Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

Chapitre II
Zénon, Eudoxe, Archimède
Esprits modernes dans des cerveaux anciens

... la gloire qu'était la Grèce et la grandeur qu'était Rome.
E.-A. Pox.

Pour apprécier à sa juste valeur notre propre Âge d'Or des mathématiques, nous ne devons jamais oublier les grandes et simples idées directrices de ceux dont le génie nous a, il y a fort longtemps, facilité la tâche. Nous allons jeter un coup d'œil sur la vie et l'œuvre de trois Grecs : Zénon (495-435 av. J.-C.), Eudoxe (408-355 av. J.-C.), Archimède (287-212 av. J.-C.). Nous parlerons d'Euclide plus loin, à l'endroit où son œuvre la meilleure trouvera sa place.

Zénon et Eudoxe sont les représentants de deux écoles mathématiques franchement opposées, qui fleurissent encore aujourd'hui : la critique destructive et la critique constructive. Ces deux esprits ont un sens critique aussi pénétrant que leurs successeurs des XIX[e] et XX[e] siècles. On peut évidemment retourner la proposition et dire que Kronecker (1823-1891) et Brouwer (1881-), ces critiques modernes de l'analyse mathématique, des théories de l'infini et du continu, sont aussi anciens que Zénon ; les créateurs des théories modernes de la continuité et de l'infini, Weierstrass (1815-1897), Dedekind (1831-1916) et Cantor (1845-1918) sont les contemporains intellectuels d'Eudoxe.

Archimède, le plus grand esprit de l'antiquité, est moderne jusqu'à la moelle. Lui et Newton se seraient parfaitement bien compris et il est bien possible que si Archimède était né assez tard pour suivre un cours d'agrégation de mathématiques et de physique, il aurait compris Einstein, Bohr, Heisenberg et Dirac mieux qu'ils ne se comprennent eux-mêmes. De tous les anciens, Archimède est le seul qui raisonnait habituellement avec l'entière liberté que se permettent aujourd'hui les grands mathématiciens ; mais ces derniers bénéficient des gains péniblement acquis au cours de vingt-cinq siècles, qui leur ont aplani les voies ; seul en effet de tous les Grecs, il avait l'envergure et la force suffisantes pour franchir aisément les obstacles jetés sur la route du progrès mathématique par des géomètres pusillanimes qui prêtaient trop l'oreille aux philosophes.

Toute liste des trois plus grands mathématiciens de l'histoire doit comprendre le nom d'Archimède : les deux autres qu'on lui associe habituellement sont Newton (1642-1727) et Gauss (1777-1855). Certains, considérant la richesse ou la pauvreté relative des sciences mathématiques et physiques aux siècles respectifs de ces géants et évaluant leur œuvre par rapport à leur temps, placeraient Archimède au premier rang. Si les mathématiciens et savants de la Grèce avaient suivi Archimède plutôt qu'Euclide, Platon et Aristote, ils auraient aisément devancé d'au moins deux mille ans l'ère des mathématiques modernes, qui commence à Descartes (1596-1650) et à Newton au XVII[e] siècle et celle de la science physique moderne ouverte par Galilée (1564-1642)

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?$_lg = fr - FR$.

Transcription : Denise Vella-Chemla, août 2023.

au même siècle.

Derrière ces trois précurseurs de l'ère moderne, on voit se dessiner dans le lointain la figure presque mythique de PYTHAGORE (569 ?-500 ? av. J.-C.), à la fois mystique, mathématicien, chercheur entravé par ses propres talents, génie pour un dixième, illuminé pour le reste. Sa vie est devenue une sorte de fable, riche de l'incroyable accumulation de ses prodiges ; mais sa personnalité n'a d'importance pour le progrès des mathématiques, qu'autant qu'on la sépare du mysticisme bizarre du nombre, dont il habillait ses spéculations cosmiques. Il a beaucoup voyagé en Égypte où il s'est instruit auprès des prêtres et a récolté des croyances, il a visité Babylone où il a recommencé, il a fondé ensuite une confrérie secrète à Crotone, en Italie du Sud, pour développer la haute spéculation mathématique et d'absurdes théories physiques et éthiques. Il mourut, d'après une légende, dans les flammes de sa propre école, incendiée par les fanatiques politiques et religieux qui avaient soulevé les masses pour protester contre les lumières que PYTHAGORE avait cherché à leur apporter. "Sie transit gloria mundi."

Avant PYTHAGORE, on n'avait pas clairement compris que la preuve doit découler de suppositions. PYTHAGORE, selon la tradition, a été le premier européen à soutenir qu'en géométrie les axiomes, les postulats doivent être posés tout d'abord et que le développement consécutif doit procéder par applications aux axiomes d'un raisonnement strictement déductif. Selon la pratique courante, nous userons par la suite du terme "postulat", au lieu d' axiome, car "axiome" implique historiquement une idée de vérité "évidente en soi, nécessaire", que postulat ne possède pas ; un postulat est une hypothèse arbitraire émise par le mathématicien et non pas par une Toute-Puissance Divine.

Ainsi donc, c'est PYTHAGORE qui a apporté la démonstration en mathématiques ; c'est un très grand événement. Avant lui, la géométrie avait été surtout un ensemble de règles empiriques et routinières obtenues sans aucune indication des liaisons mutuelles entre elles, et sans soupçonner le moins du monde que toutes pussent se déduire d'un nombre relativement faible de postulats. La démonstration est maintenant si généralement considérée comme le véritable fond des mathématiques qu'il nous paraît difficile d'imaginer ce qui doit avoir précédé le raisonnement mathématique.

