Représenter les algèbres booléennes
Les 70 théorèmes de l'article de M. H. Stone
"La théorie des représentations pour les algèbres booléennes"

DÉFINITION 1. Un anneau dans lequel tout élément est idempotent, i.e. tel que $aa = a$, est appelé un anneau booléen.

THÉORÈME 1. Un anneau booléen est nécessairement commutatif ; il obéit aux deux lois équivalentes $a + a = 0$, $a = -a$; et il contient nécessairement des diviseurs de 0 s'il contient plus de 2 éléments. Tout anneau booléen A peut être projeté dans un anneau booléen B qui a un élément unité de telle manière que B est unique au sens suivant : si C est un anneau booléen à unité contenant A, alors C contient aussi un anneau booléen B^* isomorphe à B et contenant A. Un anneau booléen fini possède nécessairement une unité et a un cardinal qui est une puissance de 2.

THÉORÈME 2. Si A est un anneau booléen d'unité e, l'introduction d'une opération binaire $\vee$ et d'une opération unaire $'$ par les équations
(1) $a \vee b = a + b + ab$, (2) $a' = a + e$
convertit A en un système algébrique B dans lequel
(4.3) $a \vee b = b \vee a$, (4.4) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
(4.6) $(a' \vee b')' \vee (a' \vee b)' = a$,
les anciennes opérations étant exprimées en fonction des nouvelles par les équations
(6) $a + b = ab' \vee a'b = (a' \vee b'')' \vee (a'' \vee b')'$,
(7) $ab = (a' \vee b')'$.
D'un autre côté, si B est un système algébrique obéissant aux lois (4.3), (4.4) et (4.6), alors B est une algèbre booléenne ; et l'introduction de nouvelles opérations par les équations (6) et (7) convertit B en l'anneau booléen A avec comme unité $e = a \vee a'$ et comme zéro $0 = e' = (a \vee a')'$, les anciennes opérations étant exprimées en termes des nouvelles par les équations (1) et (2) ci-dessus.

THÉORÈME 3. Si A est un anneau booléen avec unité e, alors le remplacement de l'opération $+$ par une nouvelle opération $\vee$ définie par la relation
(1) $a \vee b = a + b + ab$
convertit A en un système B avec les propriétés
(1_1) $a \vee b = b \vee a$
(3_1) $a(b \vee c) = ab \vee ac$; (3_2) $(a \vee b)c = ac \vee bc$;
(4_1) il existe un élément 0 tel que $a \vee 0 = a$ pour tout a ;
(5) S'il existe un élément 0 avec la propriété (4_1), alors il existe au moins un tel élément 0 auquel correspond un élément fixe e tel que les équations $x \vee a = e, xa = 0$ ont une solution pour tout élément a ;

Présenté à la Société (en partie), 25 Février 1933 ; voir résumé 39-3-86. Reçu par les éditeurs le 10 Octobre 1935.

(6_1) $a \vee a = a$; (6_2) $aa = a$;
où l'ancienne opération $+$ est définie en fonction de la nouvelle par la relation
(7) $a + b$ est une solution, nécessairement unique, des deux équations simultanées $x \vee ab = a \vee b, x(ab) = 0$.
Inversement, si B est un système avec les propriétés dénotées $(1_1) - (6_2)$, le remplacement de l'opération $\vee$ par la nouvelle opération $+$ définie par la relation (7) convertit B en un anneau booléen A avec les éléments 0 et e de (4_1) et (5) comme son zéro et son élément unité respectivement, l'ancienne opération $\vee$ étant exprimée en termes de la nouvelle par la relation (1).

Théorème 4. Si A est un anneau booléen, que ce soit avec ou sans unité, le remplacement de l'opération $+$ par l'opération $\vee$ définie par la relation
(1) $a \vee b = a + b + ab$
convertit A en un système B vérifiant les propriétés
(1_1) $a \vee b = b \vee a$;
(2_2) $a(bc) = (ab)c$;
(3_1) $a(b \vee c) = ab \vee ac$;
(4_1) il existe un élément 0 tel que $a \vee 0 = a$ pour tout a ;
(5_1) si $ba = a$, il existe un élément 0 avec la propriété (4_1), indépendant de a et b, tel que les équations $x \vee a = b, xa = 0$ ont une solution ;
(5_2) si $ab = a$, il existe un élément 0 avec la propriété (4_1), indépendant de a et b, tel que les équations $x \vee a = b, ax = 0$ ont une solution ;
(6_1) $a \vee a = a$; (6_2) $aa = a$;
où la vieille opération $+$ est définie en fonction de la nouvelle par la relation
(7) $a + b$ est une solution, nécessairement unique, des équations simultanées $x \vee ab = a \vee b, x(ab) = 0$.
Inversement, si B est un système avec les propriétés indiquées $(1_1) - (6_2)$, le remplacement de l'opération $\vee$ définie par la relation (7) convertit B en un anneau booléen A avec l'élément 0 de (4_1) comme son élément zéro, l'ancienne opération $\vee$ étant exprimée en fonction de la nouvelle par la relation (1).

Définition 2. Dans un anneau booléen A, l'élément a est dit inférieur ou contenu dans l'élément b, noté $a < b$, et l'élément b est dit supérieur ou contenant l'élément a, noté $b > a$, à chaque fois que l'une des relations équivalentes suivantes

$$ab = a, \qquad a \vee b = b, \qquad ab' = 0, \qquad a' \vee b = e$$

est satisfaite, les deux dernières n'ayant du sens que si et seulement si A a une unité e.

Théorème 5. La relation $<$ de la Définition 2 obéit aux règles :
(1) $a < b$ et $b < c$ implique $a < c$;
(2) $0 < a$ pour tout a et $a < e$ pour tout a quand l'anneau booléen A a une unité e ;
(3) $a < c$ et $b < d$ implique $ab < cd$, $a \vee b < c \vee d$;

(4) $bc = 0$ implique $ac = 0$ si et seulement si $a < b$.

Définition 3. Un élément non nul a d'un anneau booléen A est dit atomique s'il a l'une des propriétés équivalentes suivantes :
(1) $a > b$ implique $b = a$ ou $b = 0$;
(2) $ab = 0$ ou $ab = a$ pour tout b.

Définition 4. Une classe $\mathfrak{s}$ d'éléments atomiques est dite base atomique si tout élément non nul est la somme d'éléments de $\mathfrak{s}$.

