Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

Chapitre XIX
Hamilton
Une tragédie irlandaise.

> *"En mathématiques il était supérieur*
> *A Tycho Brahé ou Erra Pater*
> *Car à l'échelle géométrique*
> *Il pouvait prendre la dimension des pots de bière."*
>
> Samuel Butler

William Rowan Hamilton est de beaucoup le plus grand savant que l'Irlande ait produit ; nous soulignons sa nationalité parce qu'un des mobiles de l'incessante activité d'Hamilton était son désir avoué de faire de son magnifique génie un usage qui contribue à la gloire de son pays. Certains ont prétendu qu'il était d'ascendance écossaise ; il a lui-même revendiqué son origine irlandaise, et d'ailleurs il serait certainement difficile à un Écossais de trouver quoi que ce soit d'écossais dans le plus grand et le plus éloquent mathématicien d'Irlande.

Le père d'Hamilton était avoué à Dublin ; c'est dans cette ville que William, le plus jeune de trois frères et une sœur, naquit le 3 août 1805 [1]. Le père était un légiste de premier ordre, doué d'une "éloquence exubérante", en religion pratiquant fanatique, et non moins porté sur la bonne chère et la boisson ; son fils avait hérité de tous ses goûts. C'est probablement de sa mère, Sarah Hutton, issue d'une famille bien connue pour son intelligence, qu'Hamilton tenait un cerveau extraordinairement brillant.

Le père, joyeux buveur, faisait les délices de toutes les réunions qu'il honorait de sa présence malodorante ; "sa bouche, comme sa plume", déversait des flots nébuleux d'éloquence, qui avaient pris une forme moins vaporeuse chez son frère, le Révérend James Hamilton, pasteur du village de Trim, à environ 30 kilomètres de Dublin. Cet oncle de William était un linguiste superlativement accompli : le grec, le latin, l'hébreu, le sanscrit, le chaldéen, le pali, et Dieu sait quels autres dialectes païens, lui venaient au bout de la langue aussi aisément que les idiomes plus civilisés de l'Europe continentale et de l'Irlande. Ce polyglotte verbeux a joué un rôle considérable dans la fâcheuse éducation, précoce et touffue, du malheureux William, d'ailleurs avide de s'instruire. Le père, quelque peu stupide, enleva, à trois ans, à l'affection de sa mère l'enfant qui avait déjà donné des marques de génie pour l'envoyer se gorger de langues diverses sous la direction experte et volubile de l'oncle James.

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?_lg=fr-FR.

Transcription : Denise Vella-Chemla, février 2025.

[1] Sa tombe porte la date du 4 août 1805 ; en réalité il était né à minuit : de là vient la confusion des deux dates. Hamilton, qui avait la passion de la précision pour ces menus détails, avait choisi le 3 août ; mais vers la fin de sa vie, pour des raisons sentimentales, il avait adopté le 4.

Les parents d'Hamilton exercèrent peu d'influence sur sa première instruction ; à douze ans il perdit sa mère et deux ans plus tard son père. James Hamilton est seul responsable d'avoir gaspillé les admirables facultés du jeune William en lui faisant apprendre des langues absolument inutiles et en faisant de lui, à l'âge de treize ans, un des plus choquants exemples de monstruosité linguistique de l'histoire. Le fait qu'Hamilton ne soit pas devenu un fat insupportable sous la mauvaise direction de son oncle est la meilleure preuve de la force de résistance de son bon sens d'Irlandais ; une pareille éducation aurait pu faire un âne bâté même d'un garçon plein d'humour et Hamilton ne l'était pas.

L'histoire de l'enfance d'Hamilton ressemble à un mauvais roman, mais elle est vraie ; à trois ans, il lisait supérieurement l'anglais et était très avancé en arithmétique ; à quatre ans, il savait sa géographie ; à cinq ans, il traduisait et lisait le latin, le grec, l'hébreu et se plaisait à réciter de longs passages de Dryden, Collins, Milton, et Homère (en grec) ; à huit ans, il avait ajouté à sa collection l'italien et le français et improvisait couramment en latin ; son grand plaisir était de dépeindre en hexamètres latins la beauté des paysages d'Irlande, lorsque la prose anglaise lui paraissait un exutoire trop plébéien pour exprimer l'exaltation de ses nobles sentiments ; enfin, avant dix ans, il avait jeté les bases d'une érudition extraordinaire en langues orientales en commençant par l'arabe et le sanscrit.

Et le compte de ses prouesses linguistiques n'est pas complet. Voici ce qu'écrivait son oncle lorsque William avait dix ans moins trois mois : "Il ne peut pas apaiser sa soif de langues orientales ; il les possède maintenant presque toutes, à part les dialectes les moins importants des provinces. La connaissance de l'hébreu, du persan et de l'arabe va se trouver complétée par la connaissance approfondie du sanscrit, dans lequel il est déjà très fort. Il a déjà appris les éléments du chaldéen et du syriaque, ainsi que de l'hindoustani, des idiomes des pays Malais, du Mahratta, du Bengale et d'autres. Il va commencer le chinois, mais il est très difficile de se procurer les livres voulus. Cela me coûte cher de les faire venir de Londres, mais j'espère que mon argent est bien placé". À cette lecture, on ne peut que lever les bras au ciel et s'écrier : bon Dieu ! Quel sens cela avait-il ?

À treize ans, William pouvait se vanter d'avoir en moyenne appris une langue par an. À quatorze ans, il rédigea, en persan, un compliment de bienvenue à l'ambassadeur de Perse qui visitait Dublin, et le fit parvenir à ce haut personnage pour son plus grand étonnement. Désirant profiter de son succès, et battre le fer pendant qu'il était chaud, le jeune Hamilton se présenta le lendemain chez l'ambassadeur ; mais le rusé oriental, prévenu par son secrétaire, fit répondre "qu'il regrettait beaucoup qu'une violente migraine l'empêchât de le recevoir personnellement". Peut-être l'ambassadeur n'était-il pas encore remis du banquet officiel de la veille, ou bien avait-il lu la lettre. En traduction, du moins, elle est passablement ahurissante. C'est bien ce qu'un garçon rompu aux finesses ampoulées des poètes persans, et se prenant terriblement au sérieux, pouvait imaginer qu'un oriental blasé sortant d'une vaste beuverie irlandaise dégusterait volontiers comme remontant le matin d'après. Si le jeune Hamilton voulait réellement voir l'ambassadeur, il aurait dû lui envoyer un hareng-saur et non pas un poème persan.

À part son intelligence surprenante, la maturité de sa conversation et son amour poétique de la nature sous toutes ses formes, Hamilton était comme tout autre garçon bien portant : son sport favori était la natation ; il n'avait rien de la pâleur intéressante encore que quelque peu déplaisante, qu'engendre un labeur monotone ; son caractère était génial et son tempérament invariablement égal, chose plutôt exceptionnelle chez un robuste petit Irlandais. Beaucoup plus tard cependant, l'Irlandais reparut en lui : il provoqua en duel à mort un de ses détracteurs qui l'avait traité de menteur ; son témoin réussit à arranger l'affaire à l'amiable, en sorte qu'on ne peut pas compter Sir William au nombre des grands mathématiciens duellistes. À d'autres égards, Hamilton n'était pas un enfant normal : il ne pouvait pas tolérer qu'on fît souffrir un animal ou une personne ; toute sa vie, il aima les animaux et, ce qui est malheureusement plus rare, il les respectait comme des égaux.