La seconde contribution marquante de PYTHAGORE aux mathématiques nous met en face de problèmes vitaux. C'est la découverte, qui l'humilia et le bouleversa, que les nombres entiers ordinaires, 1, 2, 3... sont insuffisants pour bâtir les mathématiques, même sous la forme rudimentaire où il les connaissait. Avant cette découverte capitale, il avait, en prophète inspiré, prêché que toute la nature, mathématique, physique, métaphysique, morale, repose sur le modèle "discret" des nombres entiers 1, 2, 3... et peut s'interpréter an moyen de ces éléments donnés par Dieu. "Dieu, déclarait-il, est nombre", et par là il entendait nombre entier ! Conception sublime sans doute et d'une splendide simplicité, mais aussi inutilisable que les échos qu'on en retrouve chez PLATON : "Dieu fait toujours de la géométrie", ou chez Jacobi : "Dieu fait toujours de l'arithmétique", ou encore chez Jeans : "Le grand Architecte de l'Univers commence maintenant à nous apparaître comme un mathématicien". Une acharnée contradiction détruisit les théories mathématiques, métaphysiques et philosophiques de PYTHAGORE ; mais, contrairement à certains de ses successeurs, il accepta finalement sa défaite, après s'être efforcé sans succès de supprimer la découverte qui avait aboli sa foi.

Voici ce qui avait fait échouer sa théorie : il est impossible de trouver deux nombres entiers tels que le carré de l'un soit égal au double du carré de l'autre. Ceci peut être prouvé par une démonstration[1] simple à la portée de quiconque a quelques notions d'algèbre, ou qui possède l'arithmétique élémentaire. En réalité, c'est dans la géométrie que PYTHAGORE a rencontré sa pierre d'achoppement : le rapport du côté d'un carré à sa diagonale ne peut pas s'exprimer par le rapport de deux nombres entiers, ce qui est équivalent à l'énoncé ci-dessus concernant les carrés des nombres entiers. Sous une autre forme, nous dirons que la racine carrée de 2 est un nombre irrationnel, c'est-à-dire n'est égal à aucun nombre entier ou fraction décimale (ou à la somme des deux), obtenue en divisant un nombre entier par un autre. Ainsi donc, un concept géométrique aussi simple que la diagonale d'un carré défie les nombres entiers 1, 2, 3... et dénie la première théorie philosophique pythagoricienne. Nous pouvons aisément construire la diagonale géométriquement, mais nous ne pouvons pas la mesurer par un nombre fini d'échelons. Cette impossibilité a attiré nettement et clairement l'attention des mathématiciens sur les nombres irrationnels et sur l'idée d'infini (sans fin) qu'ils paraissent impliquer. Ainsi, la racine carrée de deux peut se calculer jusqu'au nombre fini voulu de chiffres décimaux par le procédé enseigné dans les écoles ou par des méthodes plus puissantes, mais la partie décimale ne se répète jamais (comme cela arrive pour $^1/_7$ par exemple), ni ne se termine jamais. Par cette découverte, PYTHAGORE a trouvé la racine de l'analyse mathématique moderne.

Ce simple problème a entraîné des conséquences qui ne sont pas encore résolues d'une manière satisfaisante par tous les mathématiciens ; elles concernent les concepts mathématiques de l'infini (le non fini, le non dénombrable), des limites et de la continuité, concepts qui se trouvent à la racine de l'analyse moderne. Au fur et à mesure, les paradoxes et les sophismes qui se sont glissés dans les mathématiques avec ces concepts apparemment indispensables ont été regardés comme définitivement éliminés, mais pour apparaître de nouveau une ou deux générations après, sans doute sous une autre forme mais au fond toujours les mêmes. Nous les retrouverons, plus vivaces que jamais, dans les mathématiques de notre temps.

Voici un raisonnement extrêmement simple, qui dépeint clairement l'état de la question :

Considérons une droite de 2 pouces de long et imaginons qu'elle a été tracée par le "mouvement" "continu" d'un "point" : les mots entre guillemets sont ceux qui recèlent les difficultés ; sans les analyser, nous nous persuaderons aisément que nous nous représentons ce qu'ils signifient. Appelons 0 l'extrémité gauche de la ligne et 2 l'extrémité droite. À mi-distance entre 0 et 2, nous marquons naturellement 1, à mi-distance entre 0 et 1 nous mettons $^1/_2$, à mi-distance entre 0 et $^1/_2$, nous écrivons $^1/_4$, et ainsi de suite. De même, entre 1 et 2, nous marquons l'emplacement de 1 $^1/_2$, entre 1 $^1/_2$ et 2, 1 $^3/_4$, et ainsi de suite. Ceci fait, nous pouvons procéder de même en écrivant $^1/_3$,

[1] Soit $a^2 = 2b^2$ où, sans perdre en généralité, a et b sont des nombres entiers sans facteur commun supérieur à 1 (ce facteur pourrait être supprimé de l'équation ci-dessus). Si a est impair, nous avons immédiatement une impossibilité, puisque $2b^2$ est pair ; si a est pair, disons $2c$, on a : $4c^2 = 2b^2$ ou $2c^2 = b^2$ donc b est pair et alors, a et b ont 2 comme facteur commun, ce qui est contraire à l'hypothèse.

