Conjecture de Goldbach et résidus minima absolus de Gauss

Denise Vella-Chemla

20 Mai 2009

1 Introduction

Est présenté dans cette note un algorithme simple de calcul des décomposants de Goldbach d'un nombre pair qui a découlé de recherches autour de la Conjecture de Goldbach ([6]). Cette conjecture reformulée par Euler énonce que *"tout nombre entier naturel pair supérieur à 2 est la somme de deux nombres premiers"*.

2 Utiliser la valeur absolue du résidu minimum absolu défini par Gauss

En annexe 1, est fourni un extrait des Recherches Arithmétiques de Gauss qui donne la définition de ce que Gauss appelle le *résidu minimum absolu* d'un nombre entier relatif selon un certain module.

Nous utilisons ici la valeur absolue de ce résidu minimum absolu selon les modules successifs 6, 10, 14,..., i.e. selon les modules de la forme $4k+2$ pour $0 < k < \sqrt{x}$.

En annexe 3, on trouvera un tableau qui fournit pour chaque nombre entier x variant de 3 à 100 son image par la fonction $f(x,k) = 2k+1-varma(x,4k+2)$, pour k prenant les valeurs successives de 1 à $\sqrt{x}$, et où $varma(x,m)$ est la valeur absolue du *résidu minimum absolu* de x selon le module m (pour $k=0$, $f(x,k) = varma(x,4k+2)$).

Trivialement, pour x donné, le produit des $f(x,k)$ (k variant de 0 à $\sqrt{x}$) est non nul pour les nombres premiers impairs (sauf 3 et 5), ce que l'on peut écrire ainsi :

$$x \text{ est un nombre premier impair} \iff \prod_{0 < k < \sqrt{x}} f(x,k) > 0$$

Fournissons une autre façon de calculer $varma(x,k)$:

$$varma(x,k) = \mid \frac{k}{\pi} arcsin(sin(\frac{x\pi}{k})) \mid$$

Cette fonction est une fonction continue en dents de scie. En multipliant entre elles deux fonctions en dents de scie de périodicité p et q, on obtiendra une fonction continue de périodicité $ppcm(p,q)$.

Le fait pour un nombre pair d'admettre une décomposition de Goldbach[1] peut alors s'écrire :

$$\forall\ x\ \geq\ 3,\ Goldbach(2x, p, 2x-p)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\text{2x}\ =\ p + (2x-p)$$
$$et\ p\ est\ un\ nombre\ premier\ impair$$
$$et\ 2x-p\ est\ un\ nombre\ premier\ impair$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists\, 3\ \leq\ p\ \leq\ x\ tel\ que$$
$$\prod_{0\,<\,m_i\,<\,\sqrt{p}} f(p, m_i)\ \times \prod_{0\,<\,m_j\,<\,\sqrt{2x-p}} f(2x-p, m_j)\ >\ 0$$

Pour démontrer la conjecture de Goldbach, il faudrait prouver qu'il existe toujours p compris entre 3 et x tel que selon tout module m de la forme $4k+2$ pour k variant de 1 à $\sqrt{x}$, le produit $f(p,m) \times f(2x-p,m)$ est non nul.

3 Explication

Le fait de programmer l'idée présentée au paragraphe précédent a permis de trouver une explication au fait qu'il existe systématiquement un nombre p compris entre 3 et x qui est tel que les produits $f(p,m) \times f(2x-p,m)$ selon les modules m de la forme $4k+2$ pour k variant de 1 à $\sqrt{x}$ sont tous non nuls (nota : c'est à dire que l'on effectue les produits en prenant les éléments 2 par 2 autour de x par module pris chacun isolément au lieu d'effectuer les produits de la ligne correspondant à p et de la ligne correspondant à $2x-p$ pour étudier si chacun d'eux est premier).
En annexes 4 et 5 sont fournis le résultat et le source du programme qui implémente cette idée. On a systématiquement coloré les éléments des colonnes dont tous les produits sont non nuls. On a fourni les décompositions de Goldbach correspondant à ces colonnes (il faut indicer chaque colonne par les nombres impairs successifs à partir de 3).