Définition 5. Une classe $\mathfrak{s}$ d'éléments atomiques est dite système atomique complet si $b = 0$ est le seul élément tel que $ba = 0$ pour tout a dans $\mathfrak{s}$.

Théorème 6. Si a et b sont des éléments atomiques, alors $a = b$ ou $ab = 0$.

Théorème 7. Un système complet atomique dans un anneau booléen A contient tout élément atomique de A.

Théorème 8. Si A est un anneau booléen, $\mathfrak{s}$ un système complet atomique dans A, et $\mathfrak{s}(b)$ est la classe de tous les éléments atomiques a dans $\mathfrak{s}$ tels que $ab \neq 0$, alors A est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{N}$ de toutes les classes $\mathfrak{s}(b)$ selon la correspondance $b \longleftrightarrow \mathfrak{s}(b)$ en accord avec les propriétés :
(1) $\mathfrak{s}(b) = \mathfrak{s}(c)$ si et seulement si $b = c$;
(2) $\mathfrak{s}(b + c) = \mathfrak{s}(b) \Delta \mathfrak{s}(c)$;
(3) $\mathfrak{s}(bc) = \mathfrak{s}(b)\mathfrak{s}(c)$;
(4) $\mathfrak{s}(b \vee c) = \mathfrak{s}(b) \cup \mathfrak{s}(c)$. [1]

Théorème 9. Une base atomique $\mathfrak{s}$ est un système complet atomique.

Théorème 10. La représentation d'un élément b comme somme d'éléments d'un système atomique complet $\mathfrak{s}$ est unique : les sommants sont précisément les éléments de la classe $\mathfrak{s}(b), b \neq 0$.

Théorème 11. Pour qu'un anneau booléen A contienne une base atomique $\mathfrak{s}$, il est nécessaire et suffisant que A soit isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes finies d'une classe finie ou infinie Σ, les éléments de $\mathfrak{s}$ étant en correspondance biunivoque avec ceux de Σ. En particulier, un tel anneau A a une unité si et seulement si les

1. Ici, comme partout dans cette note, nous utilisons les symboles $\cup$ et Δ pour désigner l'union et l'union (modulo 2), ou la différence symétrique, pour les classes ; et nous indiquons la formation de l'intersection par juxtaposition des symboles pour les classes affectées.

classes $\mathfrak{s}$ et Σ sont finies.

Théorème 12. Un anneau booléen fini avec au moins deux éléments contient une base atomique $\mathfrak{s}$ et est ainsi isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes d'une classe finie Σ en correspondance biunivoque avec $\mathfrak{s}$.

Théorème 13. Un anneau booléen fini avec exactement un élément est isomorphe à l'algèbre consistant en la classe vide.

Théorème 14. Pour que le sous-anneau $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ engendré par une sous-classe non-vide $\mathfrak{s}$ d'un anneau booléen A possède une unité, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{s}$ contienne des éléments $a_1, \ldots, a_n$ tels que $b < a_1 \vee \ldots \vee a_n$ pour tout élément b dans $\mathfrak{s}$. Quand cette condition est satisfaite, l'élément $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ est l'unité de $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$; et $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments qui peuvent être construits comme des polynômes fonctions des éléments b et $a+b$, où b est dans $\mathfrak{s}$, et avec les opérations $\vee$ et . comme seules opérations. En particulier, si A a une unité e et $\mathfrak{s}$ contient e, alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments qui peuvent être construits comme des polynômes fonctions des éléments b et $b' = b + e$, où b est dans $\mathfrak{s}$, et avec les opérations $\vee$ et . comme seules opérations.

Théorème 15. Si A est un anneau booléen alors la classe $\mathfrak{U}$ de tous les sous-anneaux de A a les propriétés suivantes pour les opérations d'addition et de multiplication définies précédemment :

(1) $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}$; (2) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}$;

(3) $\mathfrak{a} \vee (\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}) \vee \mathfrak{c}$ (4) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\mathfrak{c}$;

(5) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}\mathfrak{c}$; (6) $(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}) \supset \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}\mathfrak{c}$;

(7) $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$; (8) $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$;

(9) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ si et seulement si $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$;

(10) si $\mathcal{B}$ est une classe non vide de classes non vides $\mathfrak{B}$ de sous-anneaux $\mathfrak{a}$ de A et si $\mathfrak{S}$ est l'union $\sum_{\mathfrak{B} \in \mathcal{B}} \mathfrak{B}$ alors

$$S_{\mathfrak{B} \in \mathcal{B}}(S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{a};$$

(11) si $\mathcal{B}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{S}$ ont la même signification qu'en 10, alors

$$P_{\mathfrak{B} \in \mathcal{B}}(P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) = P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{S}} \mathfrak{a};$$

(12) si $\mathfrak{b}$ est n'importe quel sous-anneau de A et $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle classe non vide de sous-anneaux $\mathfrak{a}$ de A alors

$$\mathfrak{b}(S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}) \supset S_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}}(\mathfrak{b}\mathfrak{a});$$

(13) if $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{B}$ ont la même signification qu'en (12), alors :

$$P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}) \supset \mathfrak{b} \vee P_{\mathfrak{a} \in \mathfrak{B}} \mathfrak{a}.$$

Les sous-anneaux spéciaux $\mathfrak{o}$ et $\mathfrak{e}$ ont les propriétés suivantes :
(14) $\mathfrak{o}\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$, $\quad \mathfrak{a} \vee \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$;
(15) $\mathfrak{e}\mathfrak{a} = \mathfrak{a}$, $\quad \mathfrak{a} \vee \mathfrak{e} = \mathfrak{e}$.

Théorème 16. Pour qu'une sous-classe non vide $\mathfrak{a}$ d'un anneau booléen A soit un idéal, il est nécessaire et suffisant que
(1) $\mathfrak{a}$ contienne $a \vee b$ avec a et b,
(2) $\mathfrak{a}$ contienne ab à chaque fois qu'elle contient a
ou, de façon équivalente, que
(1) $\mathfrak{a}$ contienne $a \vee b$ avec a et b,
(2') $\mathfrak{a}$ contienne c avec a à chaque fois que $c < a$.

