Transcription en LaTeX d'un chapitre du livre de E. T. Bell *Les grands mathématiciens*

Chapitre XIV

Gauss

Le Prince des Mathématiciens

> *"L'élaboration et le développement ultérieurs de l'arithmétique systématique, comme à peu près tout ce que les mathématiques de notre siècle (le* XIX*e) ont produit dans la voie des idées scientifiques originales, se rattache à Gauss."*
>
> Léopold Kronecker.

Archimède, Newton et Gauss, tous les trois, se rangent dans une classe à part parmi les grands mathématiciens, et ce n'est pas aux mortels ordinaires d'essayer de les classer par ordre de mérite. Tous les trois ont déclenché des vagues de fond à la fois dans les mathématiques pures et appliquées : Archimède a attaché plus de prix à ses mathématiques pures qu'à leurs applications ; Newton paraît avoir trouvé la justification principale de ses inventions mathématiques dans l'usage scientifique qu'il en a fait, tandis que Gauss a déclaré qu'il lui était égal de travailler les mathématiques pures ou les mathématiques appliquées ; néanmoins, Gauss a couronné l'arithmétique supérieure, qui à son époque était la moins usuelle des études mathématiques, et en a fait la reine de toutes.

L'ascendance de Gauss, le prince des mathématiciens, est moins que royale. Issu de parents fort pauvres, il est né dans une misérable maisonnette à Brunswick, en Allemagne, le 30 avril 1777. Son grand-père paternel était un pauvre paysan ; il était venu en 1740 s'établir à Brunswick, où il menait une maigre existence de jardinier ; c'est le second de ses trois fils, Gerhard Diederich, né en 1744, qui fut le père de Gauss ; en dehors de cet honneur unique, la vie de Gerhard, jardinier, gardien de canal et briqueteur, s'écoula sans fait remarquable d'aucune sorte.

Le portrait que nous avons conservé du père de Gauss est celui d'un homme droit, scrupuleusement honnête, lourd, dont la sévérité à l'égard de ses fils frisait quelquefois la brutalité ; sa parole était aussi rude que sa main ; son honnêteté et sa persévérance lui valurent un certain bien-être, sans qu'il fût jamais à son aise. Il n'est pas surprenant qu'un homme de ce genre ait fait tout ce qui était en son pouvoir pour contrecarrer les goûts de son jeune fils pour l'étude et l'empêcher d'acquérir une instruction conforme à ses capacités. Si la volonté de son père avait prévalu, ce garçon admirablement doué aurait suivi un des métiers de la famille ; c'est seulement grâce à une série d'événements heureux que Gauss a échappé au métier de jardinier ou de briqueteur. Comme enfant il était obéissant et respectueux, et bien qu'au cours de son existence, il n'ait jamais critiqué son pauvre père, il a laissé entendre qu'il n'avait jamais éprouvé pour lui une réelle affection. Quand Gerhard

Référence :
https://www.bibliotheque.nat.tn/KHNU/doc/SYRACUSE/90812/e-t-bell-les-grands-mathematiciens-zenon-eudox-archimede-descartes-kummer-et-dedekind-poncare-cantor?_lg=fr-FR.

Transcription : Denise Vella-Chemla, février 2025.

mourut, en 1806, le fils qu'il avait découragé de son mieux avait déjà accompli une œuvre immortelle.

Du côté de sa mère, Gauss fut plus favorisé. Le père de Dorothée Benz était un tailleur de pierres qui mourut à trente ans de la tuberculose que lui avait valu son métier malsain ; il laissait deux enfants, Dorothée et son frère cadet Frédéric.

C'est de ce côté que l'ascendance du génie de Gauss devient visible. Condamné par pénurie d'argent au métier de tisserand, Frédéric était un homme fort intelligent, dont l'esprit audacieux et toujours en éveil fourrageait pour lui-même dans des domaines fort éloignés de sa profession ; Frédéric s'était rapidement fait, dans son métier, une réputation de tisseur de damas très fins ; de lui-même, il était devenu maître dans cet art. Trouvant dans l'enfant de sa sœur un esprit apparenté au sien, l'oncle Frédéric aiguísa ses facultés au contact de celles du jeune génie et fit tout son possible pour stimuler, par ses observations railleuses et sa philosophie quelque peu moqueuse, la promptitude de raisonnement de son neveu.