- Sur les lignes k des nombres $2k+1$ diviseurs de $2x$, il y a annulation de la courbe en dents de scie tous les $2k+1$ nombres ; le premier zéro est à la position k. (Pour les doubles de nombres impairs, les lignes des diviseurs de $2x$ commencent par un 0, et contiennent les carrés des $k+1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne.
  Pour les doubles de nombres pairs, les lignes des diviseurs de $2x$ contiennent également les carrés des $k+1$ nombres pairs selon une courbe en dents de scie (avec répétition du plus grand carré) sur la $k^{ème}$ ligne mais la ligne commencent par le plus grand des carrés de pairs.)

[1] Se reporter à [4] pour une présentation originale de la conjecture.

- Sur les lignes k des nombres $2k+1$ qui ne divisent pas $2x$, on observe deux courbes en dents de scie. La première s'annule une première fois pour k, la seconde s'annule une première fois pour une valeur strictement supérieure à k et inférieure ou égale à $2k+3$, et les deux fonctions en dents de scie sont toutes les deux de période $2k+1$.

Ce sont les contraintes spécifiques présentées ci-dessus sur les écarts entre les positions des zéros des différentes lignes qui ont pour conséquence que l'une des colonnes au moins ne contient aucun zéro.

On comprend que les nombres qui "risqueraient le plus de ne pas avoir de décomposants de Goldbach" sont les nombres pairs qui sont des puissances de 2 : ils ont deux fonctions en dents de scie par ligne, et donc, deux fois plus de zéros qui peuvent annuler des colonnes au risque que toutes les colonnes contiennent des zéros et que le nombre n'ait pas de décomposant de Goldbach.

Les cas "assez graves" (sic !) mais moins "dangereux" que les puissances de 2 sont les nombres pairs qui ont peu de diviseurs : ce sera seulement sur les lignes des diviseurs qu'une seule fonction en dents de scie s'annulera régulièrement, diminuant ainsi le nombre de colonnes couvertes par des zéros.

Quant aux nombres pairs qui ont beaucoup de diviseurs, ils ont relativement plus de décomposants de Goldbach que les autres parce que sur chaque ligne d'un de leurs diviseurs, il n'y a qu'une fonction en dents de scie au lieu de 2.

Le problème de Goldbach reformulé devient : sur l'intervalle des nombres de 1 à x, considérons $2 \times \sqrt{x}$ sinusoïdes qui ont pour périodes les nombres impairs successifs (3, 5, 7, ...). Si l'on ne considère que les sinusoïdes qui s'annulent les "premières" pour chaque période impaire, toutes ces sinusoïdes sont déphasées de 1 en 1. Pourquoi existe-t-il toujours un nombre inférieur à x qui n'annule aucune des sinusoïdes ? Connaître les transformées de Fourier ou le traitement du signal nous permettrait peut-être d'entrevoir une réponse à cette question.

Bibliographie

[1] C.F. Gauss, *Recherches arithmétiques*, Ed. Jacques Gabay, 1801.
[2] L. Euler, *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs*, Commentatio 175 indicis Enestroemiani, Bibliothèque impartiale 3, 1751, p.10-31.
[4] C. Laisant, *Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach*, Bulletin de la SMF n°25, p.108, 1/12/1897.
[5] C.P. Bruter, La construction des nombres, Ed. Ellipses, 2000.
[6] D. Vella-Chemla, Différentes formulations équivalentes de la Conjecture de Goldbach, mai 2009.

Annexe 1 : Extrait de la section première des Recherches Arithmétiques de Gauss

1. Si un nombre a divise la différence des nombres b et c, b et c sont dits *congrus* suivant a, sinon *incongrus*. a s'appellera le module ; chacun des nombres b et c, *résidus* de l'autre dans le premier cas, et *non résidus* dans le second.

Les nombres peuvent être positifs ou négatifs, mais entiers. Quant au module il doit évidemment être pris absolument, c'est à dire, sans aucun signe.

Ainsi -9 et $+16$ sont *congrus* par rapport au module 5 ; -7 est *résidu* de 15 par rapport au module 11, et *non résidu* par rapport au module 3.

Au reste 0 étant divisible par tous les nombres, il s'ensuit qu'on peut regarder tout nombre comme congru avec lui-même par rapport à un module quelconque.