C'est entre douze et quatorze ans qu'Hamilton s'affranchit de cette insensée dévotion pour des langues inutiles ; l'humble instrument choisi par la Providence pour tirer Hamilton du chemin de l'erreur fut le jeune calculateur américain Zerah Colburn (1804-1839), qui à cette époque suivait les cours de l'école de Westminster à Londres. On rapprocha les deux jeunes gens dans l'espoir que le jeune génie irlandais pénétrerait le secret des méthodes de l'Américain, que d'ailleurs ce dernier ne connaissait pas très bien lui-même (comme nous l'avons dit au chapitre de Fermat) ; il n'y avait rien de secret ou de remarquable dans les méthodes de Colburn, ses prouesses étaient surtout une affaire de mémoire. Colburn était d'une entière franchise en exposant ses trucs à son ami qui à son tour perfectionnait ce qu'il lui montrait. Dans une lettre à son cousin Arthur, au mois d'août 1822 (il avait dix-sept ans), Hamilton reconnaît l'influence de Colburn.

À dix-sept ans, Hamilton possédait tout le calcul intégral et, en astronomie, il était assez avancé pour être capable de calculer des éclipses. Il lisait Newton et Lagrange ; mais tout cela était son passe-temps ; les classiques étaient toujours son étude sérieuse, encore que passée au rang d'un second amour. L'important est qu'il avait déjà fait "de curieuses découvertes", comme il l'écrivait à sa sœur Elisa. Ces découvertes auxquelles il faisait allusion sont sans doute les germes de son premier grand travail sur les systèmes de rayons en optique. Ainsi donc, dès sa dix-septième année, Hamilton avait commencé sa carrière de créateur. Avant cela, il avait attiré l'attention du Dr Brinkley, professeur d'astronomie à Dublin, en découvrant une erreur dans la démonstration du parallélogramme des forces que Laplace avait essayée.

Hamilton n'avait jamais fréquenté aucune école avant d'entrer à l'université, son instruction première lui avait été donnée par son oncle, ensuite il avait étudié par lui-même. Pour préparer ses examens d'entrée au Trinity College à Dublin, il dut se plonger dans les études classiques ; mais cela ne lui prenait pas tout son temps, puisque le 31 mai 1823 il écrivait à son cousin Arthur : "En optique, j'ai fait une découverte fort curieuse, au moins à ce qu'il me paraît...".

Si, comme on l'a supposé, ceci concerne la "fonction caractéristique", qu'Hamilton nous exposera tout à l'heure, cette découverte place tout de suite son auteur au rang des mathématiciens les plus précoces de l'histoire. Le 7 juillet 1823, le jeune Hamilton entra aisément, le premier sur cent candidats, au Trinity College ; sa renommée l'y avait précédé et, comme il fallait s'y attendre, il y devint vite une célébrité ; ses prouesses, classiques et mathématiques, avant même d'être bachelier, excitaient la curiosité des milieux académiques en Angleterre, en Écosse et en Irlande, et d'aucuns déclaraient qu'un nouveau Newton était né. On s'imagine aisément l'histoire de ses triomphes : il remportait tous les premiers prix, toutes les récompenses aussi bien en mathématiques qu'en études classiques. Mais, chose plus importante que tous ces succès scolaires, il termina la première partie de son mémoire sur les systèmes de rayons, qui fit sensation : lorsqu'il présenta ce document à l'Académie Royale d'Irlande, le Dr Brinkley fit la remarque suivante : "Je ne dis pas que ce jeune homme sera, je dis qu'il est le premier mathématicien de son époque."

Et même la préparation laborieuse de ses succès académiques, pas plus que les heures plus profitables passées à ses recherches, n'absorbaient pas toute l'énergie surabondante du jeune Hamilton ; à dix-neuf ans, il fit la première de ses trois expériences amoureuses. Conscient de sa propre "indignité", surtout en ce qui concernait sa bourse, William se contentait d'écrire à la jeune fille des poèmes, et le résultat habituel ne manqua pas : un homme plus prosaïque, mais plus riche, épousa la bien-aimée. C'est la mère de cette dernière qui apprit la nouvelle à Hamilton en mai 1825 ; le jeune homme en reçut un tel choc qu'en dépit de ses idées de croyant pour lequel le suicide est un péché mortel, il tenta de se noyer ; heureusement pour la science, il n'y réussit pas et se consola avec un autre poème. Toute sa vie, Hamilton fut un versificateur prolifique ; mais sa vraie poésie, comme il le dit un jour à son ami et ardent admirateur William Wordsworth, ce furent les mathématiques : aucun mathématicien ne le démentira sur ce point.

C'est le moment de dire un mot des amitiés fidèles qu'entretint Hamilton avec certaines lumières littéraires de son temps, les poètes Wordsworth, Southey, Coleridge, de l'école dite "lakiste", Aubrey de Vère, enfin la romancière didactique Marie Edgeworth. Wordsworth et Hamilton se rencontrèrent pour la première fois pendant le voyage de ce dernier, en septembre 1827, dans le district des lacs anglais. Après avoir pris le thé ensemble, Hamilton et le poète firent les cent pas toute la nuit, chacun s'entêtant à raccompagner l'autre jusqu'à sa porte. Le lendemain, Hamilton envoya à Wordsworth un poème de quatre-vingt-dix vers blindés, que le poète aurait pu avoir forgé dans une de ses plus lourdes envolées ; naturellement, Wordsworth ne goûta pas ce plagiat inconscient du jeune mathématicien ; après l'avoir gratifié d'un vague compliment, il se mit à démontrer tout au long à l'auteur plein d'espoir, que la "facture laissait encore un peu à désirer". Deux ans plus tard, alors qu'Hamilton occupait les fonctions d'astronome à l'Observatoire de Dunsink, Wordsworth lui rendit sa visite ; la sœur d'Hamilton, Elisa, quand elle fut présentée au poète, se sentit involontairement parodier les premières lignes de son poème "la visite à Yarrow" :

> Et voici *Wordsworth* ! voici l'homme
> Pour qui mon imagination a caressé
> Si fidèlement un rêve tout éveillé,
> Une image qui s'est effacée !

La visite de Wordsworth eut un excellent résultat : Hamilton comprit enfin que "sa voie devait être la voie de la science et non pas celle de la poésie, qu'il devait renoncer à l'espoir de s'habituer à cultiver les deux et que par conséquent, il devait se résoudre à dire un triste adieu à la poésie." En un mot, Hamilton comprit cette vérité évidente qu'il n'avait pas l'étincelle poétique au sens littéraire ; il continua néanmoins à versifier toute sa vie. Wordsworth a toujours conservé une haute opinion de l'intelligence d'Hamilton ; il disait avec affabilité qu'il n'avait jamais connu que deux hommes qui lui eussent donné un sentiment d'infériorité, Coleridge et Hamilton.