Frédéric savait ce qu'il faisait ; Gauss, à cette époque, ne le savait probablement pas, mais il était doué d'une mémoire qui a conservé intactes, jusqu'à sa mort, toutes les impressions de son enfance et de sa jeunesse. Pensant plus tard à ce que son oncle avait fait pour lui et se rappelant l'esprit fertile de ce dernier, auquel une mort prématurée avait ravi les chances d'en tirer parti, Gauss regrettait qu'"un génie inné eût été perdu en lui".

Dorothée vint habiter Brunswick en 1769, et en 1776, à l'âge de trente-quatre ans, épousa le père de Gauss. Son fils naquit l'année suivante. Ses prénoms au complet étaient Jean Frédéric Charles ; il a signé ses ouvrages Charles Frédéric Gauss ; si un grand génie s'est trouvé perdu en Frédéric Benz, son prénom a du moins survécu dans celui de son neveu reconnaissant.

La mère de Gauss était une femme d'un caractère droit et énergique, d'une intelligence éveillée, et d'un bon sens aiguisé d'humour. Son fils fut son orgueil, du jour où il naquit jusqu'au jour où elle mourut, à quatre-vingt-dix-sept ans. Lorsque cet "enfant prodige", dont l'intelligence étourdissante impressionnait tous ceux qui suivaient son développement intellectuel comme quelque chose de supraterrestre, réalisa et même dépassa les promesses de son enfance, Dorothée Gauss prit le parti de son fils contre son têtu de mari qui s'obstinait à vouloir que celui-ci fût aussi ignorant que lui.

Dorothée espérait et attendait de grandes choses de son fils ; les questions qu'elle hésitait à poser à ceux qui étaient à même de le juger montrent qu'elle a peut-être parfois douté de la réalisation de ses rêves ; ainsi, lorsque Gauss atteignit dix-neuf ans, elle demanda à son ami d'études Wolfgang Bolyai si Gauss arriverait à quelque chose : lorsque Bolyai s'exclama : "Ce sera le plus grand mathématicien de toute l'Europe", elle fondit en larmes.

Elle passa les vingt dernières années de sa vie dans la maison de son fils ; et devint totalement aveugle quatre ans avant sa mort. Gauss lui-même prenait peu de soin de sa propre renommée ; son seul orgueil était la vie de sa mère [1] ; ils s'entendaient parfaitement bien, et Gauss la remercia

[1] L'histoire des relations de Gauss avec ses parents n'a pas encore été bien établie. La mère soutenait son fils et le père le contrecarrait ; et, comme d'habitude à cette époque (et encore maintenant) dans les familles allemandes, le père avait le dernier mot. Je fais allusion plus loin à des récits de personnes encore en vie qui ont connu des membres

de la protection courageuse qu'elle lui avait donnée au cours de son enfance en lui assurant une vieillesse heureuse ; lorsqu'elle perdit la vue, il ne confia à personne en dehors de lui le soin de s'occuper d'elle ; elle mourut le 19 avril 1839.

Comme Archimède, Descartes, Newton, Gauss eut un accident qui faillit le soustraire aux mathématiques. C'était dans sa tendre enfance : une crue de printemps avait fait déborder le canal qui longeait la maisonnette où vivait sa famille ; en jouant près de l'eau, l'enfant y tomba et ne fut pas loin de se noyer ; sans la présence fortuite d'un ouvrier dans le voisinage, la vie de Gauss aurait fini là.

L'histoire des mathématiques n'a rien à enregistrer qui approche de la précocité de Gauss enfant. On ignore les premières manifestations du génie d'Archimède, et celles de Newton n'ont pas été retenues ; bien que cela paraisse incroyable, Gauss a donné sa mesure avant l'âge de trois ans. Un samedi, Gerhard Gauss établissait la feuille de paye hebdomadaire des ouvriers sous ses ordres, sans remarquer que son enfant suivait ses opérations avec attention ; arrivé à la fin de ses longs calculs, Gerhard fut fort surpris d'entendre le petit murmurer : "Papa, le calcul n'est pas juste, il faudrait mettre...", et la vérification du compte montra que le chiffre indiqué par Gauss était exact.

Avant cela, l'enfant avait appris l'alphabet en importunant ses parents et leurs amis ; puis, il avait appris à lire tout seul. Personne ne lui avait donné aucune leçon d'arithmétique et il avait probablement commencé à compter sur ses doigts : 1, 2, 3, etc. Plus tard, il disait en plaisantant qu'il avait su compter avant de parler. Durant toute sa vie, il posséda une facilité prodigieuse de calcul mental.