2. Tous les résidus d'un nombre donné a suivant le module m sont compris dans la formule $a + km$, k étant un entier indéterminé. Les plus faciles des propositions que nous allons exposer peuvent sans peine se démontrer par là ; mais chacun en sentira la vérité au premier aspect.

Nous désignons dorénavant la congruence de deux nombres par ce signe $\equiv$, en y joignant, lorsqu'il sera nécessaire, le module renfermé entre parenthèses ; ainsi $-16 \equiv 9\ (mod\ 5)$, $-7 \equiv 15\ (mod\ 11)$[2].

3. THEOREME : *Soient m nombres entiers successifs a, a+1, a+2, ..., a+m-1 et un autre A, un des premiers sera congru avec A, suivant le module m, et il n'y en aura qu'un.*
[*Démonstration*]

4. Il suit de là que chaque nombre aura un résidu, tant dans la suite $0, 1, 2, ..., (m-1)$, que dans celle-ci $0, -1, -2, ..., -(m-1)$; nous les appellerons résidus minima ; et il est clair qu'à moins que 0 ne soit résidu, il y en aura toujours deux, l'un positif, l'autre négatif. S'ils sont inégaux, l'un d'eux sera $< \frac{m}{2}$; s'ils sont égaux, chacun d'eux $= \frac{m}{2}$ sans avoir égard au signe ; d'où il suit qu'un nombre quelconque a un résidu qui ne surpasse pas la moitié du module, et que nous appellerons résidu minimum absolu.

Par exemple -13 suivant le module 5, a pour résidu minimum positif 2, qui est en même temps minimum absolu, et -3 pour résidu minimum négatif ; $+5$ suivant le module 7, est lui-même son résidu minimum positif ; -2 est le résidu minimum négatif et en même temps le minimum absolu.

Annexe 2 : une citation extraite des Recherches Arithmétiques de Gauss (p.416)

Le problème où l'on se propose de distinguer les nombres premiers des nombres composés, [...], est connu comme un des plus importants et des plus utiles de toute l'Arithmétique ; [...]. En outre, la dignité de la science semble demander que l'on recherche avec soin tous les secours nécessaires pour parvenir à la solution d'un problème si élégant et si célèbre.

Annexe 3 : Valeurs absolues des résidus minima absolus pour les nombres entiers de 3 à 100

Les entêtes de colonnes fournissent les modules $4k + 2$ selon lesquels sont calculées les valeurs de $f(x, k)$.

[2]Nous avons adopté ce signe à cause de la grande analogie qui existe entre l'égalité et la congruence. C'est pour la même raison que Legendre, dans des mémoires que nous aurons souvent occasion de citer, a employé le signe même de l'égalité, pour désigner la congruence ; nous en avons préféré un autre, pour prévenir toute ambiguité.