$^2/_3$, 1 $^1/_3$, 1 $^2/_3$, ensuite partager chacun des segments en segments égaux plus petits. Finalement, “en imagination”, nous pouvons concevoir que ce procédé a été exécuté pour toutes les fractions ordinaires et nombres fractionnaires ordinaires plus grands que 0 et plus petits que 2 : les points de division ainsi imaginés nous donnent tous les nombres rationnels entre 0 et 2. Il y en a une infinité. Mais couvriront-ils complètement toute la droite ? Non. À quel point correspondra la racine carrée de 2 ? À aucun, parce que cette racine carrée est impossible à obtenir en divisant un nombre entier quelconque par un autre. Cependant, la racine carrée de 2 est évidemment un nombre de quelque sorte[2] ; le point qui la représente se trouve quelque part entre 1.41 et 1.42 et nous pouvons l'encadrer d'aussi près que nous voulons. Pour couvrir la droite complètement, nous sommes forcés d'imaginer ou d'inventer infiniment plus de “nombres” que les nombres rationnels. Il en est ainsi, à la condition que nous acceptions la ligne comme étant continue et que nous admettions le postulat qu'à chaque point de celle-ci correspond un et un seul nombre réel. On peut imaginer la même chose pour le plan, et plus loin ; mais cela suffit pour le moment.

Des problèmes aussi simples que celui-ci conduisent à de très sérieuses difficultés, au sujet desquelles les Grecs étaient divisés, exactement comme nous le sommes, en deux factions irréconciliables : l'une s'est arrêtée en chemin et a refusé d'arriver jusqu'à l'analyse, jusqu'au calcul intégral (dont nous donnerons un aperçu au moment voulu) ; l'autre a essayé de vaincre les difficultés, elle y est parvenue en se persuadant elle-même qu'elle y était arrivée. Les premiers ont commis peu d'erreurs, mais en revanche ont découvert peu de vérités ; ceux qui sont allés de l'avant ont produit une grande partie des choses les plus intéressantes pour les mathématiques et pour la pensée rationnelle en général ; parmi ces découvertes, certaines peuvent donner prise à la critique destructive, exactement comme il est advenu au cours de notre propre génération. Depuis les temps les plus reculés, nous rencontrons ces deux types d'esprit, distincts et antagonistes : l'un animé d'une prudence excusable qui se tient en arrière parce que le sol tremble sous ses pas, l'autre, celui des hardis pionniers qui franchissent le gouffre pour trouver de l'autre côté un trésor et une sécurité relative. Nous étudierons d'abord un de ceux qui ont refusé de sauter ; nous ne rencontrerons pas son égal en subtilité de pensée avant d'atteindre le XX$^{\text{e}}$ siècle et Brouwer.

Zénon, d'Élée (495-435 av. J.-C.) était un ami du philosophe Parménide ; quand il visita Athènes avec lui, il choqua les philosophes parce qu'il se complut à inventer quatre innocents paradoxes qu'ils ne pouvaient pas réfuter. On raconte que Zénon était un paysan qui avait fait son instruction lui-même. Nous nous contenterons d'énoncer ces paradoxes, sans essayer de décider quel était son but en les inventant ; maintes autorités ont émis à ce sujet des opinions divergentes. En présence de ces paradoxes, on devine que Zénon se serait déclaré l'adversaire de la division prolongée jusqu'à l'infini de notre droite de deux pouces ; cela ressort de ses deux premiers, le paradoxe de la Dichotomie et celui d'Achille ; mais les deux derniers montrent qu'il se serait opposé aussi énergiquement à l'hypothèse adverse, savoir que la droite n'est pas divisible jusqu'à l'infini, mais est composée d'un groupe discret de points que l'on peut décompter, 1, 2, 3,... Les quatre paradoxes constituent en tout cas un mur d'airain au-delà duquel il apparaît impossible de progresser.

D'abord, la Dichotomie : tout mouvement est impossible parce que tout ce qui se meut doit atteindre le milieu du trajet avant d'atteindre l'extrémité ; mais avant d'arriver au milieu, il doit être parvenu au quart, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Donc, le mouvement ne peut jamais commencer.

[2]Le vice inhérent à une telle hypothèse est évident.

En second lieu, le paradoxe d'Achille. Celui-ci, courant pour rattraper une tortue qui chemine devant lui, ne la rejoindra jamais parce qu'au préalable il doit atteindre la place d'où elle est partie : quand il y sera parvenu, la tortue l'aura quittée et se trouvera en avant ; en répétant ce raisonnement, on voit que la tortue sera toujours en avant d'Achille. Voici maintenant l'autre face.

La flèche : une flèche lancée est à chaque instant à l'état de repos ou à l'état de non-repos c'est-à-dire en mouvement ; si l'instant est indivisible, la flèche ne peut pas se mouvoir, sinon l'instant pourrait immédiatement se diviser. Or le temps est fait d'instants ; comme la flèche ne peut se mouvoir dans aucun instant, elle ne peut jamais se mouvoir. Elle reste toujours au repos.

Le stade : Pour prouver que la moitié d'un temps peut être égale au double de ce temps, considérons trois rangées d'objets :

	Première position			
(A)	0	0	0	0
(B)	0	0	0	0
(C)	0	0	0	0

	Deuxième position					
(A)		0	0	0	0	
(B)	0	0	0	0		
(C)			0	0	0	0

L'une (A) est au repos pendant que les deux autres (B) et (C) se meuvent à des vitesses égales dans des directions opposées. À un même moment de la course, (B) aura dépassé (C) de deux fois autant d'objets qu'il aura dépassé A ; donc il met deux fois plus de temps pour dépasser (A) que pour dépasser (C) : mais le temps que mettent (B) et (C) à atteindre la position de (A) est le même ; par conséquent le double du temps est égal à sa moitié. On peut, pour mieux comprendre, imaginer (A) comme une palissade circulaire de piquets.

