

Voici une dernière façon de considérer le problème de la conjecture de Goldbach.  
 On cherche les décomposants de  $2a$ , un nombre pair.  
 On va associer à  $2a$  un ensemble de nombres  $E_{2a}$  initialement vide.

### Description de l'algorithme utilisant les restes modulaires

- On calcule  $m$ , le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à  $a$ .  

$$m = \left\lfloor \frac{a-1}{2} \right\rfloor.$$
- Pour  $i$  allant de 1 à  $m$ , on calcule les restes spéciaux<sup>1</sup> de  $2a$  pour les modules de la forme  $8i+4$  (*remarque* :  $i > 0$ ).
- Si  $2a \equiv 0 \pmod{8i+4}$ , on ajoute le singleton  $\{i+1\}$  à l'ensemble  $E_{2a}$  ;
- sinon si  $2a \equiv 4i+2 \pmod{8i+4}$ , on ajoute le singleton  $\{1\}$  à l'ensemble  $E_{2a}$  ;
- sinon pour  $j$  allant de 0 à  $4i+2$  de 2 en 2,
  - si  $(2a \equiv j \pmod{8i+4})$  ou si  $(2a \equiv 8i+4-j \pmod{8i+4})$ 
    - \* on ajoute à l'ensemble  $E_{2a}$  le singleton  $\{i - \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1\}$
    - \* si  $a$  est pair, on ajoute à l'ensemble  $E_{2a}$  le singleton  $\{i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 1\}$  si son élément est inférieur ou égal à  $m$  ;
    - \* sinon ( $a$  est impair), on ajoute à l'ensemble  $E_{2a}$  le singleton  $\{i + \lfloor \frac{j}{4} \rfloor + 2\}$  si son élément est inférieur ou égal à  $m$  ;
- lorsque  $i$  est inférieur strictement à  $m$ , on ajoute également à l'ensemble de nombres toutes les sommes inférieures à  $m$  des nombres déjà ajoutés et d'un multiple de  $i$  (c'est la "*complétion des mots*").

L'ensemble  $E_{2a}$  contient une seule occurrence de certains nombres, et plusieurs occurrences d'autres nombres.

A chaque nombre n'apparaissant qu'en une seule occurrence peut être associé un décomposant de Goldbach de  $2a$ .

### Traitement du cas $2a = 28$ (28 est un double de pair):

On calcule  $m$ , le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 14.

$$m = \left\lfloor \frac{14-1}{2} \right\rfloor = 6.$$

*Calcul des restes spéciaux :*

$$28 \equiv 4 \pmod{12},$$

$$28 \equiv 8 \pmod{20},$$

$$28 \equiv 0 \pmod{28},$$

$$28 \equiv 8 \pmod{36}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 28)}$$

---

<sup>1</sup>Par "reste spécial", on entend le reste modulaire habituel de Gauss ou son complémentaire au module quand celui est inférieur au reste.

$28 \equiv 16 \pmod{44}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 28)  
 $28 \equiv 24 \pmod{52}$  (reste spécial : le reste modulaire habituel est 28).

*Ajout des nombres à l'ensemble  $E_{28}$  :*

*remarque : la division est une division entière (on prend la partie entière du résultat).*

- $1 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 1 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 3$ , ajoutons 1 et 3 à l'ensemble,
- $2 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 2 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 5$ , ajoutons 1 et 5 à l'ensemble,
- $i = 3, 28 \equiv 0 \pmod{28}$ , ajoutons 4 à l'ensemble,
- $4 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 4 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 7$ , ajoutons 3 à l'ensemble (7 est strictement supérieur à 6),
- $5 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 5 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 10$ , ajoutons 2 à l'ensemble (10 est strictement supérieur à 6),
- $6 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 6 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 13$ , ajoutons 1 à l'ensemble (13 est strictement supérieur à 6),

*Complétion des lignes quand les mots sont trop courts*

- $1 + 3 = 4, 3 + 3 = 6$ , ajoutons 4 et 6 à l'ensemble,
- $1 + 5 = 6$ , ajoutons 6 à l'ensemble.

L'ensemble associé à 28,  $E_{28}$ , est, après exécution de l'algorithme, égal à  $\{1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 6, 6\}$ .

Seuls 2 et 5 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble. A 2 correspond le décomposant de Goldbach 11 et à 5 correspond le décomposant de Goldbach 5 pour le nombre pair 28.