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
3 :	1	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
4 :	0	1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
5 :	1	2	0	2	4	6	8	10	12	14	16
6 :	0	3	1	1	3	5	7	9	11	13	15
7 :	1	2	2	0	2	4	6	8	10	12	14
8 :	0	1	3	1	1	3	5	7	9	11	13
9 :	1	0	4	2	0	2	4	6	8	10	12
10 :	0	1	5	3	1	1	3	5	7	9	11
11 :	1	2	4	4	2	0	2	4	6	8	10
12 :	0	3	3	5	3	1	1	3	5	7	9
13 :	1	2	2	6	4	2	0	2	4	6	8
14 :	0	1	1	7	5	3	1	1	3	5	7
15 :	1	0	0	6	6	4	2	0	2	4	6
16 :	0	1	1	5	7	5	3	1	1	3	5
17 :	1	2	2	4	8	6	4	2	0	2	4
18 :	0	3	3	3	9	7	5	3	1	1	3
19 :	1	2	4	2	8	8	6	4	2	0	2
20 :	0	1	5	1	7	9	7	5	3	1	1
21 :	1	0	4	0	6	10	8	6	4	2	0
22 :	0	1	3	1	5	11	9	7	5	3	1
23 :	1	2	2	2	4	10	10	8	6	4	2
24 :	0	3	1	3	3	9	11	9	7	5	3
25 :	1	2	0	4	2	8	12	10	8	6	4
26 :	0	1	1	5	1	7	13	11	9	7	5
27 :	1	0	2	6	0	6	12	12	10	8	6
28 :	0	1	3	7	1	5	11	13	1	9	7
29 :	1	2	4	6	2	4	10	14	12	10	8
30 :	0	3	5	5	3	3	9	15	13	11	9
31 :	1	2	4	4	4	2	8	14	14	12	10
32 :	0	1	3	3	5	1	7	13	15	13	11
33 :	1	0	2	2	6	0	6	12	16	14	12
34 :	0	1	1	1	7	1	5	11	17	15	13
35 :	1	2	0	0	8	2	4	10	16	16	14
36 :	0	3	1	1	9	3	3	9	15	17	15
37 :	1	2	2	2	8	4	2	8	14	18	16
38 :	0	1	3	3	7	5	1	7	13	19	17
39 :	1	0	4	4	6	6	0	6	12	18	18
40 :	0	1	5	5	5	7	1	5	11	17	19
41 :	1	2	4	6	4	8	2	4	10	16	20
42 :	0	3	3	7	3	9	3	3	9	15	21
43 :	1	2	2	6	2	10	4	2	8	14	20
44 :	0	1	1	5	1	11	5	1	7	13	19
45 :	1	0	0	4	0	10	6	0	6	12	18
46 :	0	1	1	3	1	9	7	1	5	11	17
47 :	1	2	2	2	2	8	8	2	4	10	16
48 :	0	3	3	1	3	7	9	3	3	9	15
49 :	1	2	4	0	4	6	10	4	2	8	14
50 :	0	1	5	1	5	5	11	5	1	7	13

x	2	6	10	14	18	22	26	30	34	38	42
51 :	1	0	4	2	6	4	12	6	0	6	12
52 :	0	1	3	3	7	3	13	7	1	5	11
53 :	1	2	2	4	8	2	12	8	2	4	10
54 :	0	3	1	5	9	1	11	9	3	3	9
55 :	1	2	0	6	8	0	10	10	4	2	8
56 :	0	1	1	7	7	1	9	11	5	1	7
57 :	1	0	2	6	6	2	8	12	6	0	6
58 :	0	1	3	5	5	3	7	13	7	1	5
59 :	1	2	4	4	4	4	6	14	8	2	4
60 :	0	3	5	3	3	5	5	15	9	3	3
61 :	1	2	4	2	2	6	4	14	10	4	2
62 :	0	1	3	1	1	7	3	13	11	5	1
63 :	1	0	2	0	0	8	2	12	12	6	0
64 :	0	1	1	1	1	9	1	11	13	7	1
65 :	1	2	0	2	2	10	0	10	14	8	2
66 :	0	3	1	3	3	11	1	9	15	9	3
67 :	1	2	2	4	4	10	2	8	16	10	4
68 :	0	1	3	5	5	9	3	7	17	11	5
69 :	1	0	4	6	6	8	4	6	16	12	6
70 :	0	1	5	7	7	7	5	5	15	13	7
71 :	1	2	4	6	8	6	6	4	14	14	8
72 :	0	3	3	5	9	5	7	3	13	15	9
73 :	1	2	2	4	8	4	8	2	12	16	10
74 :	0	1	1	3	7	3	9	1	11	17	11
75 :	1	0	0	2	6	2	10	0	10	18	12
76 :	0	1	1	1	5	1	11	1	9	19	13
77 :	1	2	2	0	4	0	12	2	8	18	14
78 :	0	3	3	1	3	1	13	3	7	17	15
79 :	1	2	4	2	2	2	12	4	6	16	16
80 :	0	1	5	3	1	3	11	5	5	15	17
81 :	1	0	4	4	0	4	10	6	4	14	18
82 :	0	1	3	5	1	5	9	7	3	13	19
83 :	1	2	2	6	2	6	8	8	2	12	20
84 :	0	3	1	7	3	7	7	9	1	11	21
85 :	1	2	0	6	4	8	6	10	0	10	20
86 :	0	1	1	5	5	9	5	11	1	9	19
87 :	1	0	2	4	6	10	4	12	2	8	18
88 :	0	1	3	3	7	11	3	13	3	7	17
89 :	1	2	4	2	8	10	2	14	4	6	16
90 :	0	3	5	1	9	9	1	15	5	5	15
91 :	1	2	4	0	8	8	0	14	6	4	14
92 :	0	1	3	1	7	7	1	13	7	3	13
93 :	1	0	2	2	6	6	2	12	8	2	12
94 :	0	1	1	3	5	5	3	11	9	1	11
95 :	1	2	0	4	4	4	4	10	10	0	10
96 :	0	3	1	5	3	3	5	9	11	1	9
97 :	1	2	2	6	2	2	6	8	12	2	8
98 :	0	1	3	7	1	1	7	7	13	3	7
99 :	1	0	4	6	0	0	8	6	14	4	6
100 :	0	1	5	5	1	1	9	5	15	5	5

