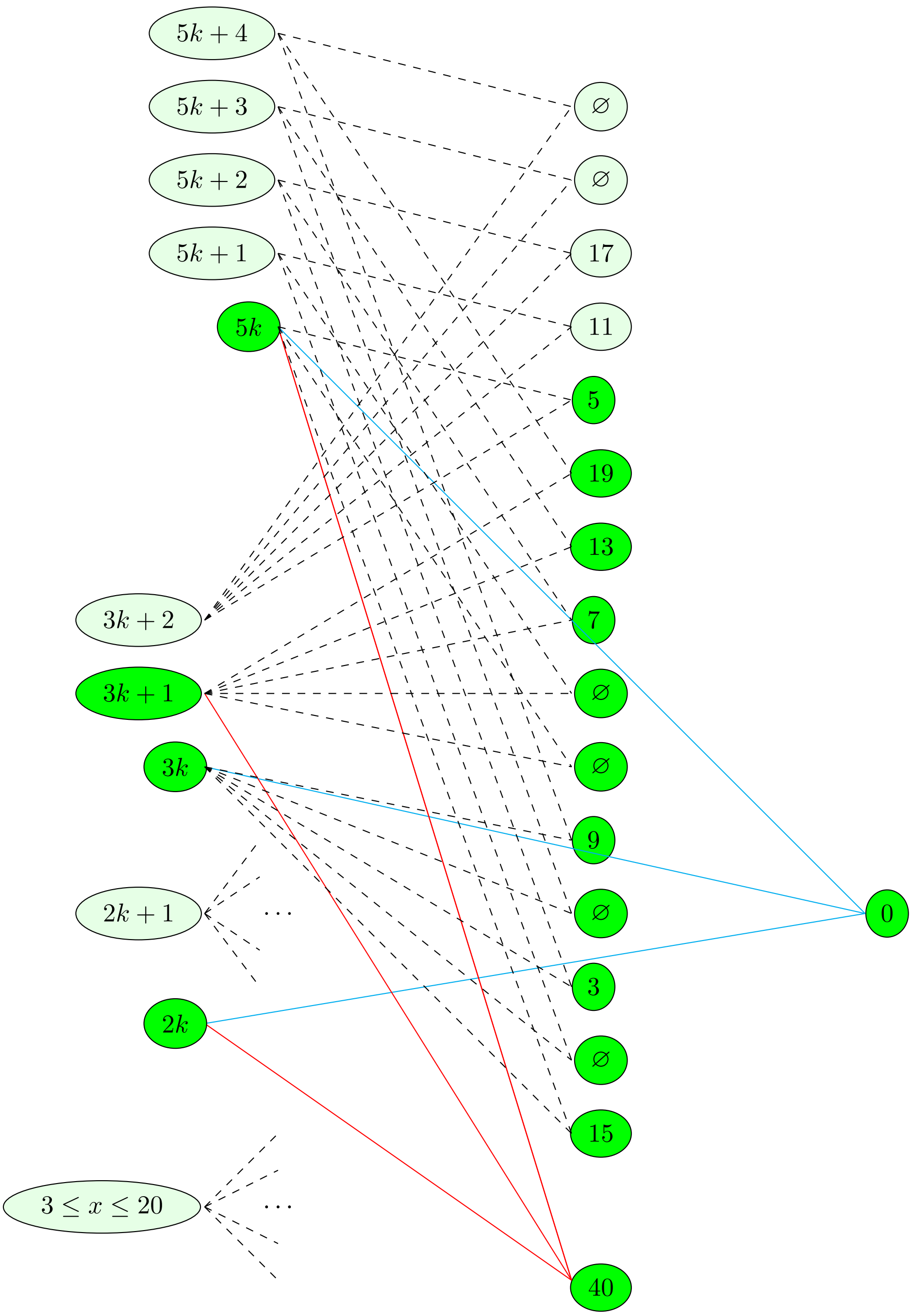
Treillis distributif pour décomposants de Goldbach de 40 (Denise Vella-Chemla, 13.6.2020)



Sont notées en vert clair (resp. en vert vif) les solutions potentielles (resp. tout ce que le filtre élimine). On notera que le filtre élimine 3 alors que 3 est un décomposant de Goldbach de 40 car on fait le choix de ne conserver que les nombres premiers décomposants de Goldbach supérieurs à la racine carrée du nombre pair considéré.

