Les valeurs propres d'un triangle équilatéral

Mark A. Pinsky

Résumé. Soit D un triangle équilatéral de côté 1. Considérons les solutions de $\Delta u + \lambda u = 0$ dans D avec soit la condition au bord $u = 0$ soit la condition $\partial u/\partial n = 0$. Dénotons par $n(\lambda)$ le nombre de valeurs propres distinctes $\leqq \lambda$, par $N(\lambda)$ le nombre total de valeurs propres $\leqq \lambda$, incluant les multiplicités. Le Théorème 1 établit que pour l'une ou l'autre condition au bord, $\lambda_{mn} = (16\pi^2/27)(m^2 + n^2 - mn)$, où $m + n = 0 \pmod 3$. Dans le premier cas, il est également nécessité que $m \neq 2n, n \neq 2m$. Le Théorème 2 établit que $\lim_{\lambda\to\infty}(N(\lambda)/n(\lambda)) = \infty$. La preuve utilise la représentation de λ_{mn} comme norme d'un entier dans le corps quadratique de nombres $k(\omega)$, où ω est une racine cubique de l'unité. Ces résultats contrastent avec les résultats généraux pour les domaines avec symétrie Z_3 obtenus par V. Arnold (Functional Anal. Appl., 1972).

1. Introduction.

Soit D un triangle équilatéral de côté unité. Nous nous intéressons au problème de valeur propre

$$\begin{aligned} \Delta f + \lambda f = 0 &\quad \text{dans } D,\\ f = 0 &\quad \text{sur } D. \end{aligned}$$

Ce problème a été étudié par Lamé [7, p. 131-136], qui a obtenu une forme intégrale quadratique pour les valeurs propres. En essayant de comprendre le travail de Lamé, nous avons trouvé les défauts suivants : (i) la liste complète des valeurs propres n'est pas clairement explicitée, soit par les entrées autorisées de la forme quadratique, soit par une quelconque caractérisation intrinsèque, et (ii) il ne donne pas de méthode pour calculer les multiplicités des valeurs propres. Il est donc intéressant de donner un traitement mis à jour de ces deux points.

Dans les §§ 2 et 3, nous donnons un résultat dérivé élémentaire et auto-suffisant de celui de Lamé, à la fois pour les conditions aux bords de Dirichlet et Neumann. Au § 4, nous faisons l'observation non publiée précédemment que toute valeur propre peut être écrite comme la norme d'un entier dans le corps de nombres quadratiques $Q(\sqrt{-3})$, ce qui nous permet de trouver une formule pour la multiplicité de toute valeur propre. Finalement, ceci est utilisé au § 5 pour démontrer que la "multiplicité moyenne" quand elle est définie convenablement devient infinie quand $\lambda \to \infty$.

Ces questions ont aussi été d'un intérêt récent en connexion avec le comportement non-générique dans les domaines présentant une symétrie de rotation de 120° [3], [4]. Pour tous ces domaines, les fonctions propres peuvent être choisies comme étant symétriques ($Rf = f$) ou complexe ($Rf = e^{\pm 2\pi i/3} f$), où R dénote une rotation de 120°. On montre ci-dessous que pour une valeur propre donnée du triangle équilatéral, les fonctions propres sont soit toutes symétriques, soit toutes complexes (des valeurs propres hybrides ne sont pas possibles). Les dimensions des espaces propres peuvent être arbitrairement grands, à la fois pour les valeurs propres symétriques et pour les valeurs propres complexes. Ceci présente un contraste frappant avec le disque unité, où les valeurs propres sont de multiplicité un ou deux.

2. Valeurs propres du problème de Dirichlet.

Nous classons les valeurs propres du Laplacien sur le domaine triangulaire

$$D = \{(x, y) : 0 < y < x\sqrt{3}, y < \sqrt{3}(1 - x)\}, \tag{2.1}$$

Reçu par les éditeurs le 16 août 1979, et en forme révisée le 29 novembre 1979.
Département de Mathématique, Northwestern University, Evanston, Illinois, 60201.
référence de l'article : SIAM J. Math. Anal. Vol. 11, N° 5, Septembre 1980.

Traduction : Denise Vella-Chemla, Juillet 2021

avec aucune condition au bord.