Annexe 4 : Produits $f(p, 4i+2) * f(2x-p, 4i+2)$ pour les nombres pairs $2x$ de 26 à 100, p (indice des colonnes) allant de 3 à x ou $x-1$ suivant la parité de x, i (indice des lignes) allant de 1 à $\sqrt{x}$)

On note au bout de la ligne en vert le fait que $2k+1$ divise ($|$) ou ne divise pas ($\nmid$) $2x$.

$26 = 13 + 13$

0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 26$
	0	8	8	0	4	$5 \nmid 26$
		0	8	24	36	$7 \nmid 26$

$28 = 11 + 17$

0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 28$
	0	8	16	8	0	$5 \nmid 28$
		0	4	16	36	$7 \mid 28$

$30 = 11 + 19 = 13 + 17$

0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 30$
	0	4	16	16	4	0	$5 \mid 30$
		0	0	8	24	36	$7 \nmid 30$

$32 = 13 + 19$

0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 32$
	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 32$
		0	4	0	12	24	$7 \nmid 32$
			0	12	32	48	$9 \nmid 32$

$34 = 11 + 23 = 17 + 17$

0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 34$
	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 34$
		0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 34$
			0	8	24	48	64	$9 \nmid 34$

$36 = 13 + 23 = 17 + 19$

0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 36$
	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 36$
		0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 36$
			0	4	16	36	64	$9 \mid 36$

$38 = 19 + 19$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 38$
	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 38$
		0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 38$
			0	0	8	24	48	64	$9 \nmid 38$

$40 = 11 + 29 = 17 + 23$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 40$
	0	4	16	16	4	0	4	16	$5 \mid 40$
		0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 40$
			0	4	0	12	32	48	$9 \nmid 40$

$42 = 11 + 31 = 13 + 29 = 19 + 23$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 42$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 42$
		0	4	16	36	36	16	4	0	$7 \mid 42$
			0	8	8	0	16	32	36	$9 \nmid 42$

$44 = 13 + 31$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 44$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 44$
		0	0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 44$
			0	12	16	12	0	16	24	$9 \nmid 44$

$46 = 17 + 29 = 23 + 23$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 46$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 46$
		0	4	0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 46$
			0	16	24	24	16	0	12	16	$9 \nmid 46$

$48 = 11 + 37 = 17 + 31 = 19 + 29$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 48$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 48$
		0	8	8	0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 48$
			0	16	32	36	32	16	0	8	$9 \nmid 48$

$50 = 13 + 37 = 19 + 31$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 50$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	$5 \mid 50$
		0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 50$
			0	12	32	48	48	32	12	0	4	$9 \nmid 50$
				0	8	8	0	16	40	60	64	$11 \nmid 50$

$52 = 23 + 29$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 52$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 52$
		0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	$7 \nmid 52$
			0	8	24	48	64	48	24	8	0	$9 \nmid 52$
				0	12	16	12	0	20	40	48	$11 \nmid 52$

$54 = 13+41 = 17+37 = 23+31$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 54$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 54$
		0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	$7 \nmid 54$
			0	4	16	36	64	64	36	16	4	0	$9 \mid 54$
				0	16	24	24	16	0	20	32	36	$11 \nmid 54$

$56 = 13+43 = 19+37$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 56$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 56$
		0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	$7 \mid 56$
			0	0	8	24	48	64	48	24	8	0	$9 \nmid 56$
				0	20	32	36	32	20	0	16	24	$11 \nmid 56$