**Traitement du cas  $2a = 84$  (84 est un double de pair):**

On calcule  $m$ , le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 42.

$$m = \left\lfloor \frac{42 - 1}{2} \right\rfloor = 20.$$

*Calcul des restes spéciaux :*

$$84 \equiv 0 \pmod{12},$$

$$84 \equiv 4 \pmod{20},$$

$$84 \equiv 0 \pmod{28},$$

$$84 \equiv 12 \pmod{36},$$

$$84 \equiv 4 \pmod{44}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 40)}$$

$$84 \equiv 20 \pmod{52}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 32)}$$

$$84 \equiv 24 \pmod{60},$$

$$84 \equiv 16 \pmod{68},$$

$$84 \equiv 8 \pmod{76},$$

$$84 \equiv 0 \pmod{84},$$

$$84 \equiv 8 \pmod{92}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 16 \pmod{100}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 24 \pmod{108}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 32 \pmod{116}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 40 \pmod{124}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 48 \pmod{132}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 56 \pmod{140}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 64 \pmod{148}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 72 \pmod{156}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84)}$$

$$84 \equiv 80 \pmod{164} \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 84).}$$

*Ajout des nombres à l'ensemble  $E_{84}$  :*

*remarque : la division est une division entière (on prend la partie entière du résultat).*

- $1 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 2$ , ajoutons 2 à l'ensemble,

- $2 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 2$ ,  $2 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 4$ , ajoutons 2 et 4 à l'ensemble,

- $3 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 4$ , ajoutons 4 à l'ensemble,

- $4 - \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 2$ ,  $4 + \left\lfloor \frac{12}{4} \right\rfloor + 1 = 8$ , ajoutons 2 et 8 à l'ensemble,

- $5 - \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 5$ ,  $5 + \left\lfloor \frac{4}{4} \right\rfloor + 1 = 7$ , ajoutons 5 et 7 à l'ensemble,

- $6 - \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 6 + \left\lfloor \frac{20}{4} \right\rfloor + 1 = 12$ , ajoutons 2 et 12 à l'ensemble,
- $7 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 7 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 14$ , ajoutons 2 et 14 à l'ensemble,
- $8 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 8 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 13$ , ajoutons 5 et 13 à l'ensemble,
- $9 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 9 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 12$ , ajoutons 8 et 12 à l'ensemble,
- $10 - \left\lfloor \frac{0}{4} \right\rfloor + 1 = 11$ , ajoutons 11 à l'ensemble,
- $11 - \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 11 + \left\lfloor \frac{8}{4} \right\rfloor + 1 = 14$ , ajoutons 10 et 14 à l'ensemble,
- $12 - \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 12 + \left\lfloor \frac{16}{4} \right\rfloor + 1 = 17$ , ajoutons 9 et 17 à l'ensemble,
- $13 - \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 13 + \left\lfloor \frac{24}{4} \right\rfloor + 1 = 20$ , ajoutons 8 et 20 à l'ensemble,
- $14 - \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 14 + \left\lfloor \frac{32}{4} \right\rfloor + 1 = 23$ , ajoutons 7 à l'ensemble, ( $23 > 20$ )
- $15 - \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 15 + \left\lfloor \frac{40}{4} \right\rfloor + 1 = 26$ , ajoutons 6 à l'ensemble, ( $26 > 20$ )
- $16 - \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 16 + \left\lfloor \frac{48}{4} \right\rfloor + 1 = 29$ , ajoutons 5 à l'ensemble, ( $29 > 20$ )
- $17 - \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 17 + \left\lfloor \frac{56}{4} \right\rfloor + 1 = 32$ , ajoutons 4 à l'ensemble, ( $32 > 20$ )
- $18 - \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 18 + \left\lfloor \frac{64}{4} \right\rfloor + 1 = 35$ , ajoutons 3 à l'ensemble, ( $35 > 20$ )

- $19 - \left\lfloor \frac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 19 + \left\lfloor \frac{72}{4} \right\rfloor + 1 = 38$ , ajoutons 2 à l'ensemble, ( $38 > 20$ )

- $20 - \left\lfloor \frac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 1, 20 + \left\lfloor \frac{80}{4} \right\rfloor + 1 = 41$ , ajoutons 1 à l'ensemble, ( $41 > 20$ )

*Complétion des lignes quand les mots sont trop courts*

$2 + 3 = 5, 5 + 3 = 8, 8 + 3 = 11, 11 + 3 = 14, 14 + 3 = 17, 17 + 3 = 20$ , ajoutons 5, 8, 11, 14, 17 et 20 à l'ensemble,

$2 + 5 = 7, 7 + 5 = 12, 12 + 5 = 17, 4 + 5 = 9, 9 + 5 = 14, 14 + 5 = 19$ , ajoutons 7, 12, et 17 à l'ensemble, ajoutons 9, 14 et 19 à l'ensemble,