Théorème 1. *Les valeurs propres de Δ sur D sont les nombres*

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn), \qquad m, n = 0, \pm 1, \ldots, \tag{2.2}$$

avec les conditions suivantes[1] :

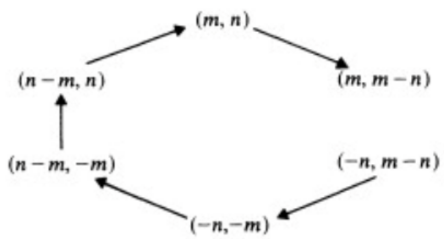
$$\begin{array}{ll} (A) & m + n \text{ est un multiple de } 3, \\ (B) & m \neq 2n, \\ (C) & n \neq 2m. \end{array} \tag{2.3}$$

La multiplicité de λ_{mn} est (1/6) $\times$ le nombre de fois où elle apparaît dans le réseau (2.2). Les fonctions propres sont de la forme

$$f(x, y) = \sum_{(m,n)} \pm \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(nx + \frac{(2n - m)y}{\sqrt{3}}\right). \tag{2.4}$$

Dans cette somme, (m, n) couvre le domaine $\mathscr{S} \subseteq Z^2$, où $|\mathscr{S}| = 6$ et $\pm$ est déterminé par les règles suivantes :

(2.5)



Chaque transition induit un changement de signe dans l'entrée (m, n) de (2.4).

Note. La formule de Lamé est $\lambda_{\mu\nu} = (16\pi^2/9)(\mu^2 + \nu^2 + \mu\nu)$. Cela peut être obtenu de notre formule au moyen de la substitution $m = 2\mu + \nu, n = \mu - \nu$. Avec ces variables, (B) et (C) énoncent que $\mu \neq 0, \mu + \nu \neq 0$.

Nous introduisons l'opérateur de rotation par

$$R : (x, y) \to \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2}\right).$$

Une fonction propre est dite *symétrique* si $R \circ f = f, \vec{x} \in D$. Une fonction propre est dite *complexe* si $R \circ f \; = \; \exp\,(\pm 2\pi i/3) f, \vec{x} \in D$.

Corollaire 1. *La valeur propre λ_{mn} appartient à une fonction propre symétrique ssi la condition additionnelle suivante est vérifiée* :

$$(D) \qquad m \text{ est un multiple de } 3,$$

(de façon équivalente, la fonction propre associée est périodique en x de période 1). La valeur propre λ_{mn} appartient à une fonction propre complexe ssi m est congruent à $+1$ ou -1, modulo 3. En particulier, une valeur propre ne peut appartenir à la fois à une fonction propre complexe et à une

1. Il est nécessaire que (B) et (C) soient satisfaites pour toute paire (m, n) qui apparaît dans (2.5).

fonction propre symétrique.

Corollaire 2. *Les fonctions suivantes sont des fonctions propres symétriques et elles fournissent une liste complète des valeurs propres simples.*

$$f_p(x,y) = \sin(2\pi p\overline{d}_1) + sin(2\pi p\overline{d}_2) + sin(2\pi p\overline{d}_3), \qquad p = 1,2,\dots, \tag{2.6}$$

où

$$\begin{aligned} \overline{d}_1 &= \frac{2y}{\sqrt{3}} \\ \overline{d}_2 &= x - \frac{y}{\sqrt{3}} \\ \overline{d}_3 &= 1 - x - \frac{y}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$\overline{d}_1, \overline{d}_2, \overline{d}_3$ sont les altitudes normalisées du point (x,y) dans le triangle D. Elles satisfont la normalisation $\overline{d}_1 + \overline{d}_2 + \overline{d}_3 = 1$ et les règles de réflexion $R_i \circ d_i = -d_i,\ i = 1,2,3$. Les valeurs propres sont obtenues par la formule

$$\lambda_{3p,0} = \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(9p^2).$$