Hamilton ne fit la connaissance de Coleridge que vers 1832, alors que le poète n'était plus autre chose que la contrefaçon d'un médiocre métaphysicien allemand. Néanmoins chacun se fit une haute idée des capacités de l'autre, car Hamilton avait longtemps étudié Kant avec ferveur dans l'original ; les spéculations philosophiques en général le séduisaient, et une fois il se déclara partisan convaincu (par le cerveau, mais non par l'estomac) de l'idéalisme dévitalisé de Berkeley. Un autre lien entre Hamilton et Coleridge était leur souci commun du côté théologique de la philosophie (si tant est que ce côté existe) et Coleridge gratifiait Hamilton de ses méditations indigestes sur la Sainte Trinité, auxquelles le mathématicien dévot attachait un grand prix.

La fin de la carrière d'étudiant d'Hamilton au Trinity College fut encore plus fabuleuse que son début ; en fait, elle est unique dans les annales universitaires. Le Dr Brinkley avait donné sa démission de professeur d'astronomie pour devenir évêque de Cloyne ; selon la coutume anglaise, la vacance fut publiée et plusieurs astronomes distingués, y compris George Biddell Airy (1801-1892), plus tard "Astronome Royal d'Angleterre", se mirent sur les rangs. Après discussion, le Conseil écarta toutes les candidatures et désigna à l'unanimité Hamilton, âgé alors (1827) de vingt-deux ans et pas même licencié. Maintenant "droit devant lui la voie d'or était ouverte", et Hamilton résolut de ne pas décevoir les espérances de son enthousiaste jury. Dès l'âge de quatorze ans, il avait eu une vraie passion pour l'astronomie ; une fois, comme enfant, il avait désigné l'observatoire juché sur sa colline de Dunsink et dominant un panorama magnifique, comme la place entre toutes où il aimerait vivre s'il était libre de choisir. Et maintenant, à vingt-deux ans, son ambition était satisfaite il n'avait plus qu'à marcher droit devant lui.

Et il fit un brillant départ. Hamilton n'était pas un astronome pratique et son aide-observateur n'était pas très capable ; du reste, en raison de sa situation, l'observatoire de Dunsink n'a jamais pu faire figure bien importante dans l'astronomie moderne ; mais ce n'était pas là de sérieux désavantages, et Hamilton fit sagement en appliquant ses plus grands efforts aux mathématiques. À vingt-trois ans, il publia le complément de la curieuse découverte qu'il avait faite à dix-sept ans, la première partie d'*Une Théorie des Systèmes de rayons*, ce grand ouvrage classique qui est pour l'optique ce que la *Mécanique analytique* de Lagrange est pour la mécanique et qu'Hamilton lui-même devait étendre à la dynamique, donnant ainsi à cette science fondamentale sa forme parfaite et peut-être ultime.

La technique que, dans cette première œuvre maîtresse, Hamilton a introduite en mathématiques appliquées, est aujourd'hui indispensable en physique mathématique et, dans certaines branches de la physique théorique, nombre de chercheurs s'efforcent de condenser l'ensemble d'une théorie dans un principe d'Hamilton. C'est cette œuvre magnifique qui a fait, quatorze ans plus tard, déclarer à Jacobi, au Congrès de l'Association Britannique à Manchester en 1842 : "Hamilton est le Lagrange de votre pays (parlant des pays de langue anglaise)." Comme Hamilton a pris lui-même la peine d'exposer, en termes compréhensibles pour les profanes, l'essence de ses nouvelles méthodes, nous citerons le texte même qu'il a présenté le 23 avril 1827 à l'Académie Royale d'Irlande :

"Un rayon, en optique, sera considéré ici comme une ligne droite, infléchie ou courbe, le long de laquelle la lumière se propage, et un Système de rayons comme une collection ou un agrégat de lignes de cette nature, réunies par quelque lien commun, quelque similitude d'origine ou de production, en un mot quelque unité optique. Ainsi, les rayons qui divergent d'un point lumineux constituent un système optique et, après s'être réfléchis sur un miroir, en constituent un autre. L'étude de ce système de rayons consiste à examiner les relations géométriques des rayons d'un système dont nous connaissons (comme dans les cas simples ci-dessus) l'origine optique et l'histoire, et à déterminer comment ils sont disposés entre eux, comment ils divergent, convergent ou sont parallèles, quelles surfaces ou courbes ils touchent ou coupent et sous quels angles, comment ils peuvent se combiner en faisceaux partiels, et comment chaque rayon en particulier peut se déterminer et se distinguer de tout autre. Et généraliser cette étude d'un système, de manière à pouvoir passer, sans changement de plan, à l'étude d'autres systèmes, à assigner des règles générales et une méthode générale permettant de grouper et d'harmoniser ces arrangements optiques séparés, c'est établir une Théorie des systèmes de rayons. Enfin, faire tout cela de manière à utiliser toutes les ressources de la mathématique moderne, en remplaçant les chiffres par des fonctions et les diagrammes par des formules, c'est édifier une théorie algébrique de ces systèmes ou une Application de l'algèbre à l'optique. En vue de cette édification, il est naturel, ou plutôt nécessaire, d'employer la méthode introduite par Descartes pour l'application de l'algèbre à la géométrie. Ce grand philosophe mathématicien a conçu la possibilité, et appliqué le procédé, de représenter ou d'exprimer algébriquement la position de tout point de l'espace par trois nombres coordonnés qui indiquent respectivement la distance du point considéré, suivant trois directions rectangulaires (telles que nord, est, ouest), à un point fixe, ou origine, spécialement choisi ou admis ; les trois dimensions de l'espace reçoivent ainsi leurs trois équivalents algébriques, leurs conceptions et symboles appropriés dans la science générale de la progression (de l'ordre). Un plan ou une surface courbe devient ainsi définie algébriquement en lui assignant comme équation la relation, commune à tous ses points, qui relie les trois coordonnées d'un de ses points quelconques, et toute ligne, droite ou courbe, est exprimée d'après la même méthode en assignant deux relations de cette nature, correspondant à deux surfaces dont la ligne peut être considérée comme l'intersection. De cette manière, il est devenu possible de poursuivre des recherches générales concernant les surfaces et les courbes, et de découvrir leurs propriétés communes, au moyen d'investigations générales portant sur des équations à trois variables ; tout problème de géométrie put ainsi être au moins exprimé algébriquement, sinon résolu immédiatement, et tout perfectionnement ou toute découverte en algèbre devinrent susceptibles d'application ou d'interprétation en géométrie. Les sciences de l'espace et du temps (pour adopter ici un aspect de l'algèbre que je me suis risqué à proposer ailleurs) sont devenues intimement liées et indissolublement unies l'une à l'autre. Désormais, il fut presque impossible de perfectionner l'une sans faire progresser l'autre. Le problème de mener des tangentes aux courbes a conduit à la découverte des fluxions ou différentielles ; les problèmes de la rectification et de la quadrature ont amené à l'inversion des fluentes ou intégrales ; l'étude des courbures des surfaces a exigé le calcul des différentielles partielles ; les problèmes isopérimètriques ont abouti au calcul des variations. Et réciproquement, tous ces grands progrès dans la science algébrique ont eu immédiatement leur application en géométrie, et ont conduit à la découverté de nouvelles relations entre points, lignes et surfaces. Mais même si les applications de la méthode en question n'avaient pas été aussi importantes et aussi multiples, il en eût découlé une haute jouissance intellectuelle rien qu'à la méditer en tant que méthode.