Théorème 17. Si $\mathfrak{s}$ est une sous-classe arbitraire non-vide d'un anneau booléen A et si $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments a tels que $a < a_1 \vee \ldots \vee a_n$ pour des éléments appropriés $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathfrak{s}$ alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est un idéal ; et tout idéal contenant $\mathfrak{s}$ contient $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$.
L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ peut être caractérisé alternativement comme la classe de tous les éléments a tels que $a = a_1b_1 \vee \ldots \vee a_nb_n$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont dans $\mathfrak{s}$ et $b_1, \ldots, b_n$ sont dans A. Si $\mathfrak{s}$ est l'union des idéaux $\mathfrak{a}$ dans une classe donnée $\mathfrak{B}$, alors $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la classe de tous les éléments a tels que $a = a_1 \vee \ldots \vee a_n$ où a_k est dans $\mathfrak{a}_k$ et $\mathfrak{a}_k$ est dans $\mathfrak{B}$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Théorème 18. Dans un anneau booléen A, les sous-anneaux obtenus comme sommes ou produits d'idéaux sont eux-mêmes des idéaux ; en d'autres mots, la classe $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans A est un sous-système du système $\mathfrak{U}$ selon les opérations non restreintes d'addition et de multiplication. Les propriétés de ces opérations qui sont respectées dans $\mathfrak{U}$ sont aussi respectées dans $\mathfrak{I}$, avec la correction que les propriétés (5), (6), et (12) du théorème (15) doivent être remplacées respectivement par les propriétés correspondantes :
(5) $\mathfrak{a}(\mathfrak{b} \vee \mathfrak{c}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \vee \mathfrak{a}\mathfrak{c}$; $\quad$ (6)$(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{c}) = \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}\mathfrak{c}$;
(12) si $\mathfrak{b}$ est un idéal et $\mathfrak{B}$ est une classe non vide d'idéaux $\mathfrak{a}$, alors

$$\mathfrak{b}S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a} = S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{b}\mathfrak{a}$$

L'idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux, est la classe des éléments c où $c = ab$, a dans $\mathfrak{a}$ et b dans $\mathfrak{b}$. L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ du Théorème 17 est le produit de tous les idéaux contenant $\mathfrak{s}$; et dans le cas particulier où $\mathfrak{s}$ est une union de classes d'idéaux, $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est la somme des idéaux de cette classe.

Définition 6. Deux éléments a et b dans un anneau booléen sont dit orthogonaux si $ab = 0$; et deux sous-classes non vides d'un anneau booléen sont dites orthogonales si tout élément de l'une est orthogonal à tout élément de l'autre.

Théorème 19. Si $\mathfrak{s}$ est n'importe quelle sous-classe non vide d'un anneau booléen A, alors la classe $\mathfrak{s}'$ de tous les éléments orthogonaux à chaque élément de $\mathfrak{s}$ est un idéal dans A qui est orthogonal à $\mathfrak{s}$ et qui contient toute sous-classe de A orthogonale à $\mathfrak{s}$. Deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont orthogonaux si et seulement si $\mathfrak{ab} = 0$.

Définition 7. L'idéal $\mathfrak{s}'$ associé à une sous-classe arbitraire non vide $\mathfrak{s}$ d'un anneau booléen A de la façon indiquée dans le théorème 19 est appelé le complémentaire orthogonal, ou plus brièvement l'ortho-complémentaire de $\mathfrak{s}$; et l'opération consistant à former l'idéal $\mathfrak{s}'$ est appelée la complémentation orthogonale, ou plus brièvement l'ortho-complémentation. L'ortho-complémentaire de $\mathfrak{s}'$ est noté $\mathfrak{s}''$, celui de $\mathfrak{s}''$ est noté $\mathfrak{s}'''$; et plus généralement, le symbole $\mathfrak{s}^{(\mathfrak{n})}$ est défini récursivement pour $n \geq 1$ par les relations $\mathfrak{s}^{(\mathfrak{1})} = s', \mathfrak{s}^{(\mathfrak{n}+\mathfrak{1})} = (\mathfrak{s}^{(\mathfrak{n})})'$.

Théorème 20. L'opération d'ortho-complémentation a les propriétés générales suivantes :
(1) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}$ implique $\mathfrak{s}' \supset \mathfrak{t}'$;
(2) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{a}(\mathfrak{s}) \subset \mathfrak{s}''$, où $\mathfrak{a}(\mathfrak{s})$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{s}$;
(3) $\mathfrak{s}^{(m)} = \mathfrak{s}^{(n)}$ quand m et n sont congrus (mod 2), $\mathfrak{s}^{(m)}\mathfrak{s}^{(n)} = 0$ quand m et n ne sont pas congrus (mod 2) ; en particulier, $\mathfrak{s}''' = \mathfrak{s}'$.

Théorème 21. Dans la classe $\mathfrak{J}$ de tous les idéaux dans un anneau booléen A, l'opération d'ortho-complémentation a les propriétés spécifiques suivantes :
(1) $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}''$; (2) $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathfrak{o}$; (3) $\mathfrak{o}' = \mathfrak{e}, \mathfrak{e}' = \mathfrak{o}$;
(4) l'ortho-complémentaire d'une somme est égal au produit des ortho-complémentaires de ses sommants ; en particulier, $(\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b})' = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$;
(5) l'ortho-complémentaire d'un produit contient la somme des ortho-complémentaires de ses termes ; en particulier, $(\mathfrak{ab})' \supset \mathfrak{a}' \vee \mathfrak{b}'$.

Théorème 22. Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans un anneau booléen A, l'ortho-complémentaire $\mathfrak{c}$ de l'idéal $\mathfrak{ab}$ est le sous-anneau $\mathfrak{b}$ satisfaisant la relation $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$.

Définition 8. Dans un anneau booléen A, un idéal est dit être :
(1) principal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(a)$ pour un élément a ;
(2) semi-principal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(a)$ ou $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}'(a)$ pour un élément a ;
(3) simple si $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a}' = \mathfrak{e}$; (4) normal si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}''$.
Les classes des idéaux principal, semi-principal, simple et normal sont notées par les lettres $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^*, \mathfrak{S}$ et $\mathfrak{N}$ respectivement.

Théorème 23. Les classes définies dans la Définition 8 satisfont les relations d'inclusion suivantes : (1) $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{S} \subset \mathfrak{N} \subset \mathfrak{J}$
(2) $\mathfrak{P}$ contient $\mathfrak{o}$; (3) $\mathfrak{P}^*$ contient $\mathfrak{e}$.

Théorème 24. La relation $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{S}$ implique la relation $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{N}$; en particulier, si l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas simple, l'idéal $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{a}'$ n'est pas normal. Par conséquent, la relation $\mathfrak{I} = \mathfrak{N}$ implique la relation $\mathfrak{I} = \mathfrak{S}$.