Pour prouver ces résultats, nous introduisons le parallélogramme

$$\widetilde{D} \ = \ \left\{(x,y) : 0 < y < \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{\sqrt{3}} < x < 3 + \frac{y}{\sqrt{3}}\right\},$$

et les opérateurs de réflexion

$$\begin{aligned} R_1 :&\quad (x,y) \to (x,-y), \\ R_2 :&\quad (x,y) \to \left(-\frac{x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{y}{2}\right), \\ R_3 :&\quad (x,y) \to \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Il y a un isomorphisme canonique entre $L^2(D)$ et le sous-espace suivant de $L^2(\widetilde{D})$,

$$H = \{f \in L^2(\widetilde{D}) : R_i f = -f,\ i = 1,2,3\}, \tag{2.7}$$

obtenu par $f \to f|_D$ pour $f \in H$. Donc, n'importe quelle fonction propre de Δ sur D peut être obtenue en résolvant l'équation sur H. La restriction à D satisfera automatiquement les conditions au bord de Dirichlet. Par un résultat standard dans [1, p. 148], nous obtenons une liste complète des fonctions propres de Δ sur D données par combinaison linéaire de

$$\widetilde{f}(x,y) = \exp\left(i(\alpha x + \beta y)\right), \tag{2.8}$$

où (α, β) sont dans le réseau dual. Cela nécessite que $3\alpha = 2n\pi, 3\alpha/2 + 3\sqrt{3}\beta/2 = 2m\pi$ pour les entiers (m,n). Donc $\alpha = 2n\pi/3, \beta = 2\pi(2m-n)/(3\sqrt{3})$. On vérifie facilement que, correspondant à cela,

$$\begin{aligned} \lambda_{mn} &= \alpha^2 + \beta^2, \\ &= \left(\frac{2n\pi}{3}\right)^2 + (2\pi)^2\left(\frac{(2m-n)^2}{27}\right), \\ &= \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn). \end{aligned} \tag{2.9}$$

La fonction propre est donc de la forme

$$\tilde{f} = \sum_{(m,n)} A_{mn} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left[nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right], \tag{2.10}$$

où la somme est sur (m, n) avec $\lambda_{mn} = \lambda$. Pour satisfaire les conditions de réflexion, écrivons

$$\begin{aligned} R_1 \circ \tilde{f} &= \sum_{m'n'} A_{m'n'} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left(n'x - \frac{(2m'-n')y}{\sqrt{3}}\right), \\ &= \sum_{mn} A_{m-n,n} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right), \end{aligned}$$

où on a effectué la substitution $m' = n - m, n' = n$. Par conséquent, $R_1 \circ \tilde{f} = -\tilde{f}$ nécessite que

$$A_{mn} = -A_{n-m,n}. \tag{2.11}$$

Le second opérateur de réflexion est

$$\begin{aligned} R_2 \circ \tilde{f} &= \sum_{m'n'} A_{m'n'} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left[n'\left(\frac{-x}{2} + \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + (2m'-n')\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right)\right], \\ &= \sum_{m'n'} A_{m'n'} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left[(m-n')x + \frac{(m'+n')y}{\sqrt{3}}\right], \\ &= \sum_{mn} A_{m,m-n} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous devons avoir

$$A_{mn} = -A_{m,m-n}. \tag{2.12}$$

Le troisième opérateur de réflexion est

$$\begin{aligned} R_3 \circ \tilde{f} &= \sum_{m'n'} A_{m'n'} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left[n'\left(\frac{3}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right) + (2m'-n')\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} + \frac{y}{2\sqrt{3}}\right)\right], \\ &= \sum_{m'n'} A_{m'n'} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left[(n'+m') \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left(-m'x + \frac{(m'-2n')y}{\sqrt{3}}\right)\right], \\ &= \sum_{mn} A_{-n,-m} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) (-m-n) \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) \left(mx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi nous devons avoir

$$A_{m,n} = -A_{-n,-m} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right) (-m-n). \tag{2.13}$$

Maintenant, si pour un couple fixé (m_0, n_0), nous avons $A_{m_0,n_0} = A$, alors en itérant (2.11) et (2.12) et en se référant au graphique (2.5), on voit que $\exp(2\pi i/3)(-m-n) = 1$, i.e., $m+n$ est un multiple de 3, ce qui prouve la condition (A). Pour prouver la condition (B), supposons au contraire que $m_0 = 2n_0$. C'est la même chose que $(m_0, n_0) = (m_0, m_0 - n_0)$. La propriété (2.12) nécessite alors que $A = -A$, i.e., $A = 0$. Similairement, pour prouver la condition (C), nous notons que $n_0 = 2m_0$ est identique à $(m_0, n_0) = (n_0 - m_0, n_0)$, ce qui par la propriété (2.13) nécessite que $A = 0$. Inversement, nous vérifions directement que n'importe quelle somme de la forme (2.4) satisfait les conditions de réflexion (2.7) et est par conséquent une fonction propre. Ainsi nous avons prouvé le théorème.