Un peu après sa septième année, Gauss entra à l'école, un sordide vestige du Moyen Âge, tenue par une brute humaine, un nommé Buttner ; son seul procédé d'instruction à l'égard de la centaine d'enfants dont il avait la charge était de les terroriser stupidement au point qu'ils en oubliaient même leur nom ; un de ces traits du bon vieux temps après lequel de sentimentaux réactionnaires soupirent encore : c'est dans cet enfer que Gauss a couru sa chance.

Rien d'extraordinaire à signaler au cours des deux premières années de séjour dans cette école ; ensuite, à dix ans, Gauss entra dans la classe d'arithmétique : aucun des enfants qui étaient là n'avaient entendu parler des progressions, et l'héroïque Buttner avait beau jeu de leur donner de longs problèmes dont lui-même pouvait trouver la solution en quelques secondes : par exemple additionner $81\,297 + 81\,495 + 81\,693 + ... + 100\,899$ où la différence entre deux nombres consécutifs est toujours la même (ici 198) et où l'on a 100 nombres à additionner. Selon la coutume de l'école, le premier élève qui avait trouvé la solution posait son ardoise sur la table, le second posait la sienne sur la première, et ainsi de suite. Buttner avait à peine fini d'énoncer le problème que Gauss posa son ardoise : "Cà y est" "Ligget se", dit-il dans son patois paysan : ensuite, pendant une heure, tandis que ses camarades peinaient, Gauss resta assis, les bras croisés, favorisé de temps à autre d'un coup d'œil sarcastique de Buttner, s'imaginant que le plus jeune élève de cette classe était juste une autre tête de bois ; quelle fut sa stupéfaction, en regardant les ardoises, de voir sur celle de Gauss un seul nombre écrit, qui était le total exact. Vers la fin de sa vie, Gauss aimait à raconter cette histoire. Sans doute, ce résultat est très facile à obtenir quand on connaît les progressions

de la famille de Gauss, particulièrement au sujet des relations de Gauss avec ses fils. Il s'agit de communications de première main ; mais je ne m'en porte pas garant, car les personnes qui les ont faites étaient fort âgées.

arithmétiques ; mais personne n'avait montré à Gauss le truc pour résoudre rapidement semblable problème et on avouera que pour un gamin de dix ans, c'est une chose assez extraordinaire de le trouver par lui-même instantanément.

C'était le début de l'entrée de Gauss dans l'immortalité. Buttner fut si étonné qu'il changea de manière de faire et devint, au moins pour un de ses élèves, un professeur humain ; de sa propre poche, il acheta le meilleur manuel d'arithmétique qu'il put trouver et le donna à Gauss, qui l'assimila en un rien de temps. “Il est plus fort que moi ; je ne puis rien lui apprendre de plus”, dit Buttner.

En effet, de lui-même, ce maître d'école n'aurait probablement pas pu faire beaucoup pour ce jeune génie ; mais par une chance heureuse, il avait un adjoint, Johann Martin Bartels (1769-1836), jeune homme qui avait la passion des mathématiques et dont la charge était d'apprendre aux débutants à écrire et à tailler leurs plumes d'oie ; entre l'adjoint de dix-sept ans et l'élève de dix, se noua une chaude amitié qui dura pendant toute la vie de Bartels. Ils étudiaient ensemble, s'aidant mutuellement à résoudre les difficultés et développant les démonstrations dans leur manuel commun d'algèbre et les rudiments d'analyse.

De ces premiers travaux de Gauss, est sortie une des questions les plus intéressantes de toute sa carrière. Il vint rapidement à bout du théorème du binôme :

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1\times 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^3 + \dots$$

expression dans laquelle n n'est pas nécessairement un nombre entier positif, mais peut être un nombre quelconque ; si n n'est pas un entier positif, la série en question est infinie (sans fin), et afin de déterminer dans quels cas cette série est réellement égale à $(1+x)^n$, il est indispensable de rechercher quelles sont les restrictions à imposer à x et à n pour que la série infinie converge vers une limite finie déterminée. Par exemple, si $x = -2$ et $n = -1$, nous aurons le résultat absurde que $(1-2)^{-1}$, qui n'est autre que $(-1)^{-1}$ ou $\frac{1}{-1}$, c'est-à-dire -1, est égal à $1+2+2^2+2^3+...$ et ainsi de suite jusqu'à l'infini ; autrement dit, d'après cela, -1 est égal au nombre infini $1+2+4+8+...$, ce qui est un non sens.