$58 = 17+41 = 29+29$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 58$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 58$
		0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	$7 \nmid 58$
			0	4	0	12	32	48	48	32	12	0	4	$9 \nmid 58$
				0	20	40	48	48	40	20	0	12	16	$11 \nmid 58$

$60 = 13+47 = 17+43 = 19+41 = 23+37 = 29+31$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 60$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	$5 \mid 60$
		0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	$7 \nmid 60$
			0	8	8	0	16	32	36	32	16	0	8	$9 \nmid 60$
				0	16	40	60	64	60	40	16	0	8	$11 \nmid 60$

$62 = 19+43 = 31+31$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 62$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 62$
		0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	$7 \nmid 62$
			0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	$9 \nmid 62$
				0	12	32	60	80	80	60	32	12	0	4	$11 \nmid 62$

$64 = 17+47 = 23+41$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 64$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 64$
		0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 64$
			0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	$9 \nmid 64$
				0	8	24	48	80	100	80	48	24	8	0	$11 \nmid 64$

$66 = 13+53 = 19+47 = 23+43 = 29+47$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	$3 \mid 66$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 66$
		0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 66$
			0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16	32	36	$9 \nmid 66$
				0	4	16	36	64	100	100	64	36	16	4	0	$11 \mid 66$

$68 = 31 + 37$

0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 $3 \nmid 68$

0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 $5 \nmid 68$

0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 $7 \nmid 68$

0 12 32 48 48 32 12 0 4 0 12 32 48 $9 \nmid 68$

0 0 8 24 48 80 100 80 48 24 8 0 $11 \nmid 68$

$70 = 17 + 53 = 23 + 47 = 29 + 41$

0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 $3 \nmid 70$

0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 $5 \mid 70$

0 4 16 36 36 16 4 0 4 16 36 36 16 4 0 $7 \mid 70$

0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8 24 48 64 $9 \nmid 70$

0 4 0 12 32 60 80 80 60 32 12 0 4 $11 \nmid 70$

$72 = 19 + 53 = 29 + 43 = 31 + 41$

0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 $3 \mid 72$

0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 $5 \nmid 72$

0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 $7 \nmid 72$

0 4 16 36 64 64 36 16 4 0 4 16 36 64 $9 \mid 72$

0 8 8 0 16 40 60 64 60 40 16 0 8 $11 \nmid 72$

0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 $13 \nmid 72$

$74 = 31 + 43 = 37 + 37$

0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 $3 \nmid 74$

0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 $5 \nmid 74$

0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 $7 \nmid 74$

0 0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8 24 48 64 $9 \nmid 74$

0 12 16 12 0 20 40 48 48 40 20 0 12 16 $11 \nmid 74$

0 12 32 60 96 120 120 96 60 32 12 0 4 $13 \nmid 74$

$76 = 17 + 59 = 23 + 53 = 29 + 47$

0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 $3 \nmid 76$

0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 $5 \nmid 76$

0 8 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8 $7 \nmid 76$

0 4 0 12 32 48 48 32 12 0 4 0 12 32 48 $9 \nmid 76$

0 16 24 24 16 0 20 32 36 32 20 0 16 24 $11 \nmid 76$

0 8 24 48 80 120 144 120 80 48 24 8 0 $13 \nmid 76$

$78 = 17 + 61 = 19 + 59 = 31 + 47 = 37 + 41$

0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 $3 \mid 78$