Théorème 25. La relation $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$ implique la relation $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$ et par conséquent également la relation $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{S}$. En fait, les assertions suivantes concernant un anneau booléen A sont équivalentes :
(1) $\mathfrak{P} = \mathfrak{S}$; (2) $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^*$;
(3) il existe un idéal $\mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont dans $\mathfrak{P}$;
(4) l'anneau booléen A a une unité e [2].

Théorème 26. Pour qu'un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau booléen A soit simple, il est nécessaire et suffisant que le produit $\mathfrak{a}\mathfrak{a}(a)$ soit un idéal principal pour tout élément a dans A.

Théorème 27. Les assertions suivantes concernant un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau booléen A sont équivalentes :
(1) $\mathfrak{a}$ est un idéal normal ;
(2) $\mathfrak{a}$ est l'ortho-complémentaire d'un idéal dans A ;
(3) $\mathfrak{a}$ est le produit d'idéaux semi-principaux.
En général, si $\mathfrak{a}$ est un idéal arbitraire, alors $\mathfrak{a}''$ est le produit de tous les diviseurs idéaux semi-principaux de $\mathfrak{a}$; et, en particulier, un idéal normal est le produit de tous ses diviseurs idéaux semi-principaux. Dans le cas d'un anneau booléen avec unité, le groupe de mots "idéal principal" doit être remplacé par "idéal semi-principal" dans les assertions précédentes.

Théorème 28. La relation dyadique C définie entre les éléments de la classe $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans un anneau booléen A en posant $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$ si $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$, est une relation de congruence dans le système algébrique constitué de la classe $\mathfrak{I}$ et des opérations d'addition non restreinte et de multiplication finie. Chaque classe d'éléments mutuellement congruents dans $\mathfrak{I}$ contient un et seulement un idéal normal comme élément, au sens suivant : si $\mathfrak{a}$ est n'importe quel idéal, alors $\mathfrak{a}''$ est un idéal normal tel que $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a}''$; et, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux normaux tels que $\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Le système algébrique $\mathfrak{I}^C$ consistant en la classe $\mathfrak{I}$ avec la congruence C comme relation fondamentale d'égalité et les opérations d'addition finie et de multiplication finie est une algèbre booléenne avec unité conformément au Théorème 3.

Définition 9. Si $\mathfrak{B}$ est une classe non-vide d'idéaux $\mathfrak{a}$, l'idéal $(S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a})''$ est appelé la somme normalisée des idéaux $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{B}$ et est notée $S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}$; la somme normalisée d'idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est notée par $\mathfrak{a}\nabla\mathfrak{b}$. L'opération consistant à calculer la somme nor-

2. Pourquoi ce e n'est-il pas gothique dans l'article original ?

malisée est appelée l'addition normalisée.

THÉORÈME 29. La somme normalisée et le produit d'idéaux normaux sont des idéaux normaux ; mais une somme finie d'idéaux normaux n'est pas nécessairement normale. La somme normalisée d'idéaux arbitraires est l'idéal normal le plus petit contenant tous les sommants. Dans la classe $\mathfrak{N}$ de tous les idéaux normaux, les opérations d'addition normalisée et de multiplication ont les propriétés suivantes :
(1) si $\mathcal{B}$ est une classe non vide de sous-classes non vides $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{N}$, alors

$$S''_{\mathfrak{B}\in\mathcal{B}}(S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}\mathfrak{a}$$

où $\mathfrak{C}$ est l'union $\sum\limits_{\mathfrak{B}\in\mathcal{B}}\mathfrak{B}$;
(2) Si $\mathcal{B}$, $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ ont la même signification qu'en (1), alors

$$P_{\mathfrak{B}\in\mathcal{B}}(P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{C}}\mathfrak{a};$$

(3) si $\mathfrak{b}$ est n'importe quel idéal normal et $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle sous-classe non vide de $\mathfrak{N}$, alors

$$\mathfrak{b}(S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{b}\mathfrak{a};$$

(4) si $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{B}$ ont la même signification qu'en (3), alors

$$P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}(\mathfrak{b}\nabla\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}\nabla P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a};$$

(5) si $\mathfrak{B}$ est une sous-classe non vide de $\mathfrak{N}$, alors

$$(S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a})' = P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}';$$

(6) si $\mathfrak{B}$ a la même signification qu'en (5), alors

$$(P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a})' = S''_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}'.$$

Sous les opérations finies ∇ et . seuls, le système $\mathfrak{N}$ est une algèbre booléenne isomorphe au système $\mathfrak{I}^C$ du Théorème 28 en vertu de la correspondance $a \longleftrightarrow a''$. Cette algèbre a la propriété que ses idéaux normaux sont tous principaux.

THÉORÈME 30. La classe $\mathfrak{S}$ de tous les idéaux simples dans un anneau booléen A est un sous-anneau booléen, avec $\mathfrak{e}$ comme unité, des algèbres booléennes $\mathfrak{I}^C$ et $\mathfrak{N}$ des Théorèmes 28 et 29 respectivement. L'application des opérations d'addition finie, d'addition normalisée finie, de multiplication finie, et d'ortho-complémentation aux idéaux simples donne des idéaux simples ; en particulier, si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux simples, $\mathfrak{a}\nabla\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}$.

THÉORÈME 31. La classe $\mathfrak{P}$ de tous les idéaux principaux d'un anneau booléen A est un sous-anneau booléen de $\mathfrak{N}$ et un idéal dans $\mathfrak{S}$; elle est isomorphe à l'anneau

booléen A en accord avec les relations suivantes :
(1) $\mathfrak{a}(a) = \mathfrak{a}(b)$ si et seulement si $a = b$;
(2) $\mathfrak{a}(a+b) = \mathfrak{a}(a) + \mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}'(b) \vee \mathfrak{a}'(a)\mathfrak{a}(b)$;
(3) $\mathfrak{a}(a \vee b) = \mathfrak{a}(a) \vee \mathfrak{a}(b)$; (4) $\mathfrak{a}(ab) = \mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b)$.
Si l'anneau booléen A a une unité e, alors $\mathfrak{S} = \mathfrak{P}$ et $\mathfrak{a}(a') = \mathfrak{a}'(a)$.