"La première application importante de cette méthode algébrique des coordonnées à l'étude des systèmes optiques a été faite par Malus, officier du génie français de l'armée de Napoléon en Égypte, qui s'est acquis quelque célébrité dans l'histoire de l'optique physique par sa découverte de la polarisation de la lumière par réflexion ; Malus présenta à l'Institut de France, en 1807, un travail mathématique profond, du genre auquel je viens de faire allusion, et intitulé Traité d'Optique. Voici quelle est la méthode employée dans ce traité : la direction d'un rayon rectiligne de tout système optique final étant considérée comme dépendant de la position d'un point déterminé du rayon, d'après une loi qui caractérise le système particulier et le distingue d'autres, cette loi peut s'exprimer algébriquement en assignant trois expressions aux trois coordonnées de quelque autre point du rayon, comme fonctions des trois coordonnées du point proposé. Malus introduit en conséquence des symboles généraux désignant ces trois fonctions (ou au moins trois fonctions équivalentes), et arrive à tirer plusieurs conclusions générales importantes, par des calculs très compliqués, mais symétriques. Plusieurs de ces conclusions, avec beaucoup d'autres, ont été aussi obtenues plus tard par moi lorsque, par une méthode analogue, sans connaître les travaux de Malus, j'ai commencé mes propres tentatives d'appliquer l'algèbre à l'optique. Mais mes recherches m'ont bientôt conduit à substituer à la méthode de Malus une méthode toute différente et, comme je crois l'avoir prouvé, bien plus appropriée à l'étude des systèmes optiques ; par ma méthode, au lieu d'employer les trois fonctions ci-dessus, ou tout au moins leurs deux rapports, il suffit d'employer une seule fonction, que j'appelle caractéristique ou principale. Ainsi, tandis que Malus a fait ses déductions en partant de deux équations d'un rayon, j'établis et j'emploie une seule équation du système.

"La fonction que j'ai introduite dans ce but et dont j'ai fait la base de ma méthode de déduction en optique mathématique s'était déjà présentée, dans une autre relation, aux anciens auteurs comme exprimant le résultat d'une haute et vaste induction dans cette science. Ce résultat bien connu s'appelle habituellement la loi de moindre action, mais quelquefois aussi principe du moindre temps [voir le chapitre de Fermat], et comprend tout ce qui a été découvert jusqu'à présent au sujet des règles qui déterminent les formes et les positions des lignes suivant lesquelles se propage la lumière, et les changements de direction de ces lignes produits par réflexion ou par réfraction, ordinaire ou extraordinaire [cette dernière lorsqu'il s'agit d'un cristal à double réfraction, par exemple le spath d'Islande, dans lequel un rayon unique se partage en entrant dans le cristal, en deux, réfractés tous les deux]. On trouve qu'une certaine quantité, qui dans une théorie est l'action et dans une autre le temps, employée par la lumière pour aller d'un premier à un second point, est moindre que si la lumière avait suivi tout autre trajet, ou du moins que ce qu'on appelle techniquement sa variation est nul, les extrémités du trajet restant les mêmes. La nouveauté mathématique de ma méthode réside dans le fait que cette quantité est considérée comme une fonction des coordonnées de ces extrémités, qui varie lorsqu'elles varient, selon une loi que j'ai appelée loi d'action variable, en réduisant toutes les recherches concernant les systèmes optiques de rayons à l'étude de cette seule fonction ; cette réduction présente l'optique mathématique sous un jour entièrement nouveau et analogue, me semble-t-il, à celui sous lequel Descartes a présenté l'application de l'algèbre à la géométrie."

Il n'y a rien à ajouter à cet exposé d'Hamilton, sauf peut-être la remarque qu'aucune science, pour si bien qu'elle soit exposée, ne se comprend aussi facilement qu'un roman, pour si mal écrit qu'il soit. Toute la citation ci-dessus mérite une deuxième lecture.

Dans cette grande œuvre concernant les systèmes de rayons, Hamilton a érigé un monument supérieur à tout ce qu'il a pu prévoir. Presque exactement cent ans après la rédaction de l'exposé précité, on a constaté que les méthodes introduites par Hamilton en optique étaient exactement celles dont on avait besoin dans la mécanique des ondes associée à la théorie moderne des quanta et à la théorie de la structure atomique. On peut rappeler que Newton avait été le promoteur d'une théorie corpusculaire de la lumière, alors que Huyghens et ses successeurs presque jusqu'à nos jours cherchaient à expliquer les phénomènes lumineux entièrement au moyen d'une théorie d'ondes. Ces deux points de vue ont été unifiés et, dans un sens purement mathématique, rendus compatibles dans la théorie moderne des quanta qui a vu le jour vers 1925-1926. En 1834, à l'âge de vingt-huit ans, Hamilton a réalisé son ambition d'étendre à l'ensemble de la mécanique les principes qu'il avait introduits en optique.

La théorie des rayons de Hamilton a remporté, dès sa publication, alors que son auteur n'avait que vingt-sept ans, un des succès les plus rapides et les plus éclatants que les annales des mathématiques aient jamais enregistrés. Cette théorie se proposait de traiter les phénomènes de l'univers physique réel tels qu'on les observe dans la vie journalière et dans les laboratoires. Toute théorie mathématique incapable de prédictions que l'expérience vérifie plus tard, ne vaut pas mieux qu'un dictionnaire concis de son contenu, et, presque à coup sûr, elle sera supplantée en peu de temps par une vue plus imaginative qui ne révélera pas du premier coup d'œil tout ce qu'elle signifie. Parmi les prédictions célèbres qui ont confirmé la valeur de théories vraiment mathématiques dans la science physique, nous citerons les trois suivantes : la découverte, par les mathématiques, de John Couch Adams (1819-1892) et d'Urbain Jean Joseph Leverrier (1811-1877) de la planète Neptune, indépendamment et presque simultanément, en 1845, par l'analyse des perturbations de la planète Uranus d'après la loi newtonienne de la gravitation ; la prédiction mathématique des ondes sans fil par James Clerk Maxwell (1831-1879), en 1864, comme conséquence de sa théorie électromagnétique de la lumière, et enfin la prédiction d'Einstein en 1915-16, partant de sa théorie de la relativité généralisée, d'une déviation du rayon lumineux dans un champ de gravitation, d'abord confirmée par les observations de l'éclipse solaire historique du 29 mai 1919, et sa deuxième prédiction, tirée aussi de sa théorie, que les raies spectrales d'un faisceau lumineux émanant d'un corps massif sont déplacées d'une certaine quantité, mesurée par Einstein, vers l'extrémité rouge du spectre, prédiction également confirmée. Les deux derniers exemples, c'est-à-dire les prédictions de Maxwell et d'Einstein, sont d'un ordre différent du premier ; toutes trois ont prédit, mathématiquement, des phénomènes totalement inconnus et non prévus, ces prédictions sont qualitatives ; celles de Maxwell et d'Einstein se complètent par des prédictions quantitatives précises qui excluent toute objection de divination fortuite une fois qu'elles ont été vérifiées par l'expérience.

