ANALYSE MATHÉMATIQUE. ***Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée.*** **Note de M. H. von Koch, présentée par M. Picard.**

Riemann, dans un Mémoire célèbre (*Œuvres complètes*, p. 136), a proposé une expression analytique pour la représentation du nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée n et des formules d'approximation pour le cas où n est très grand. Pourtant sa démonstration, bien qu'elle ait été complétée plus tard, dans des points essentiels, par les recherches de plusieurs géomètres, n'est pas encore, comme on sait, à l'abri de toute objection. Aussi, il paraît extrêmement difficile de parvenir, par la méthode proposée par Riemann, à une solution satisfaisante du problème.

C'est en suivant un tout autre chemin que je suis arrivé aux deux théorèmes suivants. Soit n un nombre entier arbitraire, q le nombre des nombres premiers, inférieurs ou égaux à n ;

On peut former une fonction entière rationnelle $\vartheta(x)$ dont les coefficients s'expriment rationnellement par rapport aux nombres

$$1, 2, \ldots, n\,; \tag{A}$$

et telle que l'on ait

$$q = \vartheta(1) + \vartheta(2) + \ldots + \vartheta(n). \tag{B}$$

On peut, en outre, former une fonction entière $\theta(x)$ dont les coefficients s'expriment sous la forme de polynômes entiers, à coefficients rationnels, par rapport au nombre π, de telle manière que l'on ait

$$q = \theta(1) + \theta(2) + \ldots + \theta(n). \tag{C}$$

Pour démontrer le premier théorème, qui, comme on voit, revient à affirmer la possibilité d'exprimer q par une fonction *numérique élémentaire* de n, il suffira de former une fonction entière rationnelle $\vartheta(x)$ qui est égale à *un* ou à *zéro* selon que x, supposé compris dans la suite (A) est ou n'est pas un nombre premier. Soient α et β deux entiers positifs quelconques, et posons

$$f(x) = \prod_{\mu=1}^{\alpha}(x-\mu)\,; \qquad \psi(x) = \sum_{\mu=2}^{\beta}\sum_{\nu=2}^{\beta}\frac{1}{f'(\mu\nu)}\,\frac{1}{x-\mu\nu}\,;$$

$$\varphi(x) = f(x)\psi(x).$$

$\varphi(x)$ est rationnel par rapport à x et se réduit à un polynôme entier si l'on choisit

$$\alpha \geq (\beta-1)^2.$$

Référence : C. R., 1894, 1er *Semestre*. (T. CXVIII, N° 16.)
transcription en Latex : Denise Vella-Chemla, avril 2024.

On voit facilement que $\varphi(p) = 0$, p désignant un nombre *premier* quelconque de la suite 1, 2,..., α et que, si c désigne un nombre *composé* quelconque de cette suite, $\varphi(c)$ est égal au nombre des diviseurs distincts de c ; ce nombre $\varphi(c)$ est donc nécessairement ≥ 1 mais $\leq \alpha$. Donc la fonction

$$\vartheta(x) = \prod_{\lambda=1}^{\alpha} \left[1 - \frac{\varphi(x)}{\lambda}\right]$$

est égale à *un* ou à *zéro* selon que x, supposé compris dans la suite 1, 2, ..., α, est ou n'est pas un nombre premier. Pourvu que $n > 2$, nous pouvons poser, par exemple,

$$\beta = n - 1, \qquad \alpha = (n-2)^2 ;$$

alors $\vartheta(x)$ jouit bien de la propriété d'être égal à *un* ou à *zéro* selon que x, supposé compris dans la suite (A), est ou n'est pas un nombre premier.

Les coefficients de cette fonction s'exprimant visiblement d'une manière rationnelle par rapport aux nombres (A), notre premier théorème est donc démontré.

Pour démontrer le second, nous posons

$$\mathscr{F}(x) = \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} ; \qquad \Psi(x) = \sum_{\mu=1}^{+\infty} \sum_{\nu=2}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - \mu^2\nu^2} ;$$

$$\Phi(x) = \mathscr{F}(x)\Psi(x).$$

$\Phi(x)$ représente une fonction entière de x et, en la développant suivant les puissances entières de x, on voit facilement que chacun des coefficients prend la forme d'un polynôme entier, à coefficients rationnels, par rapport à π. De plus, pour tout nombre premier p, $\Phi(p)$ s'annule et, pour tout nombre composé c, $\Phi(c)$ est égal au nombre des diviseurs distincts de c. On voit donc, comme tout à l'heure, que la fonction

$$\theta(x) = \prod_{\lambda=1}^{+\infty} \left\{1 - \left[\frac{\Phi(x)}{\lambda}\right]^2\right\} = \frac{\sin[\pi\Phi(x)]}{\pi\Phi(x)},$$

pour les valeurs entières de x, est égale à *un* ou à *zéro* selon que x est ou n'est pas un nombre premier. L'égalité (C) a donc lieu, et, en développant $\theta(x)$ selon les puissances entières de x, on voit que chacun des coefficients sera un polynôme entier, à coefficients rationnels, par rapport à π.

Nous avons donc trouvé deux fonctions $\vartheta(x)$ et $\theta(x)$ répondant aux théorèmes énoncés ; il convient de remarquer que, par une méthode un peu plus générale, nous aurions pu trouver une infinité de fonctions différentes jouissant des mêmes propriétés.

D'ailleurs, il est aisé de voir que la méthode précédente s'applique à des problèmes beaucoup plus généraux. Elle peut servir à démontrer, par exemple, qu'on peut exprimer, par une fonction numérique élémentaire de n, combien il y a de nombres entiers inférieurs à n et décomposables en un nombre donné quelconque de facteurs primaires.

D'un autre côté, on a, en vertu des propriétés de la fonction $\vartheta(x)$,

$$\sum p^k = \sum \nu^k \vartheta(\nu), \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

les sommations à gauche se reportant à tous les nombres premiers $p \leq n$ et celles à droite à tous les entiers $\nu \leq n$. De là, et en vertu d'un théorème classique de l'Algèbre, nous concluons qu'il est possible de déterminer une suite de fonctions numériques élémentaires de n :

$$c_1(n), c_2(n), \ldots c_q(n),$$

telle que l'équation algébrique

$$x^q + c_1 x^{q-1} + \ldots + c_q = 0,$$

admette pour racines les q nombres premiers $\leq n$. L'analogue a lieu pour les nombres composés de facteurs primaires en nombre quelconque.

Les formules précédentes, qui expriment la relation fonctionnelle qui existe entre n et q, sont évidemment trop compliquées pour s'appliquer directement au calcul numérique de q. Mais, d'après les recherches de MM. Poincaré et Hadamard sur les fonctions entières, il paraît probable que ces formules se simplifieront beaucoup et deviendront plus commodes au point de vue numérique, dans le cas où l'on prendra n suffisamment grand. C'est ce que je me propose d'examiner de plus près une autre fois.