Pour prouver le Corollaire 1, nous étudions les effets de l'opérateur de rotation sur (2.10) :

$$\begin{aligned} R \circ \widetilde{f} &= \sum_{m'n'} A_{m'n'} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)(n') \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left[(m'-n')x - \frac{(m'+n')y}{\sqrt{3}}\right], \\ &= \sum_{mn} A_{n-m,-m} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)(-m) \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left[mx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right]. \end{aligned}$$

Mais (2.11) et (2.12) nécessitent que $A_{n-m,-n} = A_{m,n}$. Par conséquent, nous devons avoir $\exp(2\pi i/3)(-m) = 1$, i.e., m est un multiple de 3. De façon similaire, si m est congruent à ± 1 modulo 3, il est clair que $R \circ \widetilde{f} = e^{\pm 2\pi i/3} \widetilde{f}$, i.e., f est une fonction propre complexe.

Pour démontrer le Corollaire 2, notons tout d'abord que pour le choix $m = 3p, n = 0$, la formule (2.4) produit la fonction propre symétrique (2.6). Nous allons montrer maintenant que cela correspond aux seules valeurs propres simples de Δ sur D. En effet, supposons que λ_{mn} est une valeur propre simple correspondant à l'ensemble $\mathscr{S}$ décrit en (2.5). Si $(m, 0) \in \mathscr{S}$ pour un certain m, alors par le Théorème 1, $m = 3p$ et le résultat est prouvé. Par conséquent, nous pouvons supposer que $\mathscr{S}$ ne contient pas de paire de la forme $(m, 0)$. Ainsi nous pouvons écrire

$$\mathscr{S} = \{(m_0, n_0), (m_0, m_0 - n_0), (-n_0, m_0 - n_0), (-n_0, -m_0), (n_0 - m_0, -m_0), (n_0 - m_0, n_0)\}.$$

Par hypothèse, nous devons avoir $n_0 \neq 0, m_0 \neq 0, n_0 \neq m_0$. Définissons un nouvel ensemble

$$\widetilde{\mathscr{S}} = \{(n_0, m_0), (n_0, n_0 - m_0), (-m_0, n_0 - m_0), (-m_0, n_0 - m_0), (m_0 - n_0, n_0), (m_0 - n_0, m_0)\}.$$

Clairement $\mathscr{S} \cap \widetilde{\mathscr{S}} = \varnothing$, et par conséquent $\widetilde{\mathscr{S}}$ peut être utilisé pour fabriquer une nouvelle fonction propre selon la formule (2.4) avec la même valeur propre - une contradiction. Par conséquent $(m, 0) \in \mathscr{S}$ pour un certain m et nécessairement $m = 3p$ par le Théorème 1. Cela amène à nouveau à la formule (2.6), que l'on devait démontrer.

3. Valeurs propres et problème de Neumann.

Les méthodes des §§ 1 et 2 peuvent aussi être appliquées pour énumérer les valeurs propres du problème

$$\Delta f + \lambda f = 0, \qquad x \in D, \qquad \frac{\partial f}{\partial n}\bigg|\partial D = 0.$$

En effet, étant donnée f sur D, on fait monter f vers une fonction $\widetilde{f}$ sur $\widetilde{D}$ satisfaisant $R_i \circ \widetilde{f} = +\widetilde{f}$, $x \in D, i = 1, 2, 3; \widetilde{f}|_D = f. \widetilde{f}$ sera toujours une fonction propre sur D et par conséquent une combinaison linéaire de (2.8) avec les mêmes valeurs de (α, β). En appliquant l'opération de réflexion, nous avons le résultat suivant.