0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 $5 \nmid 78$

0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 $7 \nmid 78$

0 8 8 0 16 32 36 32 16 0 8 8 0 16 32 36 $9 \nmid 78$

0 20 32 36 32 20 0 16 24 24 16 0 20 32 36 $11 \nmid 78$

0 4 16 36 64 100 144 144 100 64 36 16 4 0 $13 \mid 78$

$80 = 19 + 61 = 37 + 43$

0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 $\quad 3 \nmid 80$

0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 $\quad 5 \mid 80$

0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 $\quad 7 \nmid 80$

0 12 16 12 0 16 24 24 16 0 12 16 12 0 16 24 $\quad 9 \nmid 80$

0 20 40 48 48 40 20 0 12 16 12 0 20 40 48 $\quad 11 \nmid 80$

0 0 8 24 48 80 120 144 120 80 48 24 8 0 $\quad 13 \nmid 80$

$82 = 23 + 59 = 29 + 53 = 41 + 41$

0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 $\quad 3 \nmid 82$

0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 $\quad 5 \nmid 82$

0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 $\quad 7 \nmid 82$

0 16 24 24 16 0 12 16 12 0 16 24 24 16 0 12 16 $\quad 9 \nmid 82$

0 16 40 60 64 60 40 16 0 8 8 0 16 40 60 64 $\quad 11 \nmid 82$

0 4 0 12 32 60 96 120 120 96 60 32 12 0 4 $\quad 13 \nmid 82$

$84 = 17 + 67 = 23 + 61 = 31 + 53 = 37 + 47 = 41 + 43$

0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 $\quad 3 \mid 84$

0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 $\quad 5 \nmid 84$

0 4 16 36 36 16 4 0 4 16 36 36 16 4 0 4 16 36 $\quad 7 \mid 84$

0 16 32 36 32 16 0 8 8 0 16 32 36 32 16 0 8 $\quad 9 \nmid 84$

0 12 32 60 80 80 60 32 12 0 4 0 12 32 60 80 $\quad 11 \nmid 84$

0 8 8 0 16 40 72 96 100 96 72 40 16 0 8 $\quad 13 \nmid 84$

$86 = 19 + 67 = 43 + 43$

0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 $\quad 3 \nmid 86$

0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 0 8 8 0 4 $\quad 5 \nmid 86$

0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 24 8 0 0 8 24 36 $\quad 7 \nmid 86$

0 12 32 48 48 32 12 0 4 0 12 32 48 48 32 12 0 4 $\quad 9 \nmid 86$

0 8 24 48 80 100 80 48 24 8 0 0 8 24 48 80 100 $\quad 11 \nmid 86$

0 12 16 12 0 20 48 72 80 80 72 48 20 0 12 16 $\quad 13 \nmid 86$

$88 = 17 + 71 = 29 + 59 = 41 + 47$

0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 0 4 0 $\quad 3 \nmid 88$

0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 0 8 16 8 0 $\quad 5 \nmid 88$

0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 24 12 0 4 0 12 24 $\quad 7 \nmid 88$

0 8 24 48 64 48 24 8 0 0 8 24 48 64 48 24 8 0 $\quad 9 \nmid 88$

0 4 16 36 64 100 100 64 36 16 4 0 4 16 36 64 100 $\quad 11 \mid 88$

0 16 24 24 16 0 24 48 60 64 60 48 24 0 16 24 $\quad 13 \nmid 88$

$90 = 17{+}73 = 19{+}71 = 23{+}67 = 29{+}61 = 31{+}59 = 37{+}53 = 43{+}47$

0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 4 4 0 $\quad 3 \mid 90$

0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 4 16 16 4 0 $\quad 5 \mid 90$

0 8 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 12 0 8 8 0 12 16 $\quad 7 \nmid 90$

0 4 16 36 64 64 36 16 4 0 4 16 36 64 64 36 16 4 0 $\quad 9 \mid 90$

0 0 8 24 48 80 100 80 48 24 8 0 0 8 24 48 80 100 $\quad 11 \nmid 90$

0 20 32 36 32 20 0 24 40 48 48 40 24 0 20 32 36 $\quad 13 \nmid 90$

$92 = 19 + 73 = 31 + 61$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 92$
	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	$5 \nmid 92$
		0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	8	0	12	16	12	0	8	$7 \nmid 92$
			0	0	8	24	48	64	48	24	8	0	0	8	24	48	64	48	24	8	0	$9 \nmid 92$
				0	4	0	12	32	60	80	80	60	32	12	0	4	0	12	32	60	80	$11 \nmid 92$
					0	24	40	48	48	40	24	0	20	32	36	32	20	0	24	40	48	$13 \nmid 92$