Note : Pour ne pas surcharger le dessin, on n'a pas noté les liens de relation d'intersections entre les $\{2k+1\}$ et tous les nœuds à droite (on se concentre à la recherche de décomposants de Goldbach d'un nombre pair sur les nombres impairs, qui sont tous potentiellements solutions (i.e. notés en vert clair)). C'est la borne (la restriction à l'intervalle $[3, n/2]$, symbolisée sur le schéma par le nœud $3 \leq x \leq 20$) (vert clair) qui pose peut-être problème pour prouver l'existence d'un décomposant de Goldbach pour tout nombre pair.

On trouvera ici, là, là, ou encore là des éléments de référence concernant les treillis distributifs, les espaces de Stone, les espaces booléens. Un décomposant de Goldbach de n appartient au complémentaire ou ensemble orthogonal de l'ensemble $\{n\} \cup \{0\}$. On peut se reporter également aux articles de wikipedia suivants : Filtre topologique, Espace de Stone, Treillis, Algèbre de Boole.

Pour bien décrire l'espace dans lequel on se place, on recopie texto un extrait de l'article de wikipedia *Théorème de représentation de Stone pour les algèbres de Boole* :
https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_repr%C3%A9sentation_de_Stone_pour_les_alg%C3%A8bres_de_Boole :
Exemple : L'algèbre des parties finies ou cofinies
Soit E un ensemble infini. Posons $FC(E)$ l'ensemble des parties finies ou cofinies[1] *$FC(E)$ forme une algèbre de Boole avec les opérations ensemblistes usuelles (union, intersection, complémentaire). Les ultrafiltres de $FC(E)$ sont :*

- *Les ultrafiltres principaux U_x , dont les éléments sont les parties finies ou cofinies de E contenant un élément x donné de E,*
- *L'ultrafiltre U_∞, dont les éléments sont les parties cofinies de E.*

Par conséquent, l'espace de Stone $S(FC(E))$, ensemble des ultrafiltres précédents, peut être assimilé à l'ensemble E auquel on a ajouté un élément ∞. Topologiquement, il s'agit du compactifié d'Alexandrov de E, lorsque ce dernier est muni de la topologie discrète. Les parties ouvertes-fermées de $S(FC(E))$ sont d'une part les parties finies incluses dans E, d'autre part les parties cofinies contenant ∞. L'ensemble de ces parties ouvertes-fermées, avec les opérations ensemblistes usuelles, redonnent une algèbre de Boole isomorphe à $FC(E)$[2].

Transposons au problème qui nous intéresse :
Soit $\mathbb{N}$ l'ensemble infini des entiers naturels. Posons $FC(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}$. $FC(\mathbb{N})$ forme une algèbre de Boole avec les opérations ensemblistes usuelles (union, intersection, complémentaire). Les ultrafiltres de $FC(\mathbb{N})$ sont :

- Les ultrafiltres principaux U_x, dont les éléments sont les parties finies ou cofinies. de $\mathbb{N}$ contenant un élément x donné de $\mathbb{N}$,
- L'ultrafiltre U_∞, dont les éléments sont les parties cofinies de $\mathbb{N}$.

Par conséquent, l'espace de Stone $S(FC(\mathbb{N}))$, ensemble des ultrafiltres précédents, peut être assimilé à l'ensemble $\mathbb{N}$ auquel on a ajouté un élément ∞. Topologiquement, il s'agit du compactifié d'Alexandrov de $\mathbb{N}$, lorsque ce dernier est muni de la topologie discrète. Les parties ouvertes-fermées de $S(FC(\mathbb{N}))$ sont d'une part les parties finies incluses dans $\mathbb{N}$, d'autre part les parties cofinies contenant ∞. L'ensemble de ces parties ouvertes-fermées, avec les opérations ensemblistes usuelles, redonnent une algèbre de Boole isomorphe à $FC(\mathbb{N})$.

La notion d'ultrafiltre principal permet de calculer les intersections du complémentaire de $\{n\} \cup \{0\}$ avec les intervalles de la forme $[0, n/2]$ pour trouver les décomposants de Goldbach ; on ne sait pas si le fait d'avoir mieux "délimité" l'espace sur lequel il convient de se placer permet de prouver l'existence d'un décomposant de Goldbach pour tout entier pair supérieur ou égal à 4 ou pas.

1. cofini = dont le complémentaire est fini. Par exemple, $[20, \infty]$ est une partie cofinie de $\mathbb{N}$ de E.
2. Il suffit d'"oublier" l'élément ∞ pour retrouver $FC(\mathbb{E})$.