Proposition 3. *Les valeurs propres de Δ sur D avec conditions de Neumann aux bornes sont données par les nombres*

$$\lambda_{mn} = \left(\frac{16\pi^2}{27}\right)(m^2 + n^2 - mn),$$

où $m + n$ est un multiple de 3. Les fonctions propres sont de la forme

$$f(x, y) = \sum_{(m,n)} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)\left(nx + \frac{(2m-n)y}{\sqrt{3}}\right),$$

où (m,n) couvre le domaine $\mathscr{S} \subset Z^2$ où $|\mathscr{S}| = 6$ est déterminé par la transformation (2.5).

4. Discussion de théorie des nombres à propos des valeurs propres. Les valeurs propres peuvent être classées en utilisant la théorie de la factorisation dans l'anneau $Z(\omega)$, où $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$ est une racine primitive cubique de l'unité [5, Chapitres 14-15]. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= m^2 + n^2 - mn, \\ &= |m + n\omega|^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous faisons référence à $\tilde{\lambda}$ comme à une *valeur propre normalisée.* On montre que $Z(\omega)$ a la propriété de factorisation unique : $a = m + n\omega = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_{2r}} u$ où u est une des six unités possibles $(\pm\omega^k)$, $k = 0, 1, 2$, et les nombres premiers (p_i) sont d'un des types suivants :

(1) $p = \pi_3 \equiv (1-\omega)$;
(2) $p =$ un nombre premier rationnel de la forme $3s+2$;
(3) $p =$ un facteur $m + n\omega$ d'un nombre premier rationnel de la forme $3s+1$;

ces nombres premiers sont notés $\pi_7, \overline{\pi}_7, \pi_{13}, \overline{\pi}_{13}, \dots$.

Proposition 4. *Soit $\tilde{\lambda} = m^2 + n^2 - mn$ une valeur propre normalisée du triangle équilatéral avec conditions de Dirichlet aux bornes. Alors la factorisation en nombres premiers de $\tilde{\lambda}$ a la forme*

$$\tilde{\lambda} = 3^{\alpha_0} 2^{2\alpha_1} 5^{2\alpha_2} \dots 7^{\gamma_1} 13^{\gamma_2} \dots, \tag{4.2}$$

où

(1) $\alpha_0 \geqq 1$,
(2) *si* $\alpha_0 = 1$ *alors* $\gamma_i > 0$ *pour un certain* i,
(3) *multiplicité*$(\tilde{\lambda}) = \begin{cases} 1 & \gamma_i \equiv 0, \\ \prod_i (1+\gamma_i) & \alpha_0 = 1 \text{ ou } \gamma_i \text{ impair pour un certain } i, \\ \prod_i (1+\gamma_i) - 1 & \alpha_0 = 1 \text{ et } \gamma_i \text{ pair pour tout } i, \end{cases}$
(4) $\tilde{\lambda}$ *est symétrique ssi* $\alpha_0 \geqq 2$.

Inversement, tout entier de la forme (4.2) satisfaisant (1) et (2) est une valeur propre normalisée. Pour les conditions au bord de Neumann, nous avons seulement besoin que $\alpha_0 \geqq 1$. Dans ce cas, la multiplicité $(\tilde{\lambda}) = \prod_i (1+\gamma_i)$ dans tous les cas.

Preuve. Traduisons d'abord les conditions connues sur (m,n).

Fait 1. $m + n \equiv 0$ (3) ssi $\alpha_0 \geqq 1$.

En effet, si $\alpha_0 \geqq 1$, alors $a = (1-\omega)(\tilde{m} + \tilde{n}\omega) = (\tilde{m} + \tilde{n}) + (2\tilde{n} - \tilde{m})\omega = (m + n\omega)$ et clairement $m+n = 3\tilde{n} \equiv 0$ (3). Inversement, si $m+n\omega \in Z(\omega)$, $(m+n\omega)/(1-\omega) = [\frac{1}{3}(m+n)-n]+\omega[(m+n)/3]$. Par conséquent, si $m+n \equiv 0$ (3), alors le quotient à nouveau $\in Z(\omega)$ et par conséquent $\alpha_0 \geqq 1$.