La prédiction d'Hamilton au sujet de ce qu'il a appelé la réfraction conique en optique a également le double caractère qualitatif et quantitatif ; s'appuyant sur sa théorie des systèmes de rayons, il a prédit mathématiquement que l'on constaterait un phénomène entièrement insoupçonné en relation avec la réfraction de la lumière dans les cristaux bi-axiaux ; en mettant la dernière main au troisième supplément à son mémoire sur les rayons, il fut lui-même surpris d'une découverte qu'il expose ainsi :

"La loi de la réflexion de la lumière sur les miroirs ordinaires semble avoir été connue d'Euclide, celle de la réfraction ordinaire par une surface d'eau, de verre, ou de tout autre milieu non cristallin, a été découverte bien plus tard par Snellius ; Huyghens a découvert, et Malus a confirmé, la loi de la réfraction extraordinaire produite par les cristaux mono-axiaux, comme le spath d'Islande ; enfin, la loi de la double réfraction sur les faces des cristaux bi-axiaux, comme la topaze et l'aragonite, a été trouvée de notre temps par Fresnel. Mais même dans ces cas de réfraction extraordinaire ou cristalline, on n'a jamais observé plus de deux rayons réfractés, ni même soupçonné leur existence si nous en exceptons une théorie de Cauchy qu'il pourrait exister un troisième rayon, bien que probablement imperceptible à nos sens. Cependant le professeur Hamilton, en étudiant par sa méthode générale les conséquences de la loi de Fresnel, a été amené à conclure qu'il doit y avoir dans certains cas, qu'il a déterminés, non pas seulement deux, ou trois, ou un nombre quelconque fini de rayons, mais un nombre infini, c'est-à-dire un cône de rayons réfractés à l'intérieur d'un cristal bi-axial, correspondant à un seul rayon incident et en résultant ; il a trouvé aussi que dans certains autres cas, un rayon unique à l'intérieur d'un tel cristal devrait donner naissance à un nombre infini de rayons émergents disposés suivant un autre cône. Il a été conduit, par conséquent, à prévoir, comme conséquence de sa théorie, deux nouvelles lois de la lumière, auxquelles il a donné les noms de réfraction conique interne et réfraction conique externe."

Cette prédiction et sa vérification expérimentale par Humphrey Lloyd suscitèrent une admiration sans bornes à l'égard du jeune Hamilton, de la part de ceux qui pouvaient apprécier son œuvre. Airy, son ancien concurrent à la chaire d'astronomie, appréciait comme suit l'œuvre d'Hamilton : "Cette prédiction est peut-être la plus remarquable qui ait jamais été faite." Quant à Hamilton lui-même, il la considérait, ainsi que toute prédiction similaire, comme "un résultat subordonné et secondaire", comparé au grand objectif qu'il avait en vue : "introduire l'harmonie et l'unité dans les méditations et les raisonnements de l'optique, considérée comme une branche de la science pure."

Selon quelques-uns la carrière d'Hamilton avait atteint, avec ce succès spectaculaire, le niveau de ses plus hautes eaux ; après sa grande œuvre en optique et en dynamique, le flot commença à baisser. D'autres, cependant, en particulier les membres de ce qu'on a appelé la "grande église des quaternions", soutiennent que le plus grand chef-d'œuvre d'Hamilton était encore à venir, entendant par là ce qu'Hamilton lui-même considérait comme son vrai titre à l'immortalité, sa théorie des quaternions. Avant d'aborder celle-ci, disons simplement que, de sa vingt-septième année à sa mort, deux malheurs ravagèrent la carrière scientifique d'Hamilton, son mariage et l'alcool, ce dernier étant, en partie, la conséquence du premier.

Après une deuxième liaison amoureuse rompue à la suite d'une remarque irréfléchie de sa fiancée qui ne signifiait rien, mais que ce soupirant hypersensible avait prise à cœur, il épousa, au printemps de 1833, sa troisième flamme, Hélène Bayley, fille de la veuve d'un pasteur ; il avait alors vingt-huit ans. Hélène était "d'un extérieur agréable et lui avait fait d'emblée une impression favorable par sa nature franche et par les principes religieux qu'il lui connaissait ; cependant aucune beauté du visage ni aucune vivacité d'intelligence ne venaient compléter ces premières qualités". Mais une sotte peut dire la vérité et si la franchise est l'unique qualité d'une sotte, celui qui l'épouse ne tardera pas à le regretter. Au cours de l'été de 1832, Mlle Bayley "fut gravement malade... cet événement agit sans doute sur ses sentiments [ceux d'Hamilton] envers elle, par le tourment qu'il lui causa et, arrivant à un moment où il venait de rompre avec celle qu'il désirait, prépara les voies à des sentiments plus tendres et plus chauds." Bref, Hamilton fut vraiment la proie d'une femme souffrante sur le point de devenir à moitié invalide pour le restant de ses jours et qui, soit par incompétence, soit par raison de santé, laissait les négligents domestiques de son mari mener la maison à leur guise, et le bureau de son mari, en particulier, devenir une véritable porcherie. Il aurait fallu à Hamilton une femme ayant l'énergie de le tenir lui et sa maison en ordre ; au lieu de cela il eut en partage une femmelette.

Jeune homme, Hamilton était fêté, convié à de nombreux festins, et il se laissait volontiers entraîner, d'autant plus que sa facilité de parole, son entrain et sa sociabilité étaient naturellement stimulés par quelques verres. Après son mariage, l'irrégularité ou même l'absence des repas, et son habitude de travailler douze à quatorze heures d'affilée, le poussèrent à chercher une compensation dans la dive bouteille.

C'est une question encore controversée de savoir si l'usage modéré de l'alcool accélère ou ralentit la faculté d'invention mathématique ; tant qu'on n'aura pas, pour trancher la question, réuni une série complète d'expériences contrôlées, le doute subsistera, comme dans toute autre recherche biologique. Si, comme certains l'assurent, l'inspiration poétique et la création mathématique sont parentes, il n'est nullement évident qu'un usage raisonnable de l'alcool (si tant est que cet usage puisse être raisonnable) fasse du tort à l'esprit de découverte en mathématiques, et en fait, de nombreux exemples dûment attestés indiqueraient le contraire. Pour les poètes, bien entendu, "vin et chanson" vont de pair, et dans un cas au moins, celui de Swinburne, sans le premier, la seconde aurait été bien vite à sec. Les mathématiciens ont souvent constaté la tension terrible provoquée par la concentration prolongée sur une difficulté, et il en est qui ont éprouvé un réconfort incontestable dans la détente apportée par la boisson. Mais le pauvre Hamilton avait vite dépassé cette étape et n'avait plus de retenue non seulement dans l'intimité privée de son cabinet mais même en public ; un jour, il arriva complètement ivre à un banquet de savants. Réalisant ce qui lui était arrivé, il résolut de ne plus jamais toucher d'alcool, et tint sa promesse pendant deux ans ; mais ensuite, au cours d'une réunion scientifique chez lord Rosse, qui possédait le télescope le plus grand et le plus inutile de l'époque, l'ancien rival d'Hamilton, Airy, le plaisanta sur son régime à l'eau, il céda et, là dessus, s'offrit tout ce qu'il voulait, ce qui était plus qu'assez. Il n'en continua pas moins ses grands travaux en mathématiques, mais il est probable que sans cela il serait allé plus loin et plus haut ; cependant, il a suffisamment produit pour que nous laissions la morale aux moralistes.

