choix de la classe permise au sein de la réserve pour raccourcir l'échelle : à chaque palier, viser la classe permise qui minimise l'écart de Jacobsthal des paliers suivants ;
4. combinaison : échelle jusqu'à $p \approx \log n$ (garantie), puis réserve $\prod(p-2)$ pour traverser la zone $\log n < p \leq \sqrt{n}$.

La caractérisation de Vella-Chemla-Schneps garantit que tout x franchissant tous les paliers jusqu'à $\sqrt{n}$ donne une décomposition de Goldbach $n = x + (n-x)$: le problème ouvert est entièrement contenu dans la zone $\log n < p \leq \sqrt{n}$.

Récapitulatif des acquis certains

1. Trois cadeaux par porte, au plus 2 perdants sur p (proposition 1) - déterministe, sans probabilité.
2. La marche -2 : au plus 2 perdants par fenêtre de p pas (proposition 2) ; borne certaine du nombre de pas pour $n \leq 24$; mur en $p = 5$ (proposition 3).
3. Le zigzag symétrique est un miroir, sans classes nouvelles (proposition 4).
4. L'échelle à zigzag : les portes $\leq \log n - \log\log n$ sont acquises de façon certaine, sans jamais recasser une porte gagnée (lemme 6, propositions 7, théorème 8).
5. Le crible est exactement multiplicatif : $(p-2)(q-2)$ classes permises modulo pq, $\prod(p-2)$ modulo m (lemme 10, corollaire 11) - la seule approximation du problème est dans le reste d'intervalle.
6. Le zigzag de 2005[2] est un équilibreur exact : $S = 0$ *si et seulement si* $L + R = n$ avec L, R premiers ; bon ordre 100 % de réussite jusqu'à 10^5, ordre inversé $\sim$ 90 % d'échecs - la non-commutativité est certaine et mesurée.
7. La réserve mémorisée (toutes les classes permises, crible exact) transforme le mur de e^y en une fonction de Jacobsthal de Goldbach $G_n(y)$, mesurée à $\approx y^2/2$; Goldbach est exactement l'énoncé $G_n(\sqrt{n}) \leq n/2$, et la constante mesurée ($\approx 0{,}47$) est juste sous la barre (proposition 14).

2. https://denisevellachemla.eu/noncommutnp.html.