Fait 2. $m \equiv 0$ (3), $n \equiv 0$ (3) ssi $\alpha_0 \geqq 2$.

En effet, si $\alpha_0 \geqq 2$, alors $a = (1-\omega)^2(\widetilde{m}+\widetilde{n}\omega) = 3\widetilde{n}+\bar{\omega}(3\widetilde{n}-3\widetilde{m})$ et clairement $m \equiv 0\ (3), n \equiv 0\ (3)$. Inversement, si $m + n\omega \in Z(\omega), (m + n\omega)/(1 - \omega)^2 = -\frac{1}{3}[n + m\bar{\omega}]$. Si $m = 0\ (3), n = 0\ (3)$, ce quotient à nouveau $\in Z(\omega)$ et ainsi $\alpha_0 \geqq 2$.

Fait 3. $m = 2n$ ssi a est un multiple entier de $\pi_3\bar{\omega}$, et $n = 2m$ ssi a est un multiple entier de $\pi_2\omega$.

En effet, si $m = 2n$, alors $a = m+n\omega = n(2+\omega) = n\pi_3\bar{\omega}$. Inversement, si $a = n\pi_3\bar{\omega}$, alors $a = 2n+n\omega$ et par conséquent $m = 2n$. Dans le cas où $n = 2m$, nous écrivons $a = m+n\omega = m(1+2\omega) = m\pi_3\omega$, pour parvenir à la même conclusion.

Mettre ces faits ensemble prouve les parties (1), (2), (4) de la proposition. En effet, $m \neq 2n, n \neq 2m$ nécessite que a/π_3 ne soit pas un entier. Cela nécessite que le produit $\pi_7^{\beta_1}\overline{\pi}_7^{\overline{\beta}_1}\ldots$ ne soit pas un entier, ce qui est équivalent à $\beta_i \neq \overline{\beta}_i$ pour un certain i. Finalement, $m + n \equiv 0\ (3)$ nécessite que $\alpha_0 \geqq 1$, par le Fait 1.

Pour déterminer les multiplicités, nous devons d'abord déterminer la non-unicité de (4.2). Dans ce but, appelons a, a' deux représentations possibles : $\widetilde{\lambda} = |a|^2 = |a'|^2$ où

$$\begin{aligned} a &= \pi_3^{\alpha_0}2^{\alpha_1}5^{\alpha_2}11^{\alpha_3}\ldots\pi_7^{\beta_1}\bar{\pi}_7^{\bar{\beta}_1}\ldots u, \\ a' &= \pi_3^{\alpha_0'}2^{\alpha_1'}5^{\alpha_2'}11^{\alpha_3'}\ldots\pi_7^{\beta_1'}\bar{\pi}_7^{\bar{\beta}_1'}\ldots u'. \end{aligned}$$

L'équation $|a|^2 = |a'|^2$ nécessite que

$$3^{\alpha_0}2^{2\alpha_1}5^{2\alpha_2}\ldots 7^{\beta_1+\bar{\beta}_1} = 3^{\alpha_1'}2^{2\alpha_2'}5^{2\alpha_2'}\ldots 7^{\beta_1'+\bar{\beta}_1'}.$$

Par la factorisation unique pour les entiers rationnels, nous devons avoir $\alpha_0 = \alpha_0', \alpha_1 = \alpha_1', \ldots, \beta_1 + \widetilde{\beta}_1 = \beta_1' + \widetilde{\beta}_1', \ldots$. Par conséquent, la multiplicité d'une valeur propre donnée est égale au nombre de façons de redistribuer les exposants $\beta_i, \widetilde{\beta}_i$, sujets à ces conditions. Si $\alpha_0 \geqq 2$, ceci est clairement égal au produit $\prod_i(1 + \gamma_i)$. Si $\alpha_0 = 1$, nous devons exclure le cas $\beta_i = \widetilde{\beta}_i$ pour tout i. Cela peut seulement se produire si γ_i est pair pour tout i.