Telle est, en langage non mathématique, la nature des difficultés que les anciens lutteurs rencontrèrent avec la continuité et l'infini. Dans des livres datant d'une vingtaine d'années, on lit que la "théorie positive de l'infini" créée par Cantor, et celle des "nombres irrationnels", tels que la racine carrée de 2, inventée par Eudoxe, Weierstrass et Dedekind, ont résolu toutes ces difficultés une fois pour toutes. Cette déclaration ne serait pas acceptée aujourd'hui par toutes les écoles de la pensée mathématique. Ainsi donc, en discutant de Zénon, nous nous sommes occupés de nous-mêmes.

Ceux qui désirent connaître plus de détails sur Zénon pourront consulter le Parménide de Platon. Nous ferons remarquer seulement que Zénon perdit sa tête pour crime de trahison ou quelque chose d'analogue et nous passerons à ceux qui n'ont pas perdu la tête avec ses raisonnements. Ceux qui se sont tenus en arrière, avec Zénon, ont fait relativement peu pour l'avancement des mathématiques, bien que leurs successeurs aient fait beaucoup pour ébranler leurs fondations.

Eudoxe, de Cnide (408-355 av. J.-C.) hérita de ce que Zénon avait légué au monde et pas de beaucoup plus. Comme plus d'un de ceux qui ont laissé leur empreinte sur les mathématiques, Eudoxe a souffert dans sa jeunesse d'une extrême pauvreté. Platon était encore jeune à la naissance d'Eudoxe et Aristote avait environ trente ans quand Eudoxe mourut, Ces deux grands philosophes s'occupèrent beaucoup des doutes que Zénon avait introduits dans le raisonnement mathématique et qu'Eudoxe, par sa théorie des proportions, le couronnement des mathématiques grecques, devait apaiser, jusqu'au dernier quart du XIXe siècle.

Jeune homme, Eudoxe quitta Tarente pour Athènes où il étudia avec Archytas (428-347 av. J.-C.), mathématicien, administrateur et soldat de premier ordre. À Athènes, il ne tarda pas à rencontrer Platon. Trop pauvre pour vivre dans les environs de l'Académie, il faisait tous les jours le trajet entre Athènes et le Pirée où le poisson et l'huile d'olives étaient bon marché et où l'on pouvait se loger pour un sourire bien placé.

Bien qu'il ne fût pas un mathématicien, Platon a été appelé le faiseur de mathématiciens et on ne saurait nier qu'il ait incité à de réelles créations mathématiques bien des mathématiciens qui lui étaient infiniment supérieurs. Comme nous le verrons, son influence, dans l'ensemble, a été vraisemblablement funeste au progrès des mathématiques. Mais il reconnut la valeur d'Eudoxe et devint son ami dévoué jusqu'au moment où il commença à éprouver quelque sentiment de jalousie à l'égard de son brillant protégé. On dit que Platon et Eudoxe firent ensemble un voyage en Égypte. S'il en est ainsi, Eudoxe paraît avoir été moins crédule que son prédécesseur Pythagore ; mais chez Platon on perçoit les effets de la vaste proportion de mystique orientale du nombre qu'il a ingurgitée. Se sentant impopulaire à Athènes, Eudoxe se décida à la quitter et passa ses dernières années à Cyzique. Il étudia la médecine, et on dit qu'en outre de ses mathématiques, il fut un bon législateur et médecin praticien. Comme si tout cela ne suffisait pas à occuper un homme, il entreprit sérieusement l'étude de l'astronomie et apporta à cette science des contributions de valeur. Ses idées scientifiques le placent à plusieurs siècles en avant de ses contemporains, qui passaient leur temps à palabrer et à philosopher. Comme Galilée et Newton, il a méprisé les spéculations concernant l'univers physique que l'observation et l'expérience ne pouvaient pas contrôler. Si en allant vers le soleil, disait-il, il avait pu vérifier sa forme, ses dimensions, sa nature, il aurait volontiers subi le sort de Phaéthon, mais en attendant il ne voulait rien deviner.

Un simple problème suffit pour se rendre compte de l'œuvre d'Eudoxe. Pour trouver l'aire d'un rectangle, nous multiplions sa longueur par sa largeur : bien que cela paraisse intelligible, cela présente de sérieuses difficultés si les deux côtés ne peuvent pas se mesurer par des nombres rationnels. Passant sur ces difficultés particulières, nous les verrons sous une forme encore plus évidente dans cet autre problème extrêmement simple : trouver la longueur d'une ligne courbe, l'aire d'une surface courbe, ou le volume compris entre des surfaces courbes.