$4 + 7 = 11, 11 + 7 = 18$ , ajoutons 11 et 18 à l'ensemble,

$2 + 9 = 11, 9 + 9 = 18, 8 + 9 = 17$ , ajoutons 11 et 18 à l'ensemble, ajoutons 17 à l'ensemble;

$5 + 11 = 16, 7 + 11 = 18$ , ajoutons 16 et 18 à l'ensemble ;

$2 + 13 = 15$ , ajoutons 15 à l'ensemble ;

$2 + 15 = 17$ , ajoutons 17 à l'ensemble ;

L'ensemble associé à 84,  $E_{84}$ , est, après exécution de l'algorithme, égal à

$\{1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 14, 14, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 20, 20\}$ .

1, 3, 6, 10, 13, 15, 16 et 19 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble.

A 1 correspond le décomposant de Goldbach 41, à 3 correspond le décomposant de Goldbach 37, à 6 correspond le décomposant de Goldbach 31, à 10 correspond le décomposant de Goldbach 23, à 13 correspond le décomposant de Goldbach 17, à 15 correspond le décomposant de Goldbach 13, à 16 correspond le décomposant de Goldbach 11, à 19 correspond le décomposant de Goldbach 5, pour le nombre 84.

### **Traitement du cas $2a = 98$ (98 est un double d'impair):**

On calcule  $m$ , le nombre de nombres impairs supérieurs ou égaux à 3 et inférieurs ou égaux à 49.

$$m = \left\lfloor \frac{49 - 1}{2} \right\rfloor = 24.$$

*Calcul des restes spéciaux :*

$$98 \equiv 2 \pmod{12},$$

$$98 \equiv 2 \pmod{20}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 18)}$$

$$98 \equiv 14 \pmod{28},$$

$$98 \equiv 10 \pmod{36}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 26)}$$

$$98 \equiv 10 \pmod{44},$$

$$98 \equiv 6 \pmod{52}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 46)}$$

$$98 \equiv 22 \pmod{60}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 38)}$$

$$98 \equiv 30 \pmod{68},$$

$$98 \equiv 22 \pmod{76},$$

$$98 \equiv 14 \pmod{84},$$

$$98 \equiv 6 \pmod{92},$$

$$98 \equiv 2 \pmod{100}, \text{ (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)}$$

$98 \equiv 10 \pmod{108}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 18 \pmod{116}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 26 \pmod{124}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 14 \pmod{132}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 42 \pmod{140}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 50 \pmod{148}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 58 \pmod{156}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 66 \pmod{164}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 74 \pmod{172}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 82 \pmod{180}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 90 \pmod{188}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98)  
 $98 \equiv 98 \pmod{196}$ , (reste spécial : le reste modulaire habituel est 98).

*Ajout des nombres à l'ensemble  $E_{84}$  :*

*remarque : la division est une division entière (on prend la partie entière du résultat).*

- $1 - \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 1 + \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 2 = 3$ , ajoutons 2 et 3 à l'ensemble,
- $2 - \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 2 + \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 2 = 4$ , ajoutons 3 et 4 à l'ensemble,
- $98 \equiv 14 \pmod{28}$ , ajoutons 1 à l'ensemble,
- $4 - \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 4 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 2 = 8$ , ajoutons 3 et 8 à l'ensemble,
- $5 - \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 5 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 2 = 9$ , ajoutons 4 et 9 à l'ensemble,
- $6 - \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 6 + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 2 = 9$ , ajoutons 6 et 9 à l'ensemble,
- $7 - \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 7 + \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 2 = 14$ , ajoutons 3 et 14 à l'ensemble,
- $8 - \left\lfloor \frac{30}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 8 + \left\lfloor \frac{30}{4} \right\rfloor + 2 = 17$ , ajoutons 2 et 17 à l'ensemble,
- $9 - \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 9 + \left\lfloor \frac{22}{4} \right\rfloor + 2 = 16$ , ajoutons 5 et 16 à l'ensemble,