Corollaire. *Pour un entier k, il existe une valeur propre λ de multiplicité k ; $\widetilde{\lambda}$ peut être choisie comme étant symétrique.*

Preuve. Soit $a = \pi_3^2\pi_7^{k-1}$ une représentation possible pour $\widetilde{\lambda}$. Les représentants restant possibles sont $\pi_3^2\pi_7^{k-2}\overline{\pi}_7, \ldots, \pi_3^2\overline{\pi}_7^{k-1}$. Chacun d'eux est admissible et correspond à une fonction propre. Pour ce choix, $\widetilde{\lambda} = 9.7^{k-1}$.

Exemple. Pour $k = 3$, nous avons les valeurs $a = 15 - 9\omega, a = -21\omega, a = -15 - 24\omega$, avec $\widetilde{\lambda} = 441$. Cela donne l'exemple le plus simple d'une valeur propre dégénérée de multiplicité *impaire*.

Note. La Formule (3) de la Proposition 4 découle également de [8, Satz 204, p. 144].

5. La multiplicité des valeurs propres. Dans cette section, nous obtenons quelques estimations qualitatives sur le nombre de valeurs propres. Le résultat principal est que la "multiplicité moyenne" devient infinie lorsque $\lambda \to \infty$.

Pour démontrer cela, nous introduisons les fonctions

$$n_k(\lambda) = \#\{j : \lambda_j \leqq \lambda, \lambda_j \text{ est une valeur propre } k\text{-repliée}\}, \tag{5.1}$$

$$n(\lambda) = \sum_1^\infty n_k(\lambda), \tag{5.2}$$

$$N(\lambda) = \sum_1^\infty k n_k(\lambda). \tag{5.3}$$

Puisqu'il y a seulement un nombre fini de valeurs propres dans chaque intervalle fini, à la fois les sommes (5.2) et (5.3) contiennent seulement un nombre fini de termes non nuls ; $n(\lambda)$ compte le nombre de valeurs propres (sans répétition) $\leqq \lambda, N(\lambda)$ compte le nombre total de valeurs propres, en incluant les multiplicités. Le théorème de Hermann Weyl établit que

$$N(\lambda) \sim \frac{A}{4\pi}\lambda, \qquad \lambda \to \infty, \tag{5.4}$$

où $A = \sqrt{3}/4$. Pour étudier la multiplicité moyenne, nous définissons

$$m = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{N(\lambda)}{n(\lambda)}.$$

Théorème 2. $m = \infty$.

Pour préparer la démonstration, nous étudions certains ensembles d'entiers. Soit $P = (p_i)$ un ensemble de nombres premiers tels que

$$\sum_j \frac{1}{p_j} = \infty.$$

Soit $\mathscr{S} = \{n : P_j \not| n \text{ pour tout} j\}, f(x) = \sum_{n\in\mathscr{S}_N, n\leqq x} 1.$

Lemme. $f(x) = o(x), x \to \infty$.

Preuve. Appelons $\mathscr{S}_N = \{p_j \not| n, \text{ pour } 1 \leqq j \leqq N\}$,

$$f_N(X) = \sum_{n\in\mathscr{S}_N, n\leqq x} 1,$$

Clairement, $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{S}_N$ pour tout N et ainsi $f(x) \leqq f_N(x)$. Mais il est bien connu que

$$\frac{1}{N} f_N(x) \to \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_j}\right), \qquad x \to \infty, \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Par conséquent

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \leqq \prod_{j=1}^N \left(1 - \frac{1}{p_j}\right), \qquad N = 1, 2, \ldots.$$

Mais $\sum 1/p_j = \infty$ implique que le produit $\prod_{j=1}^N (1 - (1/p_j))$ tend vers zéro quand $N \to \infty$. Par conséquent $\lim\sup_{x\to\infty} f(x)/x = 0$, ce qui était à démontrer.