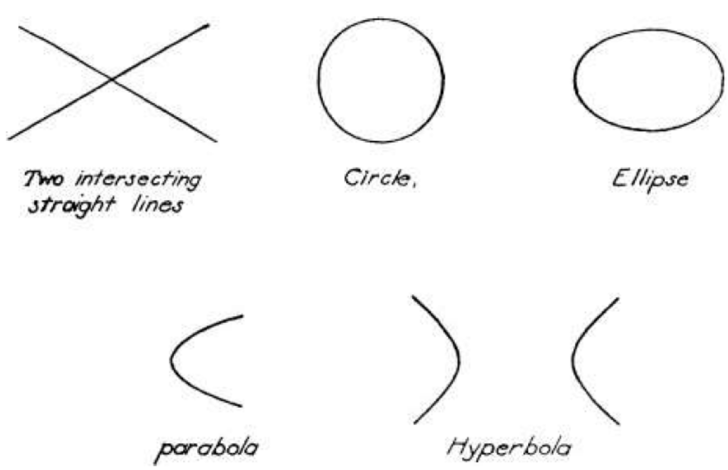
Quelque jeune génie désirant éprouver ses capacités mathématiques peut essayer de trouver une méthode pour résoudre ces problèmes. S'il ne l'a jamais appris à l'école, comment arrivera-t-il à donner la preuve rigoureuse de la formule de la circonférence d'un cercle de rayon donné ? Quiconque le ferait à lui seul, de sa propre initiative, peut prétendre être un mathématicien de premier ordre. Au moment où nous quittons les figures limitées par des lignes droites ou des surfaces planes, nous entrons en plein dans les problèmes de continuité, les énigmes de l'infini et les dédales des nombres irrationnels. Eudoxe a trouvé la première méthode logiquement satisfaisante, qu'Euclide a reproduite au livre V de ses Éléments, pour résoudre ces problèmes. Dans sa méthode d'exhaustion, appliquée au calcul des aires et des volumes, Eudoxe a montré que nous n'avons pas besoin de supposer l'existence de “quantités infiniment petites”. Il suffit, pour les buts que poursuivent les mathématiques, de pouvoir atteindre une grandeur aussi petite que nous voulons grâce à la division continue d'une grandeur donnée.

Pour en terminer avec Eudoxe, nous citerons sa définition des rapports égaux, qui fait époque et qui a permis aux mathématiciens de traiter les nombres irrationnels avec autant de précision que les nombres rationnels. On trouve là, essentiellement, le point de départ d'une théorie moderne des nombres irrationnels.

On dit que la première de quatre grandeurs a le même rapport avec la deuxième que celui que la troisième a avec la quatrième lorsque, en prenant n'importe quels équimultiples (les mêmes multiples) de la première et de la troisième, le multiple de la première est supérieur, égal ou inférieur au multiple de la seconde, selon que le multiple de la troisième est supérieur, égal ou inférieur au multiple de la quatrième.

Des Grecs non encore cités, dont l'œuvre a influencé les mathématiques d'après 1600, seul Apollonius mérite d'être nommé ici. Apollonius (260 ?-200 ? av. J.-C.) a amené la géométrie à la manière d'Euclide (encore enseignée aux infortunés débutants), bien au-delà du point où Euclide (330 ?-275 ?) l'avait laissée. Comme géomètre de ce type, c'est-à-dire géomètre pur, synthétique, Apollonius est resté hors pair jusqu'à Steiner au XIX^{e} siècle.

Si un cône à base circulaire et se prolongeant indéfiniment de part et d'autre de son sommet est coupé par un plan, la courbe d'intersection du plan et de la surface du cône est ce qu'on appelle une section conique. Il y a cinq sortes possibles de sections coniques : l'ellipse, l'hyperbole à deux branches, la parabole qui est la courbe que suit un projectile dans le vide, le cercle, et une paire de droites se coupant. L'ellipse, la parabole et l'hyperbole sont, d'après les termes de Platon, des courbes mécaniques, ce qui veut dire que ces courbes ne peuvent pas se construire au moyen de la règle et du compas seuls, bien qu'il soit facile, avec ces deux instruments, de construire un nombre voulu quelconque de points d'une de ces courbes. La géométrie des sections coniques, portée par Apollonius et ses successeurs à un degré élevé de perfection, s'est montrée d'une importance extrême dans la mécanique céleste du XVII^{e} siècle et des siècles suivants. En effet, si les géomètres grecs n'avaient pas devancé Kepler, il est probable que Newton n'aurait jamais découvert sa loi de la gravitation universelle, à laquelle Kepler avait préparé les voies par ses calculs laborieusement ingénieux sur les orbites des planètes.



Les derniers Grecs et les Arabes du Moyen-Âge paraissent avoir témoigné à Archimède la même considération et le même respect que ceux que Gauss a inspirés à ses contemporains et successeurs, au XIXe siècle, et Newton aux siens des xvie et XVIIIe siècles. Archimède a été le chef indiscuté de tous, “l’ancien”, le sage, le maître, le grand géomètre. Il a vécu de 287 à 212 avant J.-C. Grâce à Plutarque, on est mieux renseigné sur sa mort que sur sa vie ; à vrai dire, Plutarque, ce biographe typique, a pensé évidemment que le roi des mathématiciens était, historiquement, un personnage de moindre importance que le soldat romain Marcellus, et dans sa Vie des Hommes Illustres il a glissé l’histoire d’Archimède comme une mince tranche de jambon dans un énorme sandwich. Cependant, aujourd’hui, le souvenir glorieux d’Archimède dépasse la mémoire exécrée de Marcellus. Dans la mort d’Archimède, nous rencontrons pour la première fois le choc d’une civilisation grossièrement utilitaire contre quelque chose de supérieur qu’elle détruisit : Rome, gorgée de victoire et de pourpre impériale, après avoir à peu près détruit Carthage, s’abattant sur la Grèce pour briser sa magnifique fragilité !