THÉORÈME 32. La classe $\mathfrak{P}^*$ de tous les idéaux semi-principaux dans un anneau booléen A est un sous-anneau de $\mathfrak{S}$, avec $\mathfrak{e}$ comme unités, isolmorphe à l'anneau booléen B du Théorème 1 ; $\mathfrak{P}$ et A sont des idéaux dans $\mathfrak{P}^*$ et B respectivement. Les opérations $\vee$, ., + et ' dans le système $\mathfrak{S}$ s'appliquent aux éléments de $\mathfrak{P}^*$ à la manière indiquée par les règles suivantes :
(1_1) $\mathfrak{a}(a) \vee \mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(a \vee b)$; (1_2) $\mathfrak{a}(a) \vee \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(b + ab)$
(1_3) $\mathfrak{a}'(a) \vee \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(ab)$;
(2_1) $\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(ab)$; (2_2) $\mathfrak{a}(a)\mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}(a + ab)$
(2_3) $\mathfrak{a}'(a)\mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(a \vee b)$;
(3_1) $\mathfrak{a}(a) + \mathfrak{a}(b) = \mathfrak{a}(a + b)$; (3_2) $\mathfrak{a}(a) + \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}'(a + b)$
(3_3) $\mathfrak{a}'(a) + \mathfrak{a}'(b) = \mathfrak{a}(a + b)$;
(4_1) $\mathfrak{a}'(a)$ est dans $\mathfrak{P}^*$; (4_2) $(\mathfrak{a}'(a))' = \mathfrak{a}(a)$
Dans le cas où $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^*$, $\mathfrak{P}$ n'est pas un idéal normal dans $\mathfrak{P}^*$.

THÉORÈME 33. Les assertions suivantes concernant un idéal $\mathfrak{a}$ dans un anneau booléen A sont équivalentes : $\mathfrak{a}$ est sans diviseur, $\mathfrak{a}$ est premier, $\mathfrak{a}$ est primaire.

THÉORÈME 34. Si les éléments d'un anneau booléen A sont distribués selon deux classes non vides disjointes $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, alors pour que $\mathfrak{a}$ soit un idéal premier dans A, l'ensemble suivant de conditions est nécessaire et suffisant :
(1) $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in \mathfrak{a}$ implique $a \vee b \in \mathfrak{a}$;
(2) $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in A$ implique $ab \in \mathfrak{a}$;
(3) $a \in \mathfrak{b}$ et $b \in \mathfrak{b}$ implique $ab \in \mathfrak{b}$.

THÉORÈME 35. Dans le Théorème 34, la condition (2) peut être remplacée par la condition
(2') $a \in \mathfrak{b}$ et $b \in A$ implique $a \vee b \in \mathfrak{b}$.

THÉORÈME 36. Si un anneau booléen A a une unité, la condition (3) de l'ensemble (1), (2'), (3) du Théorème 35 peut être remplacée par
(3') $a \in \mathfrak{b}$ implique $a' \in \mathfrak{a}$.
L'idéal premier $\mathfrak{a}$ contient un des éléments a et a', mais pas les deux.

THÉORÈME 37. L'anneau booléen B du Théorème 1 contient A comme idéal premier lorsque A n'a pas d'unité ; et le système $\mathfrak{P}$ est un idéal premier dans $\mathfrak{P}^*$ quand

$\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^*$.

Théorème 38. Dans un anneau booléen, les classes $\mathfrak{E}, \mathfrak{N}$ et $\mathfrak{P}^*$ satisfont la relation d'inclusion $\mathfrak{E}\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}^*$. Plus précisément, un idéal $\mathfrak{p}$ et à la fois premier et normal si et seulement si $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}'(a)$ où a est un élément atomique ; et un idéal premier $\mathfrak{p}$ ne peut être normal si et seulement si $\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}$.

Théorème 39. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier dans un anneau booléen A et si $\mathfrak{a}$ est un idéal arbitraire alors
(1) les relations $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{a}\mathfrak{p} = \mathfrak{p}, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{p} = \mathfrak{p}$ sont équivalentes ;
(2) les relations $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}, \mathfrak{a}\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{a} \vee \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}$ sont équivalentes ;
(3) un et un seulement de ces deux ensembles de relations équivalentes est valide. Au cas où $\mathfrak{p}$ est normal, les relations $\mathfrak{a}\mathfrak{p}' = \mathfrak{o}$ et $\mathfrak{a}\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}'$, où $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{o}$, sont respectivement équivalentes aux relations dans (1) et (2) respectivement.

Théorème 40. If $\mathfrak{p}$ est un diviseur idéal premier du produit idéal $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ dans un anneau booléen A, alors $\mathfrak{p}$ est un diviseur d'au moins l'un des facteurs $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$; en d'autres termes, $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ implique $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}$ ou $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{b}$.

Théorème 41. Si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier dans un anneau booléen A et si $\mathfrak{a}$ est un idéal arbitraire, alors au moins l'une des relations $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}, \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{p}$ est valide ; si $\mathfrak{a}$ est simple, alors seulement l'une de ces deux relations est valide.

Proposition fondamentale de l'arithmétique des idéaux. Dans un anneau booléen A, tout idéal autre que $\mathfrak{e}$ est le produit de tous ses idéaux diviseurs premiers.

Proposition fondamentale d'existence. Dans un anneau booléen A contenant au moins deux éléments, il existe au moins un idéal premier.

Théorème 42. Si un système algébrique B est homomorphe à un anneau booléen A par rapport à la paire d'opérations $+$ et . ou par rapport à la paire d'opérations $\vee$ et ., alors B est homomorphe à A par rapport aux trois opérations $+$, $\vee$ et . ; et B est un anneau booléen. Si le système algébrique B est homomorphe à un anneau booléen A avec unité par rapport à la paire d'opérations $+$ et ., par rapport à la paire d'opérations $\vee$ et $'$, ou par rapport à la paire d'opérations $\vee$ et ., alors B est homomorphe à A par rapport à toutes les 4 opérations $+$, $\vee$, . et $'$; et B est un anneau booléen avec unité. L'homomorphisme $A \to B$ envoie l'élément zéro de A sur l'élément zéro de B, et l'élément unité de A, s'il existe, sur l'élément unité de B.

Théorème 43. Pour qu'un anneau booléen B soit homomorphe à un anneau booléen A, il est nécessaire et suffisant que B soit isomorphe à un anneau quotient $A/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$

est un idéal dans A ; en particulier, l'homomorphisme $A \to B$ détermine $\mathfrak{a}$ comme la classe de tous les éléments dans A qui ont l'élément zéro dans B comme image.

Théorème 44. Les seules congruences dans un anneau booléen A sont les congruences modulaires. Pour que $a \equiv b$ (mod $\mathfrak{a}$), où $\mathfrak{a}$ est un idéal dans A, il est nécessaire et suffisant que $a + b$ appartienne à $\mathfrak{a}$, ou qu'il existe des éléments c et d dans $\mathfrak{a}$ pour lesuels $a \vee c = b \vee d$.