- $10 - \left\lfloor \frac{14}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 10 + \left\lfloor \frac{14}{4} \right\rfloor + 2 = 15$ , ajoutons 8 et 15 à l'ensemble,
- $11 - \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 1 = 11, 11 + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + 2 = 14$ , ajoutons 11 et 14 à l'ensemble,
- $12 - \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 1 = 13, 12 + \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor + 2 = 14$ , ajoutons 13 et 14 à l'ensemble,
- $13 - \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 1 = 12, 13 + \left\lfloor \frac{10}{4} \right\rfloor + 2 = 17$ , ajoutons 12 et 17 à l'ensemble,
- $14 - \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor + 1 = 11, 14 + \left\lfloor \frac{18}{4} \right\rfloor + 2 = 20$ , ajoutons 11 et 20 à l'ensemble,
- $15 - \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + 1 = 10, 15 + \left\lfloor \frac{26}{4} \right\rfloor + 2 = 23$ , ajoutons 10 et 23 à l'ensemble,
- $16 - \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + 1 = 9, 16 + \left\lfloor \frac{34}{4} \right\rfloor + 2 = 26$ , ajoutons 9 à l'ensemble, ( $26 > 24$ )
- $17 - \left\lfloor \frac{42}{4} \right\rfloor + 1 = 8, 17 + \left\lfloor \frac{42}{4} \right\rfloor + 2 = 29$ , ajoutons 8 à l'ensemble, ( $29 > 24$ )
- $18 - \left\lfloor \frac{50}{4} \right\rfloor + 1 = 7, 18 + \left\lfloor \frac{50}{4} \right\rfloor + 2 = 31$ , ajoutons 7 à l'ensemble, ( $31 > 24$ )
- $19 - \left\lfloor \frac{58}{4} \right\rfloor + 1 = 6, 19 + \left\lfloor \frac{58}{4} \right\rfloor + 2 = 35$ , ajoutons 6 à l'ensemble, ( $35 > 24$ )
- $20 - \left\lfloor \frac{66}{4} \right\rfloor + 1 = 5, 20 + \left\lfloor \frac{66}{4} \right\rfloor + 2 = 38$ , ajoutons 5 à l'ensemble, ( $38 > 24$ )
- $21 - \left\lfloor \frac{74}{4} \right\rfloor + 1 = 4, 21 + \left\lfloor \frac{74}{4} \right\rfloor + 2 = 41$ , ajoutons 4 à l'ensemble, ( $41 > 20$ )
- $22 - \left\lfloor \frac{82}{4} \right\rfloor + 1 = 3, 22 + \left\lfloor \frac{82}{4} \right\rfloor + 2 = 44$ , ajoutons 3 à l'ensemble, ( $41 > 20$ )
- $23 - \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor + 1 = 2, 23 + \left\lfloor \frac{90}{4} \right\rfloor + 2 = 47$ , ajoutons 2 à l'ensemble, ( $41 > 20$ )

- $98 \equiv 98 \pmod{196}$ , ajoutons 1 à l'ensemble

*Complétion des lignes quand les mots sont trop courts*

$2+3=5, 5+3=8, 8+3=11, 11+3=14, 14+3=17, 17+3=20, 20+3=23,$   
 $3+3=6, 6+3=9, 9+3=12, 12+3=15, 15+3=18, 18+3=21, 21+3=24,$   
 ajoutons 5, 8, 11, 14, 17, 20 et 23 à l'ensemble,  
 ajoutons 6, 9, 12, 15, 18, 21 et 24 à l'ensemble,  
 $3+5=8, 8+5=13, 13+5=18, 18+5=23, 4+5=9, 9+5=14, 14+5=$   
 $19, 19+5=24,$ , ajoutons 8, 13, 18 et 23 à l'ensemble, ajoutons 9, 14, 19 et 24  
 à l'ensemble,  
 $1+7=8, 8+7=15, 15+5=22,$  ajoutons 8, 15 et 22 à l'ensemble,  
 $3+9=12, 12+9=21, 8+9=17,$  ajoutons 12 et 21 à l'ensemble, ajoutons 17  
 à l'ensemble;  
 $4+11=15, 9+11=20,$  ajoutons 15 et 20 à l'ensemble ;  
 $6+13=19, 9+13=22,$  ajoutons 19 et 22 à l'ensemble ;  
 $3+15=18,$  ajoutons 18 à l'ensemble ;  
 $2+17=19,$  ajoutons 19 à l'ensemble ;  
 $5+19=24,$  ajoutons 24 à l'ensemble ;

L'ensemble associé à 98,  $E_{98}$ , est, après exécution de l'algorithme, égal à

$\{1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 8, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 12, 13, 13,$   
 $14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 17, 17, 17, 17, 18, 18, 18, 19, 19, 19, 20, 20, 20, 21, 21, 22, 22, 23, 23, 23,$   
 $24, 24, 24\}.$

7, 10 et 16 apparaissent sous forme d'une occurrence unique dans cet ensemble.

A 7 correspond le décomposant de Goldbach 37, à 10 correspond le décomposant de Goldbach 31, à 16 correspond le décomposant de Goldbach 19, pour le nombre 98.

Je ne sais pas démontrer pourquoi il est obligatoire que l'un des nombres de l'ensemble apparaisse sous une unique occurrence...