De corps et d’esprit. Archimède était un aristocrate : fils de l’astronome Pheidias, il était né à Syracuse et l’on dit qu’il était parent de Hiéron II, tyran (roi) de Syracuse : en tout cas, il était en relations suivies avec ce dernier et son fils Gélon qui, tous les deux, avaient une haute admiration pour le roi des mathématiciens. Son tempérament essentiellement aristocratique se manifestait par son attitude à l’égard de ce qu’on appellerait aujourd’hui les sciences appliquées. Bien qu’il ait été un des plus grands génies de tous les temps en mécanique, Archimède avait un sincère mépris pour ses propres inventions pratiques. À un certain point de vue, ce sentiment peut se justifier ; on pourrait écrire des livres sur ce qu’Archimède a fait en mécanique appliquée ; mais pour si grande qu’ait été cette œuvre, à notre point de vue moderne si pénétré de mécanique, elle est complètement éclipsée par ses contributions aux mathématiques pures. Considérons d’abord les quelques faits et légendes que l’on connaît de lui.

Selon la tradition, Archimède est le parfait modèle de musée populaire d’un grand mathématicien. Comme Newton et Hamilton, il ne touchait pas à ses repas lorsqu’il était plongé dans ses calculs. En matière de négligence à l’égard de ses vêtements, il en remontre à Newton, puisque le jour de sa fameuse découverte qu’un corps flottant perd en poids la moitié de celui du volume de liquide qu’il déplace, il s’élança hors de son bain, où il avait fait sa découverte en observant son propre corps flottant et courut tout nu dans les rues de Syracuse en criant : Euréka, euréka ! (J’ai trouvé !) Ce qu’il avait trouvé, c’était la première loi de l’hydrostatique. On raconte qu’un orfèvre malhonnête avait falsifié avec de l’argent une couronne d’or destinée à Hiéron ; celui-ci, soupçonnant la fraude, avait demandé à Archimède d’étudier ce problème ; tout élève de l’enseignement secondaire sait comment on le résout par une simple expérience et par un calcul facile d’arithmétique sur la densité ; aujourd’hui les jeunes blancs-becs et les ingénieurs du Génie Maritime connaissent les nombreuses applications du principe d’Archimède, mais l’homme qui les a perçues pour la première fois était bien au-dessus d’un observateur ordinaire. On ignore si finalement l’orfèvre a été reconnu coupable ; par égard pour le récit, on admet habituellement que oui.

On connaît aussi une autre exclamation d’Archimède qui s’est perpétuée à travers les siècles : “Donnez-moi un point d’appui et je soulèverai la terre” (c’est le texte dorien). Quand il se vantait ainsi lui-même, c’est qu’il était fortement excité par sa découverte des lois des leviers. La phrase ferait une devise parfaite pour un institut scientifique moderne ; il est étonnant qu’elle n’ait pas été utilisée. Il existe une autre version en meilleur grec, mais le sens est le même.

Par une autre de ses excentricités, Archimède ressemblait à un autre grand mathématicien, Weierstrass : d'après la sœur de ce dernier, quand il était jeune écolier, on ne pouvait lui confier un crayon s'il y avait quelque part un coin de mur recouvert de papier clair ou une manchette de toile blanche en vue. Archimède a battu ce record : un plancher sablé ou la terre battue lui servait de tableau noir certains jours, et au besoin il s'en créait lui-même ; assis devant le feu, il en retirait les cendres et y traçait des figures. Sortant du bain, il enduisait son corps d'huile d'olive, selon la coutume de l'époque mais ensuite, au lieu de se vêtir, il se mettait à tracer avec l'ongle des diagrammes sur sa peau huilée.

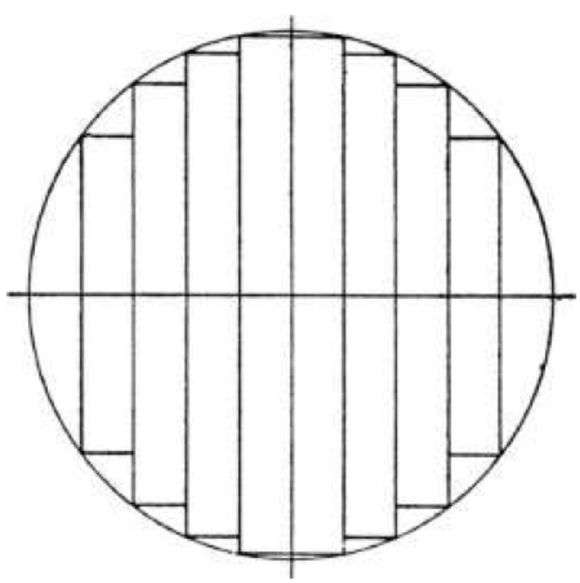
Archimède était comme une sorte d'aigle solitaire. Jeune homme, il avait étudié quelque temps à Alexandrie en Égypte, où il s'était fait deux amis sincères : Conon, un mathématicien doué pour qui Archimède avait un grand respect à la fois personnel et intellectuel, et Eratosthène également bon mathématicien, mais très fat. Ces deux amis, particulièrement Conon, paraissent avoir été les seuls de ses contemporains à qui il confiât volontiers ses idées, étant assuré d'être compris. Il a communiqué certains de ses plus beaux travaux, par lettres, à Conon. Plus tard, après le décès de Conon, Archimède entretint une correspondance avec Dosithée, un élève de Conon.

Laissant de côté les contributions importantes qu'Archimède a faites à l'astronomie et à la mécanique, nous allons donner un résumé simple et forcément incomplet des principaux appoints qu'il a fournis aux mathématiques pures et appliquées.