Avant que le jeune Gauss se fût demandé quelles séries infinies sont convergentes et nous permettent réellement de calculer les expressions mathématiques (fonctions) qu'elles servent à représenter, les anciens analystes ne s'étaient pas sérieusement préoccupés d'expliquer les mystères (et le non sens) provenant d'un emploi irréfléchi du passage à l'infini. Se trouvant ainsi de bonne heure en face du théorème du binôme, Gauss eut l'inspiration de certains de ses plus grands travaux et devint le premier des “rigoristes”. La démonstration du théorème du binôme lorsque n n'est pas un nombre entier plus grand que zéro dépasse, même de nos jours, la limite d'un manuel élémentaire ; peu satisfait de ce que Bartels et lui avaient trouvé dans leur livre, Gauss en fit une démonstration et cela l'initia à l'analyse mathématique ; la véritable essence de l'analyse est l'usage correct du passage à l'infini.

Cette œuvre si bien commencée devait changer tout l'aspect des mathématiques. Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Laplace, tous grands analystes pour leur époque, n'avaient pratiquement aucune idée de ce qu'on considère maintenant comme une démonstration comprenant le passage à l'infini. C'est Gauss qui le premier a vu nettement qu'une démonstration qui peut conduire à des absurdités du genre de celle “moins un égale l'infini” n'est pas une démonstration du tout. Même si dans certains cas une formule donne des résultats consistants, elle n'a pas de place dans les mathématiques tant que les conditions précises dans lesquelles elle continuera à fournir des résultats consistants n'ont pas été déterminées.

La rigueur que Gauss imposa à l'analyse envahit progressivement l'ensemble des mathématiques, aussi bien dans ses propres habitudes que dans celles de ses contemporains, comme Abel, Cauchy et de ses successeurs, Weierstrass, Dedekind ; après Gauss, les mathématiques devinrent une chose entièrement différente des mathématiques de Newton, Euler et Lagrange.

Au point de vue constructif, Gauss a été un révolutionnaire. Avant la fin de ses années d'école, le même esprit critique qui l'avait poussé à se déclarer peu satisfait du théorème du binôme l'incita à examiner les démonstrations de la géométrie élémentaire. À douze ans, il louchait déjà sur les fondements de la géométrie euclidienne ; à seize ans, il avait déjà perçu une première lueur d'une géométrie autre. Un an plus tard, il avait commencé une étude critique des démonstrations qui, dans la théorie des nombres, avaient satisfait ses prédécesseurs ; il avait de lui-même entrepris la tâche extraordinairement difficile de combler les lacunes et de compléter ce qui n'avait été fait qu'à moitié. L'arithmétique, domaine de ses premiers triomphes, devint son étude favorite et le thème de son chef-d'œuvre. Au sentiment précis de ce qui constitue une démonstration, Gauss joignait un esprit d'invention mathématique fécond que nul n'a jamais dépassé : la combinaison de ces deux dons le rendait sans rival. Bartels fit davantage pour Gauss que de l'initier aux mystères de l'algèbre ; le jeune professeur était en relation avec quelques personnalités influentes de Brunswick ; il s'employa à les intéresser à son jeune ami ; eux, de leur côté, favorablement impressionnés par le génie évident de Gauss, attirèrent sur lui l'attention de Charles Guillaume Ferdinand, duc de Brunswick.

Le duc reçut Gauss pour la première fois en 1791 ; le jeune homme avait quatorze ans ; sa modestie et sa timidité un peu gauche conquirent le cœur du généreux duc ; Gauss le quitta avec l'assurance qu'il faciliterait son instruction ; l'année suivante, Gauss entra au “Collegium Carolinum” à Brunswick ; le duc paya tous les frais jusqu'à ce que son éducation fût achevée.

Avant d'entrer au Collège Carolinien, à l'âge de quinze ans, Gauss, en partie tout seul, en partie aidé d'amis plus âgés, avait appris à fond les langues classiques, ce qui avait provoqué une crise dans sa carrière. Bien entendu, pour son père grossièrement pratique, l'étude des langues classiques était le comble de la folie ; Dorothée Gauss soutint son fils, gagna la partie, et le duc paya un cours de deux ans au lycée, où par sa maîtrise des classiques Gauss étonna ses professeurs comme ses condisciples. Les études philologiques l'attiraient fortement ; heureusement pour les sciences, l'attraction des mathématiques allait être la plus forte. En entrant au collège, Gauss possédait déjà toutes les souplesses de la langue latine, et la plupart de ses plus grandes œuvres sont écrites en latin. C'est un malheur à jamais regrettable que même l'exemple de Gauss ait été impuissant contre les marées de nationalisme fanatique qui ont submergé l'Europe après la Révolution française et la chute de Napoléon.