Avant d'examiner ce qu'Hamilton a considéré comme son chef-d'œuvre, disons un mot des honneurs qui lui ont été décernés. À trente ans, il occupa des fonctions importantes au Congrès de l'Association Britannique pour l'Avancement des Sciences à Dublin, et à cette occasion le "Lord Lieutenant" lui donna l'accolade rituelle après l'avoir frappé sur les deux épaules du glaive de l'État, en lui disant : "À genoux, professeur Hamilton" et "Relève-toi, Sir William Rowan Hamilton" ; ce fut une des rares occasions de la vie d'Hamilton où il ne trouva rien à dire. À trente-deux ans, il devint président de l'Académie Royale Irlandaise, et à trente-huit il reçut du Gouvernement Britannique, sur la liste civile, une pension à vie de deux cents livres, sous le ministère de Sir Robert Peel, l'ami récalcitrant de l'Irlande ; peu de temps auparavant, Hamilton avait fait sa découverte capitale, les quaternions. Mais la récompense honorifique qui lui fit le plus de plaisir fut celle qu'il reçut à son lit de mort, le titre de premier membre étranger de l'Académie Nationale des Sciences des États-Unis, fondée pendant la Guerre de Sécession : cet honneur lui fut décerné surtout en raison de son œuvre sur les quaternions, qui, pour quelqu'insondable raison, souleva l'enthousiasme des mathématiciens américains de l'époque (il n'y en avait qu'un ou deux seulement, Benjamin Peirce, de Harward, en tête) plus profondément qu'aucune œuvre anglaise de mathématiques depuis les *Principes* de Newton. Cette popularité rapide des quaternions aux États-Unis a quelque chose de mystérieux ; peut-être le style ampoulé des "Lectures on Quaternions" flattait-il le goût d'une nation jeune et vigoureuse, devant surmonter maintenant son penchant maladif pour l'éloquence sénatoriale et les feux d'artifice oratoires du Quatre Juillet.

L'histoire des quaternions est trop longue pour être contée entièrement ici ; déjà Gauss, en 1817, n'était pas le premier qui s'en fût occupé ; Euler l'avait précédé, avec un résultat isolé qui s'interprète le plus simplement au moyen des quaternions ; et leur origine doit remonter encore plus loin en arrière, puisqu'Auguste de Morgan offrit un jour à Hamilton, en plaisantant à moitié, de lui retracer toute leur histoire depuis les anciens Hindous jusqu'au règne de la reine Victoria. Nous nous contenterons ici de jeter un coup d'œil sur la part du lion que s'est taillée Hamilton dans cette théorie et sur ce qui la lui a inspirée. L'école anglaise d'algèbre, comme on le verra au chapitre de Boole, a donné, dans la première moitié du XIXe siècle, des bases solides à l'algèbre courante ; devançant le procédé partout adopté maintenant de traiter chaque branche des mathématiques avec rigueur et circonspection, elle a fondé l'algèbre sur des postulats. Auparavant, on faisait fonctionner les différentes sortes de "nombres", fractions, nombres négatifs, irrationnels, qui sont entrés dans les mathématiques lorsqu'on a admis que toutes les équations algébriques avaient des racines, exactement sur le même pied que les nombres entiers positifs usuels, si rebattus par l'habitude que tous les mathématiciens les considéraient comme "naturels" et, dans un certain sens vague, d'une compréhension complète ; or, ils ne le sont pas même aujourd'hui comme on le verra dans notre étude sur Cantor. Cette foi naïve dans la valeur intrinsèque d'un système fondé sur la jonglerie aveugle et formaliste des symboles mathématiques peut avoir été sublime, mais elle était un peu stupide. Le maximum de cette crédulité a été marqué par le fameux principe de la permanence de forme ; d'après ce principe, toute série de règles qui donne des résultats constants pour une catégorie de nombres, par exemple pour les entiers positifs, continuera à être valable pour n'importe quelle autre catégorie, par exemple les imaginaires, même lorsqu'aucune interprétation des résultats n'est évidente. Il n'est pas étonnant que cette foi en l'inviolabilité de symboles vides de sens ait fréquemment conduit à des absurdités.

L'école anglaise a changé tout cela, mais n'a pas été capable de franchir le dernier pas et de démontrer que ses postulats pour l'algèbre ordinaire ne conduiront jamais à une contradiction. Ce pas n'a été franchi que par les Allemands de notre génération qui ont travaillé les fondements des mathématiques. Dans cet ordre d'idées, on ne doit pas oublier que l'algèbre ne traite que des processus finis ; quand on passe à l'infini, par exemple quand on fait la somme des termes d'une série infinie, on sort du domaine de l'algèbre ceci est à retenir, parce que les éléments qu'on appelle habituellement "algèbre" contiennent beaucoup de choses, par exemple les progressions géométriques infinies, qui ne sont pas de l'algèbre, au sens moderne du mot.

La nature de l'œuvre d'Hamilton dans sa création des quaternions nous apparaîtra plus clairement lorsque nous l'aurons confrontée avec un groupe de postulats intéressant l'algèbre ordinaire (nous les empruntons à *Algebras and their Arithmetics*, Chicago, 1923, de L. E. Dickson), ou, comme on dit en langage technique, avec un corps (les Anglais disent field, en français champ, ou quelquefois corpus ; équivalent de l'allemand Körper). "Un corps F est un système comprenant une série S d'éléments $a, b, c, ...$ et deux opérations, appelées addition et multiplication pouvant s'exécuter sur deux éléments (distincts ou égaux) a et b, de S, pris dans cet ordre, pour produire des éléments déterminés uniquement $a \oplus b$ et $a \odot b$ de S, de telle manière que les postulats I à V ci-après soient satisfaits. Pour simplifier, nous écrirons ici $a + b$ au lieu de $a \oplus b$, et ab au lieu de $a \odot b$, et nous appellerons ces deux quantités somme et produit, respectivement, de a et b ; en outre, les éléments de S seront appelés éléments de F.

I. Si a et b sont deux éléments quelconques de F, $a + b$ et ab sont des éléments déterminés de façon unique de F, et

$$b + a = a + b \qquad ba = ab,$$

II. Si a, b, c, sont trois éléments de F, on a :

$$(a+b)+c = a+(b+c) \qquad (ab)c = a(bc) \qquad a(b+c) = ab+ac$$

III. Dans F il existe deux éléments distincts, désignés par $0, 1$, tels que si a est un élément quelconque de F, $a+0 = a, a1 = a$ (d'où $0+a = a, 1a = a$, d'après le postulat I).

IV. Quelque soit l'élément a de F, il existe en F un élément x tel que $a+x = 0$ (d'où $x+a = 0$ d'après I).

V. Quelque soit l'élément a (différent de 0), il existe en F un élément y tel que $ay = 1$ (d'où $ya = 1$).

De ces simples postulats découle toute l'algèbre ordinaire. Quelques explications sur ces énoncés aideront les lecteurs qui ont oublié l'algèbre. Dans II, la loi $(a+b)+c = a+(b+c)$, appelée loi associative d'addition, signifie que si l'on ajoute b à a et qu'à cette somme on ajoute c, le résultat est le même que si l'on ajoute à a la somme de b et de c ; il en est de même pour la multiplication, c'est le second énoncé de II ; le troisième énoncé de II s'appelle la loi distributive. Dans III, on postule le zéro et l'unité. Dans IV, l'élément a donne le négatif de a, et la première parenthèse de V interdit la division par zéro. Les conditions posées par I s'appellent lois commutatives d'addition et de multiplication.