$94 = 23 + 71 = 41 + 53 = 47 + 47$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 94$
	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	$5 \nmid 94$
		0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	0	12	24	24	12	0	4	$7 \nmid 94$
			0	4	0	12	32	48	48	32	12	0	4	0	12	32	48	48	32	12	0	4	$9 \nmid 94$
				0	8	8	0	16	40	60	64	60	40	16	0	8	8	0	16	40	60	64	$11 \nmid 94$
					0	24	48	60	64	60	48	24	0	16	24	24	16	0	24	48	60	64	$13 \nmid 94$

$96 = 17 + 79 = 23 + 73 = 29 + 67 = 37 + 59 = 43 + 53$

0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	4	0	4	$3 \mid 96$
	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8	0	4	0	8	$5 \nmid 96$
		0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 96$
			0	8	8	0	16	32	36	32	16	0	8	8	0	16	32	36	32	16	0	8	$9 \nmid 96$
				0	12	16	12	0	20	40	48	48	40	20	0	12	16	12	0	20	40	48	$11 \nmid 96$
					0	20	48	72	80	80	72	48	20	0	12	16	12	0	20	48	72	80	$13 \nmid 96$

$98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$

0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	$3 \nmid 98$
	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	8	0	0	8	16	$5 \nmid 98$
		0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	36	16	4	0	4	16	36	36	16	4	0	$7 \mid 98$
			0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	$9 \nmid 98$
				0	16	24	24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	24	16	0	20	32	36	$11 \nmid 98$
					0	16	40	72	96	100	96	72	40	16	0	8	8	0	16	40	72	96	100	$13 \nmid 98$
						0	12	16	12	0	20	48	84	112	120	120	112	84	482	0	0	12	16	$15 \nmid 98$

$100 = 17 + 83 = 29 + 71 = 41 + 59 = 47 + 53$

0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	0	4	0	$3 \nmid 100$
	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	16	4	0	4	16	$5 \mid 100$
		0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	0	8	24	36	24	8	0	$7 \nmid 100$
			0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	24	16	0	12	16	12	0	16	24	$9 \nmid 100$
				0	20	32	36	32	20	0	16	24	24	16	0	20	32	36	32	20	0	16	24	$11 \nmid 100$
					0	12	32	60	96	120	120	96	60	32	12	0	4	0	12	32	60	96	120	$13 \nmid 100$
						0	16	24	24	16	0	24	56	84	96	100	96	84	56	24	0	16	24	$15 \nmid 100$

Annexe 5 : Source du programme de calcul des produits pour les nombres pairs doubles de nombres impairs

```
#include <iostream>
#include <cmath>

int main (int argc, char* argv[])
{   int x, m, i, j, k, n, pp ;
    int tab[200][200] ;
    int produit[200] ;

    for (x= 3; x <= 100 ; x++)
        for (i = 1 ; i <= x ; ++i)
            for (j = 1 ; j <= x ; ++j)
                if (((x % (4*i+2)) == j) || ((x % (4*i+2)) == (4*i+2-j)))
                    if (2*i+1-j >= 0) tab[x][i] = 2*i+1-j ;
                    else tab[x][i] = j-2*i-1 ;
    for (x = 13 ; x <= 50 ; ++x)
    {
        m = (int) sqrt((float) x);
        std::cout << "------------------------------" << "\n" ;
        std::cout << "\n" << x << ":\n" ;
        for (n=1; n <= (x-1)/2 ; ++n) produit[2*n+1] = 1;
        for (i = 1 ; i <= m ; ++i)
        {
            for (k = 1 ; k < i ; ++k)
                std::cout << "␣␣␣" ;
            for (k = 2*i+1 ; k <= x ; k=k+2)
            {
                pp = tab[k][i] * tab[2*x-k][i];
                if (pp == 0) produit[k] = 0 ;
                printf("%3d", pp);
            }
            std::cout << "\n" ;
        }
        std::cout << "------------------------------" << "\n" ;
        for (n=1; n <= (x-1)/2 ; ++n)
            if (produit[2*n+1] > 0) printf("%3d",1) ; else printf("%3d",0) ;
        std::cout << "\n" ;
        for (n=1; n <= (x-1)/2 ; ++n)
            if (produit[2*n+1] > 0)
                std::cout << 2*n+1 << "␣est␣un␣décomposant␣de␣" << 2*x << "\n" ;
    }
}
```