Théorème 45. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, si $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$ sont les classes de tous les sous-anneaux de A_1 et de A_2 respectivement, et si l'homomorphisme $A_1 \to A_2$ détermine l'idéal $\mathfrak{a}_1$ dans A, alors l'homomorphisme en question induit un homomorphisme $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ selon l'opération d'addition non restreinte. En particulier, les correspondances $A_1 \to A_2, \mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ ont les propriétés suivantes :
(1) si $\mathfrak{b}_1$ est un sous-anneau de A_1, les images de ses éléments par les homomorphismes $A_1 \to A_2$ constituent un sous-anneau $\mathfrak{b}_2$ de A_2 lui correspondant suivant l'homomorphisme $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$;
(2) si $\mathfrak{b}_1$ est le sous-anneau engendré par une sous-classe non vide $\mathfrak{s}_1$ de A_1, alors son image $\mathfrak{b}_2$ par les homomorphismes $A_1 \to A_2$ et $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$ est le sous-anneau engendré par la classe $\mathfrak{s}_2$ de toutes les images des éléments de $\mathfrak{s}_1$;
(3) si $\mathfrak{b}_2$ est un sous-anneau de A_2, la classe $\mathfrak{b}_1$ de tous les éléments de A_1 d'images dans $\mathfrak{b}_2$ est un sous-anneau de A_1 avec $\mathfrak{b}_2$ comme image par les homomorphismes $A_1 \to A_2$ et $\mathfrak{U}_1 \to \mathfrak{U}_2$;
(4) si $\mathfrak{b}_1$ et $\mathfrak{c}_1$ sont des sous-anneaux de A_1 d'images respectives $\mathfrak{b}_2$ et $\mathfrak{c}_2$ dans A_2, alors les relations $\mathfrak{b}_1 \vee \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{c}_1 \vee \mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{c}_2$ sont équivalentes.

Théorème 46. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, et si $\mathfrak{I}_1$ et $\mathfrak{I}_2$ sont les classes de tous les idéaux dans A_1 et dans A_2 respectivement, et si l'homomorphisme $A_1 \to A_2$ détermine l'idéal $\mathfrak{a}_1$ dans A_1, alors l'homomorphisme indiqué induit un homomorphisme $\mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ par rapport aux opérations de l'addition non restreinte et de la multiplication finie. En particulier, les correspondances $A_1 \to A_2$ et $\mathfrak{I}_1 \to \mathfrak{I}_2$ ont les propriétés (1)-(4) du théorème 45 avec le terme "sous-anneau" partout remplacé par le terme "idéal".

Théorème 47. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, l'homomorphisme $A_1 \to A_2$ envoie tout idéal principal (semi-principal, simple) dans A_1 sur un idéal principal (semi-principal, simple) dans A_2 ; mais il peut aussi envoyer un idéal normal dans A_1 dans un idéal non-normal dans A_2.

Théorème 48. Si A_1 et A_2 sont des anneaux booléens, et si $\mathfrak{a}_1$ est l'idéal déterminé dans A_1 par l'homomorphisme $A_1 \to A_2$, alors l'homomorphisme indiqué envoie un idéal premier $\mathfrak{p}_1$ dans A_1 sur un idéal $\mathfrak{p}_2$ dans A_2 qui est premier ou qui coïncide avec $\mathfrak{e}_2$ selon que $\mathfrak{p}_1$ contient $\mathfrak{a}_1$ ou non. Si $\mathfrak{p}_2$ est un idéal premier dans A_2, la classe $\mathfrak{p}_1$ de tous les éléments dans A_1 avec des images dans $\mathfrak{p}_2$ est un idéal premier dans A_1.

Théorème 49. Pour qu'un idéal $\mathfrak{p}$ dans un anneau booléen A soit premier, il est nécessaire et suffisant que $A/\mathfrak{p}$ soit un anneau booléen à deux éléments.

Théorème 50. La somme directe $S_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha$ des anneaux booléens A_α où α parcourt la classe A est un anneau booléen. Son élément zéro est la fonction 0 qui pour tout α prend la valeur $0(\alpha)$ l'élément zéro de A_α. Elle a une unité si et seulement si tout A_α a une unité ; si A_α a une unité e_α pour tout α, alors la fonction e qui pour chaque α a la valeur $e(\alpha) = e_\alpha$ est l'unité de la somme directe.

Théorème 51. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal simple dans un anneau booléen A, alors $A \longleftrightarrow (A/\mathfrak{a}) \vee (A/\mathfrak{a}'), \mathfrak{a} \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}', \mathfrak{a}' \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}$. Inversement, si A, A_1, et A_2 sont des anneaux booléens tels que $A \longleftrightarrow A_1 \vee A_2$, alors il existe un idéal simple $\mathfrak{a}$ dans A tel que $A_1 \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}, A_2 \longleftrightarrow A/\mathfrak{a}'$.

Théorème 52. Un anneau booléen A est réductible si et seulement si il a plus de deux éléments.

Théorème 53. Un anneau booléen A est isomorphe à la somme directe d'anneaux booléens à deux éléments A_α, où α parcours la classe A, si et seulement si il est isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes de A.

Définition 10. Si A est un anneau booléen avec éléments $a, b, c, \ldots$ qui sont des sous-classes d'une classe fixe $\mathrm{E} = E(A)$ avec éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, alors A est dite être une algèbre réduite de classes quand elle a la propriété suivante : tout élément α dans E est contenu dans un élément de A et est le seul élément de E commun à tous les éléments de A le contenant.

Théorème 54. Tout algèbre de classes avec plus d'un élément est isomorphe à une algèbre réduite de classes, en vertu d'une correspondance élément à élément des classes basiques.

Définition 11. Si A et B sont des algèbres de sous-classes de classes E_A et E_B respectivement et s'il existe une correspondance biunivoque entre E_A et E_B qui induit un isomorphisme $A \longleftrightarrow B$, alors les algèbres A et B sont dites équivalentes.

Théorème 55. Si A, B, et C sont des algèbres de classes, alors la relation d'équivalence introduite dans la définition 11 a les propriétés suivantes :
(1) A est équivalente à A ;

(2) si A est équivalente à B alors B est équivalente à A ;
(3) si A est équivalente à B et B à C, alors A est équivalente à C ;
(4) si A est une algèbre réduite de classes et B est équivalente à A, alors B est une algèbre réduite de classes.