Ce groupe de postulats peut être considéré comme le produit de distillation de l'expérience. Ce sont des siècles de recherches sur les nombres, et de résultats utiles obtenus par les règles de l'arithmétique (auxquelles on est arrivé empiriquement) qui ont suggéré la plupart des règles réunies dans ces postulats précis ; mais, une fois qu'on a saisi les suggestions de l'expérience, on supprime ou omet délibérément l'interprétation (ici l'arithmétique ordinaire) fournie par l'expérience, et le système défini par les postulats est développé abstraitement, en lui-même, par la logique commune additionnée du sens mathématique.

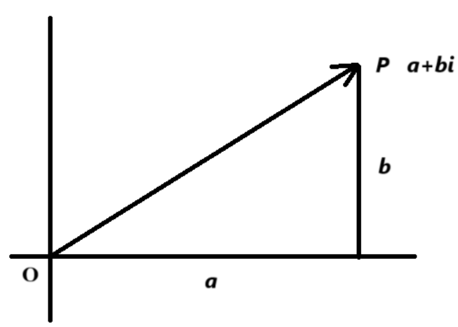
Notons en particulier le postulat IV qui postule l'existence des nombres négatifs ; nous n'essayons pas de déduire l'existence de ces nombres du comportement des nombres positifs. Lorsque les nombres négatifs ont apparu d'abord dans l'expérience comme des débits au lieu de crédits, on les a considérés, en tant que nombres, comme des monstruosités en dehors de la nature ; il en a été de même plus tard des nombres imaginaires $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}$..., résultant de la résolution formelle d'équations telles que $x^2+1 = 0, x^2+2 = 0$, etc. Si le lecteur veut bien relire ce que Gauss a fait pour les nombres complexes, il appréciera mieux encore la simplicité absolue de l'exposé partiel qui va suivre de la façon originale dont Hamilton dépouille les “imaginaires” de leur mystère bête et purement imaginaire. Cette simple explication, est un des échelons qui ont conduit Hamilton à ses quaternions, bien qu'à proprement parler cela n'ait rien à voir avec eux. C'est la méthode et le point de vue, dont procède cette ingénieuse refonte de l'algèbre des nombres complexes, qui sont d'importance pour la suite.

Si, selon l'usage, i représente $\sqrt{-1}$, un “nombre complexe” est un nombre du type $a+bi$, où a et b sont des “nombres réels”, ou, si l'on préfère, et d'une manière plus générale, des éléments du corps F défini par les postulats ci-dessus. Au lieu de considérer $a+bi$ comme un “nombre”, Hamilton l'a conçu comme un couple ordonné de “nombres”, et il a désigné ce couple en l'écrivant (a, b).

Il a ensuite appliqué les définitions de somme et de produit à ces couples, telles que le suggèrent les règles formelles de combinaison extraites de l'expérience des algébristes dans le maniement des nombres complexes, comme si les lois de l'algèbre usuelle étaient effectivement valables par elles-mêmes. Voici un avantage de cette nouvelle manière d'aborder les nombres complexes : les définitions de somme et de produit des couples sont considérées comme étant des cas particuliers, des exemples, des définitions générales abstraites de somme et de produit en tant que dans un corps. Par conséquent, si la solidité du système défini par les postulats est démontrée pour un corps, il en est de même, sans autre démonstration, pour les nombres complexes et les règles usuelles de leurs combinaisons ; il suffira d'établir les définitions de somme et de produit dans la théorie des nombres complexes d'Hamilton considérés comme couples $(a, b), (c, d)$, etc.

La somme de (a, b) et (c, d) est $(a + b, c + d)$, leur produit est $(ac - bd, ad + bc)$; ici, le signe $-$ est tel qu'il est dans un corps, à savoir : l'élément x postulé dans IV est représenté par $-a$; aux 0.1 d'un corps correspondent ici les couples $(0, 0), (1, 0)$. Avec ces définitions, on voit aisément que les couples d'Hamilton satisfont à tous les postulats posés pour un corps. Mais ils sont d'accord aussi avec les règles formelles du maniement des nombres complexes : ainsi, à $(a, b), (c, d)$ correspondent respectivement $a + bi, c + di$, et la somme formelle de ceux-ci est $(a + c) + i(b + d)$, auquel correspond le couple $(a + c, b + d)$. De même, la multiplication formelle de $a + bi$ par $c + id$ donne $(ac - bd) + i(ad + bc)$, à quoi correspond le couple $(ac - bd, ad + bc)$. Si tout ceci est nouveau pour quelque lecteur, il fera bien de le repasser une seconde fois, car c'est un exemple de la manière dont les mathématiques modernes éliminent tout mystère. Tant qu'il subsiste un lambeau de mystère attaché à quelque concept, ce concept n'est pas mathématique.

Ayant remplacé les nombres complexes par des couples, Hamilton a cherché à étendre son système à des ternes et quaternes. Si l'on n'a pas quelque idée du but qu'il poursuivait, pareille entreprise est évidemment vague au point d'être même vide de sens. L'objectif d'Hamilton était d'inventer une algèbre qui ferait pour les rotations dans l'espace à trois dimensions ce que les nombres complexes, ou ses couples, font pour les rotations dans l'espace à deux dimensions, ces deux espaces étant les espaces euclidiens de la géométrie élémentaire. Or un nombre complexe $a + bi$ peut être considéré comme représentant un vecteur, c'est-à-dire un segment de droite ayant à la fois longueur et direction, comme on le voit sur la figure, où le segment de droite marqué d'une flèche représente le vecteur OP.



Mais en essayant de symboliser la manière dont se comportent les vecteurs dans l'espace à trois dimensions, en vue de conserver les propriétés des vecteurs en usage dans la physique, en particulier dans les rotations, Hamilton s'est trouvé arrêté pendant des années par une difficulté imprévue dont, il n'avait longtemps pas même soupçonné la vraie nature. Jetons un coup d'œil sur une des conceptions qui l'ont guidé. Le plus remarquable, c'est que cela l'ait conduit quelque part (comme il a affirmé que tel fut le cas), car c'est, maintenant, à peu près généralement considéré, comme une absurdité, ou du moins comme une spéculation métaphysique sans aucun fondement dans l'histoire ou l'expérience mathématique.

Objectant au mode purement abstrait de formuler les postulats de l'algèbre adopté par ses contemporains anglais, Hamilton a cherché à fonder une algèbre sur quelque chose de "plus réel", et, pour cette entreprise vraiment dépourvue de sens, il est allé chercher ce qu'il savait des idées erronées de Kant (condamnées par la création de la géométrie non-euclidienne) sur l'espace, comme "pure forme de la perception des sens". En effet, Hamilton, qui paraît n'avoir rien su de la géométrie non-euclidienne, a adopté l'idée de Kant que "temps et espace sont deux sources de connaissance dont on peut tirer diverses notions synthétiques a priori, ce dont les mathématiques pures donnent un splendide exemple dans le cas de notre notion d'espace et de ses diverses relations. Puisque le temps et l'espace sont de pures formes de la perception des sens, ils rendent des propositions synthétiques a priori possibles". Tout mathématicien, à moins qu'il ne soit complètement illettré, sait aujourd'hui que Kant s'est trompé dans cette conception des mathématiques ; mais vers 1840, alors qu'Hamilton était sur la voie des quaternions, la philosophie kantienne faisait foi pour ceux qui ne savaient rien de Lobatchewsky, c'est-à-dire presque pour tous. C'est en jouant en quelque sorte sur les mots qu'Hamilton a appliqué la doctrine de Kant à l'algèbre, en en tirant la conclusion remarquable que voici : puisque la géométrie est la science de l'espace, et que le temps et l'espace sont de "pures formes de la perception", tout le reste des mathématiques doit concerner le temps ; et, partant de là, il perdit une bonne partie du sien à élaborer cette doctrine bizarre que l'algèbre est la science du temps pur.