Preuve du théorème. Soient $P_1 = \{2, 5, 11, 17, \ldots\}, P_2 = \{3, 7, 13, 19, \ldots\}$. P_1 contient tous les nombres premiers de la forme $3n + 2$, alors que P_2 contient tous ceux de la forme $3n + 1$ ainsi que le nombre premier 3. On sait [6, p. 52] que $\sum 1/p_j = \infty$ à la fois pour P_1 et pour P_2. Appelons

$\mathscr{S}_i$ $(i = 1, 2)$ les ensembles formés à partir des $P_i, i = 1, 2$, de la manière ci-dessus. Maintenant, rappelons que si λ est une valeur propre, $\lambda = (16\pi^2/27)\widetilde{\lambda}$, où

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda} &= 3^{\alpha_0} 2^{2\alpha_1} 5^{2\alpha_2} \ldots 7^{\gamma_1} 13^{\gamma_2} \ldots, \\ &= u^2 v, \end{aligned}$$

où $u \in \mathscr{S}_2, v \in \mathscr{S}_1$. Donc,

$$\begin{aligned} \#(\lambda \leqq x) &\leqq \sum_{\{u \in \mathscr{S}_2, v \in \mathscr{S}_1, u^2 v \leqq x\}} 1, \\ &= \sum_{v \in \mathscr{S}_1} \sum_{u \leqq \sqrt{x}/v, u \in \mathscr{S}_2} 1, \\ &= \int_1^x f_2\left(\frac{\sqrt{x}}{v}\right) df_1(v). \end{aligned}$$

Maintenant soit $\varepsilon > 0$. Donc $f_2(u) < \varepsilon u$ pour $u \geqq M$. Soit $K = \max_{1 \leqq x \leqq M} f(x)$. Donc

$$\#(\widetilde{\lambda} \leqq x) = I + II,$$

où

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{x/M^2} f_2\left(\frac{\sqrt{x}}{v}\right) df_1(v), \\ II &= \int_{x/M^2}^{x} f_2\left(\frac{\sqrt{x}}{v}\right) df_1(v). \end{aligned}$$

Maintenant

$$\begin{aligned} I &\leqq \varepsilon \int_1^{x/M^2} \sqrt{\frac{x}{v}} df_1(v), \\ &= \varepsilon\sqrt{x}\left\{\frac{M}{\sqrt{x}} f_1\left(\frac{x}{M^2}\right) + \frac{1}{2}\int_1^{x/M^2} \frac{f_1(v)}{v^{3/2}} dv\right\}. \end{aligned}$$

Mais $f_1(x) = o(x), x \to \infty$ implique que les deux termes soient $o(\sqrt{x}), x \to \infty$. Par conséquent, $I = o(x), x \to \infty$. Pour l'autre terme, nous avons

$$\begin{aligned} II &\leqq K\left\{f_1(x) - f_1\left(\frac{x}{M^2}\right)\right\} \\ &= o(x), \qquad (x \to \infty). \end{aligned}$$

Cela complète la preuve que $\#(\widetilde{\lambda} \leqq x) = o(x), x \to \infty$. Par conséquent, $n(\lambda) = o(\lambda), \lambda \to \infty$. Mais $N(\lambda) \sim A\lambda/4\pi$. Donc,

$$\frac{N(\lambda)}{n(\lambda)} \sim \text{const.} \frac{\lambda}{o(\lambda)}, \qquad \lambda \to \infty$$

La démonstration est complète.

Remerciements. Nous sommes reconnaissants aux examinateurs de ce texte pour plusieurs suggestions utiles.

Note ajoutée à la preuve. En utilisant les méthodes de cet article, P. Bérard a obtenu des formules explicites pour les valeurs propres du Laplacien de certains domaines euclidiens associés aux groupes cristallographiques. (P. Bérard, *Spectres et groupes cristallographiques*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A, 288 (25 juin, 1979), p. 1059-1060).

Références

[1] V. Arnold, *Modes and Quasimodes*, Functional Anal. Appl., 6 (1972), p. 12-20.

[2] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le Spectre d'une Variété Riemanienne*, Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics, vol. 194, 1971.

[3] B. Driscoll, *Eigenvalues of a symmetric drumhead*, Ph.D. Thesis, Northwestern University, 1978.

[4] P. Garabedian, *Partial Differential Equations*, McGraw Hill, 1964.

[5] I. Gelfand, Y. Linnik, *Elementary Methods in the Theory of Numbers*, MIT Press, 1966.

[6] G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford, 1960.

[7] M. G. Lamé, *Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Élasticité des Corps Solides*, Paris, Bachelier, 1852.

[8] E. Landau, *Vorlesungen uber Zahlentheorie*, vol. I, Leipzig, Herzel, 1927.