Théorème 56. Si A est une algèbre réduite de sous-classes a d'une classe E et si H est n'importe quelle sous-classe de E, alors les classes Ha constituent une algèbre réduite B de sous-classes de H homomorphe à A selon la correspondance $a \to Ha$. Cet homomorphisme est un isomorphisme si et seulement si l'intersection Ha est non vide pour tout a non vide dans A.

Théorème 57. Soit A une algèbre de sous-classes a d'une classe E ; soit $\mathfrak{a}$ un idéal arbitraire dans A ; et soit $E(\mathfrak{a})$ l'union de toutes ces sous-classes de E qui sont éléments de l'idéal $\mathfrak{a}$. Alors les relations suivantes sont valides :
(1) si $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle classe non vide d'idéaux dans A, alors

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} E(\mathfrak{a}) = E(S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}), \qquad \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} E(\mathfrak{a}) \supset E(P_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a});$$

(2) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans A, alors $E(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = E(\mathfrak{a})E(\mathfrak{b})$;
(3) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans A, alors $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ implique $E(\mathfrak{a}) \subset E(\mathfrak{b})$;
(4) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux dans A, alors $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$ implique $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$;
(5) l'idéal $\mathfrak{a}'$ consiste en ces classes de E qui appartiennent à A et qui sont contenues dans $E'(\mathfrak{a})$ et seulement elles ; et $E(\mathfrak{a}') \subset E'(\mathfrak{a})$.
La correspondance $\mathfrak{a} \to E(\mathfrak{a})$ définit un homomorphisme du système $\mathfrak{I}$ de tous les idéaux dans A (avec addition non restreinte et multiplication finie comme opérations) au système de toutes les classes $E(\mathfrak{a})$ (avec les opérations de formation d'unions arbitraires et d'intersections finies), en accord avec (1) et (2) ci-dessus. Cette correspondance a les propriétés spéciales suivantes :
(6) si $\mathfrak{a}$ est un idéal principal $\mathfrak{a}(a)$, alors $E(\mathfrak{a}(a)) = a$;
(7) si $\mathfrak{a}$ est un idéal simple, alors $E(\mathfrak{a}') = E'(\mathfrak{a})$;
(8) si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux normaux, alors $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$ implique $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$;
(9) si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, alors $E'(\mathfrak{p})$ contient au plus un élément.
Si la correspondance $\mathfrak{a} \to E(\mathfrak{a})$ est restreinte aux idéaux normaux, elle est biunivoque ; si elle est restreinte aux idéaux simples, semi-principaux ou principaux, elle définit un isomorphisme et les classes correspondantes $E(\mathfrak{a})$ constituent une algèbre de classes.

Théorème 58. Soit A une algèbre de sous-classes a d'une classe E ; soit H une sous-classe arbitraire de E ; et soit $\mathfrak{a}(H)$ la classe de tous les éléments a dans A qui sont sous-classes de H. Alors $\mathfrak{a}(H)$ est un idéal dans A avec les propriétés suivantes :
(1) $\quad \mathfrak{a}(H_1) \vee \mathfrak{a}(H_2) \subset \mathfrak{a}(H_1 \cup H_2)$;
(2) $\quad \mathfrak{a}(H_1)\mathfrak{a}(H_2) = \mathfrak{a}(H_1 H_2)$;
(3) $\quad H_1 \subset H_2$ implique $\mathfrak{a}(H_1) \subset \mathfrak{a}(H_2)$;

(4) $\mathfrak{a}(H)$ est premier si et seulement si H' a exactement un élément.
En connexion avec le Théorème 57, les relations suivantes sont vérifiées :
(5) $\mathfrak{a}(E(\mathfrak{b})) \supset \mathfrak{b}$; (6) $E(\mathfrak{a}(H)) \subset H$; (7) $\mathfrak{b}' = \mathfrak{a}(E'(\mathfrak{b}))$.

DÉFINITION 12. Une algèbre A de sous-classes d'une classe E est dite parfaite si $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$ implique $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$; c'est-à-dire si l'homomorphisme du Théorème 57 est un isomorphisme.

THÉORÈME 59. Pour qu'une algèbre A de sous-classes d'une classe E soit parfaite, il est nécessaire et suffisant que
(1) la Proposition fondamentale de l'arithmétique des idéaux soit vérifiée dans A ;
(2) $E'(\mathfrak{p})$ soit une classe à un élément à chaque fois que $\mathfrak{p}$ est un idéal premier.

THÉORÈME 60. Les assertions suivantes concernant une algèbre A de sous-classes d'une classe E sont équivalentes :
(1) $\mathfrak{a}' = \mathfrak{b}'$ implique $E(\mathfrak{a}) = E(\mathfrak{b})$;
(2) toute sous-classe à un seul élément de E est un élément de A ;
(3) $\mathfrak{a}(H_1) = \mathfrak{a}(H_2)$ implique $H_1 = H_2$;
(4) $E(\mathfrak{a}(H)) = H$ pour toute sous-classe H de E ;
(5) $E(\mathfrak{a}') = E'(\mathfrak{a})$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ dans A ;
(6) $\mathfrak{a}(H)$ est un idéal normal pour tout H ;
(7) $\mathfrak{a}(E(\mathfrak{b})) = \mathfrak{b}''$ pour tout idéal $\mathfrak{b}$ dans A ;
(8) $\mathfrak{a}(H_1)\nabla\mathfrak{a}(H_2) = \mathfrak{a}(H_1 \cup H_2)$ pour tout H_1 et H_2.
Quand ces conditions sont satisfaites, l'anneau booléen $\mathfrak{N}$ de tous les idéaux normaux dans A décrit dans le Théorème 29 est isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes de E. Inversement, si l'anneau booléen $\mathfrak{N}$ de tous les idéaux normaux dans un anneau booléen abstrait B est isomorphe à l'algèbre de toutes les sous-classes d'une classe E, alors B est isomorphe à l'algèbre réduite A des sous-classes de E dans laquelle ces conditions sont satisfaites.

THÉORÈME 61. Pour qu'un anneau booléen abstrait B soit isomorphe à une algèbre A de sous-classes d'une classe E avec la propriété (2) du Théorème 60, il est nécessaire et suffisant que B contienne un système atomique complet.

THÉORÈME 62. Pour qu'un anneau booléen abstrait B soit isomorphe à l'algèbre A de toutes les sous-classes d'une classe E, il est nécessaire et suffisant que tout idéal normal dans B soit principal et que B contienne un système atomique complet.