Cette étrange lubie a séduit plus d'un philosophe et tout récemment elle a été exhumée et solennellement disséquée par de graves métaphysiciens qui cherchaient la pierre philosophale dans la vésicule biliaire des mathématiques. C'est précisément parce que "l'algèbre, science du temps pur" n'a pas la moindre signification mathématique que l'on continuera à en discuter avec passion jusqu'à la fin des temps. Il peut être intéressant de connaître l'opinion d'un grand mathématicien sur cet aspect de "temps pur" de l'algèbre : "Je ne peux trouver aucune connexion de l'algèbre avec la notion de temps (c'est Cayley qui parle) tout en concédant que la notion de progression continue se présente et a de l'importance, je ne vois pas qu'elle soit d'aucune manière la notion fondamentale de la science".

Les difficultés qu'éprouva Hamilton dans son essai de construction d'une algèbre de vecteurs et de rotations dans l'espace à trois dimensions prenaient leur source dans sa conviction subconsciente que les lois les plus importantes de l'algèbre ordinaire devaient persister dans l'algèbre qu'il cherchait. Comment faire pour multiplier entre eux les vecteurs dans l'espace à trois dimensions ?

Pour saisir la difficulté du problème, il est essentiel de bien comprendre (voir le chapitre de Gauss) que les nombres complexes ordinaires $a + bi \quad (i = \sqrt{-1})$ avaient été l'objet d'une interprétation simple au moyen de rotations dans un plan, et, en outre, que les nombres complexes obéissent à toutes les règles de l'algèbre ordinaire, en particulier à la loi commutative de multiplication ; si A, B, sont des nombres complexes quelconques, on a $A \times B = B \times A$, que A et B soient interprétés algébriquement ou comme rotations dans un plan ; mais il était humain de présumer que la même loi commutative serait valable pour les généralisations des nombres complexes que représentent les rotations dans l'espace à trois dimensions. Or, la grande découverte, ou invention, d'Hamilton a été une algèbre (une des algèbres "naturelles" des rotations dans l'espace à trois dimensions), dans laquelle la loi commutative de multiplication n'est pas valable. Dans cette algèbre de quaternions (c'est ainsi qu'il a appelé son invention), on rencontre une multiplication dans laquelle $A \times B$ n'est pas égal à $B \times A$, mais à moins $B \times A$, c'est-à-dire $A \times B = -B \times A$.

Le seul fait d'avoir pu établir un système d'algèbre pratique et conséquent qui n'obéit pas à la loi commutative de multiplication, était une découverte de premier ordre, comparable peut-être à la conception de la géométrie non-euclidienne. Hamilton lui-même fut tellement impressionné de ce qui germa soudainement dans son esprit un jour (après quinze ans de méditation sans résultat), le 16 octobre 1863, au cours d'une promenade avec sa femme, qu'il grava les formules fondamentales de la nouvelle algèbre sur le parapet du pont où il se trouvait à ce moment. Sa grande découverte montra la voie à suivre pour établir d'autres systèmes d'algèbre et aujourd'hui, suivant la directive d'Hamilton, les mathématiciens fabriquent des algèbres pratiquement à volonté en supprimant un ou plusieurs des postulats d'un corps et en en développant les conséquences ; certaines de ces algèbres sont extrêmement utiles ; les théories générales, qui en embrassent des essaims, contiennent la grande invention d'Hamilton comme un simple détail, encore qu'extrêmement important.

De pair avec les quaternions d'Hamilton, on vit apparaître les nombreuses sortes d'analyse vectorielle en faveur chez les physiciens des deux dernières générations ; aujourd'hui toutes ces théories, y compris les quaternions, en ce qui concerne leurs applications physiques, sont remplacées par l'analyse tensorielle, incomparablement plus simple et plus générale, qui a pris son essor en 1915 avec la relativité généralisée ; nous en reparlerons plus loin.

En attendant, notons que ce qu'il y a eu de plus triste dans la vie d'Hamilton n'a été ni son mariage ni son alcoolisme, mais sa conviction arrêtée que les quaternions étaient la clef des mathématiques de l'univers physique : l'histoire a montré qu'Hamilton faisait tragiquement erreur quand il déclarait : "Je dois encore affirmer que cette découverte me paraît être aussi importante pour le milieu du XIXe siècle que la découverte des fluxions (calcul différentiel) l'a été pour la fin d XVIIe". Jamais un grand mathématicien ne s'est aussi lourdement trompé.

Les vingt-deux dernières années de la vie d'Hamilton ont été consacrées presque exclusivement à l'élaboration de la théorie des quaternions, y compris son application à la dynamique, l'astronomie et la théorie ondulatoire de la lumière, ainsi qu'à sa volumineuse correspondance. Le style des *Éléments des Quaternions*, publiés l'année qui suivit la mort d'Hamilton, montre nettement l'influence du mode d'existence de l'auteur. Après sa mort, conséquence de la goutte, le 2 septembre 1865, à l'âge de soixante et un ans, on trouva qu'il laissait derrière lui une masse de papiers dans une confusion indescriptible et environ soixante gros manuscrits de mathématiques. Une édition méthodique de ses œuvres est actuellement en cours. L'état des documents qu'il a laissés démontre les difficultés domestiques qui ont assailli le dernier tiers de sa vie ; on a trouvé, enfouies sous des montagnes de papiers, d'innombrables assiettes avec des restes desséchés intacts de côtelettes, et une quantité de mets suffisante pour nourrir longtemps toute une maisonnée. Pendant la dernière période de son existence, Hamilton vivait comme un reclus, ne prenant pas garde, quand il travaillait, aux aliments qu'on lui apportait, obsédé par le rêve qui le hantait : immortaliser par un dernier effort sa patrie bien-aimée et lui-même, et laisser un monument impérissable qui serait la plus grande contribution aux mathématiques depuis les *Principes* de Newton.

Il en vint à considérer sa première œuvre, celle sur laquelle repose sa gloire impérissable, comme de minime importance à côté de ce qu'il croyait être son chef-d'œuvre. Vers la fin, il vécut dans l'humilité et la dévotion, n'ayant plus aucun souci de sa réputation scientifique. "J'ai très longtemps admiré l'appréciation que Ptolémée a émise sur son grand maître en astronomie Hipparque, $\alpha\nu\eta\rho\ \phi\iota\lambda o\pi o\nu o\zeta\kappa\alpha\iota\ \phi\iota\lambda\alpha\lambda\eta\theta\eta\zeta$, un homme aimant la philosophie et la vérité. Que ce soit mon épitaphe".