Il a découvert des méthodes générales pour trouver les aires des figures planes curvilignes et les volumes des corps délimités par des surfaces courbes, et il a appliqué ces méthodes à plusieurs cas particuliers tels que le cercle, la sphère, le segment de parabole, l'aire comprise entre deux rayons et deux spires successives d'une hélice, les segments sphériques, les parties de surfaces engendrées par les révolutions de rectangles (cylindres), triangles (cônes), paraboles (paraboloïdes), hyperboles (hyperboloïdes), ellipses (ellipsoïdes) autour de leurs axes principaux. Il a donné une méthode pour calculer, le rapport de la circonférence à son diamètre, et a fixé la valeur de entre $3\ {}^{1}/_{7}$ et $3\ {}^{10}/_{71}$. Il a indiqué aussi des méthodes pour calculer approximativement les racines carrées, ce qui prouve qu'il a été le précurseur des Hindous dans l'invention des fractions continues périodiques. En arithmétique, dépassant de beaucoup la méthode peu pratique et anti-scientifique des Grecs de représenter les nombres par des symboles, il a inventé un système de numération permettant d'écrire ou d'énoncer des nombres aussi grands que l'on veut. En mécanique, il a posé quelques postulats fondamentaux, découvert les lois des leviers et appliqué les principes mécaniques de ceux-ci au calcul des aires et des centres de gravité de plusieurs surfaces planes et des volumes de corps de formes diverses. Il a créé toute la science de l'hydrostatique et l'a appliquée à trouver les positions de repos et d'équilibre de corps flottants de plusieurs sortes.

Archimède n'a pas été l'auteur d'un chef-d'œuvre, mais d'un très grand nombre de chefs-d'œuvre. La stricte brièveté, la logique rigoureuse de son exposition ne laissent pas deviner la méthode par laquelle il est arrivé à ses résultats admirables. Heureusement, en 1906, J. L. Heiberg, l'historien érudit des mathématiques des Grecs, a fait à Constantinople l'émouvante découverte d'un traité, jusqu'alors égaré, adressé par Archimède à son ami Eratosthène, intitulé : Théorèmes de mécanique, méthodes. ARCHIMÈDE y explique comment, en comparant, par la pensée, une figure ou un solide dont l'aire ou le volume sont inconnus à un autre déjà connu, il a été conduit à la connaissance de l'élément cherché. Le résultat une fois connu, il était alors relativement facile (pour lui) de le démontrer mathématiquement. En un mot, il a mis à profit ses connaissances en mécanique pour faire progresser ses mathématiques. C'est là un des titres qui permettent de le compter parmi les esprits modernes : il a utilisé toutes choses et chaque chose qui s'offrait d'elle-même, comme une arme pour attaquer ses problèmes.

Pour un moderne, tout est de bonne guerre, en amour comme en mathématiques : pour la plupart des anciens, les mathématiques étaient un jeu assez ridicule qui devait se jouer conformément aux règles strictes imposées par le tour d'esprit philosophique de PLATON. Selon celui-ci, il n'était permis d'user que de la règle et du compas comme instruments pour les constructions géométriques. Rien d'étonnant, dans ces conditions, que les géomètres classiques se soient, pendant des siècles, cassé la tête sur les trois problèmes de l'antiquité : la trisection d'un angle, la construction d'un cube ayant un volume double d'un cube donné, la construction d'un carré égal à un cercle. Aucun de ces problèmes n'est possible avec la règle et le compas seuls, bien qu'il soit difficile de le prouver pour le troisième ; et c'est seulement en 1882 que cette impossibilité a été prouvée. Toutes les constructions effectuées avec d'autres instruments étaient qualifiées de mécaniques et, comme telles, pour quelque raison mystique connue seulement de PLATON et de son Dieu géomètre, on les considérait comme horriblement vulgaires et elles étaient rigidement tabou dans toute géométrie qui se respectait. Ce n'est que lorsque Descartes, 1985 ans après la mort de PLATON, publia sa géométrie analytique, que la géométrie s'échappa de sa camisole de force platonicienne. Naturellement, puisque PLATON était mort au moins soixante ans avant la naissance d'ARCHIMÈDE, on ne saurait le critiquer de n'avoir pas apprécié la souplesse et l'indépendance des méthodes d'ARCHIMÈDE. D'autre part, on ne peut que louer ARCHIMÈDE de ne pas avoir apprécié la servilité de la conception rigidement corsetée de PLATON de ce que devrait être la muse de la géométrie.



Le second titre d'ARCHIMÈDE à la modernité repose sur ses méthodes. Devançant de plus de 2.000 ans Newton et Leibniz, il a inventé le calcul intégral et dans un de ses problèmes il a anticipé sur leur invention du calcul différentiel. Ces deux calculs réunis constituent le calcul infinitésimal qui a été défini comme l'instrument le plus puissant qui ait jamais été conçu pour l'exploration mathématique de l'univers physique. Pour prendre un exemple simple, supposons que nous voulions trouver l'aire d'un cercle ; parmi d'autres procédés, nous pouvons adopter : celui-ci diviser le cercle en un certain nombre de bandes parallèles d'égale largeur, enlever les portions courbes des extrémités des bandes, de manière que l'aire totale des portions enlevées soit la plus petite possible, par des coupes perpendiculaires aux bandes, et faire la somme de tous les rectangles partiels obtenus. Ce procédé donne une approximation de l'aire cherchée. En augmentant le nombre des bandes jusqu'à l'infini et en prenant la limite de la somme, nous obtenons l'aire du cercle. Ce procédé (grossièrement décrit) qui consiste à prendre la limite d'une telle somme s'appelle intégration, et la méthode pour exécuter cette sommation s'appelle le calcul intégral. C'est ce calcul qu'Archimède a appliqué pour trouver l'aire d'un segment de parabole et pour résoudre d'autres problèmes.