THÉORÈME 63. Dans un anneau booléen A contenant au moins deux éléments, il existe au moins un idéal premier.

Théorème 64. Si A est un anneau booléen contenant des éléments a et b tels que $ab \neq a$ ou, de façon équivalente, tel que $a < b$ est faux, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans A qui contient b et non a ; et, si A est un anneau booléen contenant les idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{b}$ n'est pas un diviseur de $\mathfrak{a}$, alors il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans A qui est diviseur de $\mathfrak{a}$ mais pas de $\mathfrak{b}$.

Théorème 65. Le Théorème 64 découle du Théorème 63 sans l'intervention de méthodes transfinies ou de l'hypothèse du bon ordre.

Théorème 66. Dans un anneau booléen A, tout idéal autre que $\mathfrak{e}$ est le produit de tous ses diviseurs idéaux premiers. Ce résultat découle du Théorème 64 sans l'intervention de méthodes transfinies ou de l'hypothèse du bon ordre.

Théorème 67. Soit A un anneau booléen, $\mathfrak{a}$ un idéal arbitraire dans A, $\mathfrak{F}$ la classe de tous les idéaux premiers dans A, $\mathfrak{I}$ le système algébrique de tous les idéaux dans A selon les opérations d'addition non restreinte et de multiplication finie, $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ la classe de tous les idéaux premiers qui ne sont pas des diviseurs de $\mathfrak{a}$, et $I(A)$ le système algébrique qui a les classes $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ pour éléments, et la formation d'unions non restreintes et d'intersections finies pour opérations. Alors la correspondance $\mathfrak{a} \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ détermine un isomorphisme $\mathfrak{I} \longleftrightarrow I(A)$ en accord avec les relations
(1) $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{b})$ si et seulement si $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$;
(2) si $\mathfrak{B}$ est n'importe quelle classe non vide d'idéaux, alors

$$\mathfrak{F}(S_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}}\mathfrak{a}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{B}} \mathfrak{F}(\mathfrak{a});$$

(3) $\mathfrak{F}(a\mathfrak{b}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{a})\mathfrak{F}(\mathfrak{b})$.
Appelons $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ la classe $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}(a))$ correspondant à l'idéal principal $\mathfrak{a}(a)$ et appelons $B(A)$ le système algébrique avec les classes $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ comme éléments et avec les opérations de formation d'unions finies, différences symétriques (unions modulo 2), et intersections finies. Alors $B(A)$ est un anneau booléen concret ou une algèbre de classes isomorphe à A en vertu de la correspondance $a \to \mathfrak{F}(a)$ en accord avec les relations
(4) $\mathfrak{F}(a) = \mathfrak{F}(b)$ si et seulement si $a = b$;
(5) $\mathfrak{F}(a + b) = \mathfrak{F}(a)\Delta\mathfrak{F}(b)$;
(6) $\mathfrak{F}(a \vee b) = \mathfrak{F}(a) \subset \mathfrak{F}(b)$;
(7) $\mathfrak{F}(ab) = \mathfrak{F}(a)\mathfrak{F}(b)$;
Le système $B(A)$ est une algèbre parfaite réduite de classes.

Définition 13. L'algèbre des classes $B(A)$ associée à un anneau booléen A par le Théorème 67 est appelée la représentation parfaite de A.

Théorème 68. Utilisons les notations $A, \mathfrak{F}, \mathfrak{F}(\mathfrak{a}), I(A), \mathfrak{F}(a)$ et $B(A)$ spécifiées dans le Théorème 67. Soit $\mathfrak{T}$ une sous-classe arbitraire de $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')$ l'idéal constitué de tous les éléments a tels que $\mathfrak{F}(a) \subset \mathfrak{T}'$; $I(A, \mathfrak{T})$ le système algébrique de toutes les classes $\mathfrak{T}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ selon les opérations de formation d'unions non restreintes et d'intersections finies ; et $B(A, \mathfrak{T})$ le système algébrique de toutes les classes $\mathfrak{T}\mathfrak{F}(a)$ selon les opérations de formation d'unions finies, différences symétriques, et intersections finies. Alors la correspondance $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{T}\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ détermine les homomorphismes $I(A) \to I(A, \mathfrak{T}), I(A, \mathfrak{a}(\mathfrak{T}')) \to I(A, \mathfrak{T})$, ce dernier est un isomorphisme si et seulement si $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')) = \mathfrak{T}'$ ou de façon équivalente, $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}'(\mathfrak{a}(T'))$. De la même manière, la correspondance $\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{T}\mathfrak{F}(a)$ détermine un homomorphisme $B(A) \to B(A, \mathfrak{T})$ et un isomorphisme $B(A, \mathfrak{T}) \longleftrightarrow B(A/\mathfrak{a}(\mathfrak{T}'))$. L'algèbre des classes $B(A, \mathfrak{T})$ est parfaite si et seulement si $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')) = \mathfrak{T}'$; et, quand cette condition est satisfaite, $B(A, \mathfrak{T})$ est équivalente à $B(A/\mathfrak{a}(\mathfrak{T}'))$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal arbitraire, alors nous avons en particulier le résultat que $B(A/\mathfrak{b})$ est équivalent à $B(A, \mathfrak{F}'(\mathfrak{b}))$. L'idéal $\mathfrak{a}(\mathfrak{T}')$ est égal à $\mathfrak{e}$ quand $\mathfrak{T}$ est vide et égal au produit des idéaux premiers dans $\mathfrak{T}$ sinon.

Théorème 69. Si B est une algèbre de classes homomorphe à un anneau booléen A et si $\mathfrak{b}$ est l'idéal dans A déterminé par l'homomorphisme $A \to B$, alors il existe une classe $\mathfrak{T}$ d'idéaux premiers dans A reliés à $\mathfrak{b}$ à travers l'équation $\mathfrak{a}(\mathfrak{T}') = \mathfrak{b}$ telle que B est équivalente à $B(A, \mathfrak{T})$. Pour que B soit parfait, il est nécessaire et suffisant que $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}'(\mathfrak{b})$. Les seules algèbres parfaites de classes isomorphes à A sont celles équivalentes à $B(A)$.

Théorème 70. Les propositions suivantes sont équivalentes sans utiliser des méthodes transfinis ou l'hypothèse du bon ordre :
(1) tout anneau booléen possède une algèbre de classes isomorphe ;
(2) la proposition fondamentale de l'arithmétique des idéaux est valide dans tout anneau booléen.