Le problème pour lequel il a employé le calcul différentiel était celui de la construction d'une tangente en un point donné de sa célèbre spirale. Si l'on connaît l'angle que fait la tangente avec une droite donnée, on peut aisément tracer la tangente, car il s'agit alors simplement de mener par un point donné une parallèle à une direction donnée. Le problème qui consiste à trouver l'angle en question (pour une courbe quelconque et non pas seulement pour la spirale) est, en langage géométrique, le problème principal du calcul différentiel. Archimède a résolu ce problème pour sa spirale : celle-ci est la courbe tracée par un point se déplaçant avec une vitesse uniforme le long d'une droite qui tourne avec une vitesse angulaire uniforme autour d'un point fixe. Si quelqu'un n'ayant pas étudié le calcul différentiel s'imagine que le problème d'Archimède est facile, qu'il s'y attaque lui-même !

La vie d'Archimède a été aussi tranquille que devait l'être celle d'un mathématicien qui a pu réaliser toutes ses possibilités. Toute l'agitation et la tragédie de sa vie se sont accumulées autour de sa fin. En 212 avant J.-C., la deuxième guerre punique faisait rage. Rome et Carthage s'assénaient de rudes coups et Syracuse, la ville où vivait Archimède, était une proie fort tentante à portée de la flotte romaine : pourquoi ne pas l'assiéger ? C'est ce que firent les Romains. Gonflé d'orgueil ("se reposant sur sa propre renommée", comme l'écrit Plutarque) et confiant dans la perfection de sa préparation militaire plutôt que dans son cerveau, le chef romain, Marcellus, prévoyait une conquête rapide. Sa confiance reposait sur une pièce d'artillerie primitive montée sur une plateforme élevée en forme de harpe que supportaient huit galères liées entre elles. À la vue de cette flotte et de cet attirail s'avançant sur eux, précédés de la renommée de Marcellus, les timides citoyens de Syracuse auraient remis au chef romain les clefs de la cité. Mais Hiéron, qui s'était préparé à la guerre, lui aussi, et d'une façon à laquelle le pratique Marcellus n'aurait jamais pensé, décida de résister.

Archimède, dédaignant les mathématiques appliquées, avait néanmoins, en temps de paix, cédé aux objurgations de Hiéron et avait consenti à démontrer, à la satisfaction du tyran, que les mathématiques peuvent, à l'occasion, devenir cruellement pratiques. Pour convaincre son ami que les mathématiques sont capables d'autre chose que de déductions abstraites, Archimède avait appliqué ses lois des leviers et des poulies à la manœuvre d'un bateau lourdement chargé, qu'il maniait à lui seul. Se rappelant ce fait au moment où les nuages de guerre commençaient à s'amonceler dans le voisinage de Syracuse, Hiéron pria Archimède de préparer une réception convenable à

Marcellus. Se détournant une fois de plus de ses recherches pour obliger son ami, Archimède constitua à lui seul un comité de réception pour faire trébucher les Romains trop pressés. Quand ils arrivèrent, ses ingénieuses diableries étaient en place pour les saluer.

La tortue en forme de harpe montée sur les huit quinquérèmes ne dura pas plus longtemps que la renommée de l'orgueilleux Marcellus. Une avalanche de blocs de pierre, pesant chacun plus d'un quart de tonne, lancés par les super-catapultes d'Archimède, démolit la lourde machine. Des sortes de grues à mâchoire de fer passaient par-dessus les murs pour aborder les vaisseaux, les agrippaient, les faisaient tournoyer et les coulaient ou les précipitaient contre les récifs voisins. Les troupes de débarquement, terrassées par l'artillerie d'Archimède, ne se comportèrent pas mieux. Marcellus fit passer, dans ses bulletins, sa déroute pour un repli volontaire ; il se retira pour conférer avec son état-major ; incapable de rallier ses troupes mutinées, qui refusaient de reprendre l'assaut contre les terribles remparts, le célèbre chef romain battit en retraite.

Manifestant à la fin quelques légers signes de bon sens militaire, Marcellus abandonna toute idée d'attaque de front, s'empara de Mégare et aborda Syracuse par derrière. Cette fois, la chance le favorisa. Ces fous de Syracusains étaient en train de célébrer une fête religieuse avec libation en l'honneur d'Artémis. La guerre et la religion ont toujours fait fort mauvais ménage ; les Syracusains en liesse étaient bien mal en point, ils se réveillèrent en plein massacre.

Archimède apprit que la ville avait été prise par ruse, par l'ombre d'un soldat romain projetée sur une figure qu'il traçait sur la poussière du sol. D'après une version, le soldat aurait marché sur les dessins et provoqué la colère d'Archimède : "N'effacez donc pas mes cercles !" aurait-il crié, selon d'autres. Archimède aurait refusé d'obéir au soldat, qui lui enjoignait de le suivre auprès de Marcellus, tant qu'il n'aurait pas terminé son problème. En tout cas, le soldat, irrité, tira sa glorieuse épée et envoya dans l'autre monde ce géomètre désarmé de soixante-quinze ans. Ainsi mourut Archimède.

Comme l'a observé Whitehead : aucun romain n'a perdu sa vie parce qu'il était absorbé dans la contemplation d'une figure géométrique.