Au lieu du latin qui suffisait à Euler et à Gauss et que tout étudiant peut apprendre en quelques semaines, les savants doivent maintenant pouvoir lire deux ou trois langues en outre de la leur ; Gauss résista aussi longtemps qu'il put, mais il dut finir par se soumettre lorsque ses amis astronomes d'Allemagne le pressèrent d'écrire quelques-uns de ses travaux d'astronomie en allemand.

Gauss étudia au Collège Carolinien pendant trois ans, au cours desquels, il se pénétra des travaux les plus importants d'Euler, de Lagrange et surtout des *Principia* de Newton. Le plus grand honneur pour un grand homme est l'estime de ses pairs ; l'admiration qu'à dix-sept ans il avait éprouvée pour Newton ne s'affaiblit jamais dans ses ouvrages, Euler, Laplace, Lagrange, Legendre reçoivent l'épithète de "clarissimus" ; Newton, lui, est "summus".

Pendant qu'il était encore au collège, Gauss avait commencé les recherches en arithmétique supérieure qui devaient le rendre immortel ; sa puissance prodigieuse de calcul trouvait là son emploi. S'attaquant directement aux nombres eux-mêmes, il fit sur eux des expériences, découvrant, par induction, des théorèmes généraux dont les démonstrations exigeaient, même de lui, de grands efforts. C'est ainsi qu'il découvrit de nouveau "le joyau des mathématiques", "*theorema aureum*", auquel Euler était arrivé par induction, qui est connu sous le nom de loi de réciprocité quadratique ; Gauss est le premier qui en ait donné une démonstration (Legendre, lui, a omis dans celle qu'il tenta un point décisif). Le point de départ de la recherche est la question simple que se posent bien des débutants en arithmétique : combien y a-t-il de chiffres dans la période d'une fraction périodique ? Afin d'éclairer un peu le problème, Gauss a calculé les fractions décimales correspondant à toutes les fractions $1/n$, pour toutes les valeurs de n entre 1 et 1 000 ; il n'a pas trouvé les trésors qu'il cherchait, mais il a découvert quelque chose d'infiniment supérieur, c'est la loi de réciprocité quadratique. Comme elle est fort simple à expliquer, nous allons l'exposer en indiquant en même temps un des perfectionnements révolutionnaires que Gauss a introduits dans la nomenclature et la notation arithmétiques, celui de la congruence (tous les nombres dont nous parlons ci-après sont des nombres entiers).

Si la différence ($a - b$ ou $b - a$) de deux nombres a et b est divisible par le nombre m, nous disons que a et b sont congrus par rapport au module m, ou simplement congrus au module m, ce que nous exprimons en écrivant $a \equiv b \pmod{m}$: ainsi, $100 \equiv 2 \pmod{7}$, $35 \equiv 2 \pmod{11}$.

L'avantage de ce système est qu'il rappelle la manière dont nous écrivons les équations algébriques, enferme la notion quelque peu trompeuse de la divisibilité arithmétique dans une notation concise, enfin nous donne l'idée que nous tentons de transférer à l'arithmétique (bien plus difficile que l'algèbre) quelques-unes des manipulations qui en algèbre nous conduisent à des résultats intéressants. Par exemple, nous pouvons "additionner" des équations, et nous constatons que l'on peut aussi additionner des congruences, pourvu qu'elles aient toutes le même module, pour obtenir d'autres congruences.

Soient x un nombre inconnu, r et m des nombres donnés, r n'étant pas divisible par m. S'il existe un nombre x tel que $x^2 \equiv r \pmod{m}$, r est appelé résidu quadratique de m ; s'il n'en existe pas, r est appelé non-résidu quadratique de m.

Si r est un résidu quadratique de m, il doit être possible de trouver au moins un nombre x dont le carré, divisé par m, donne comme reste r ; si r est un non-résidu quadratique de m, il n'existe pas de nombre x dont le carré divisé par m donne le reste r. Ce sont les conséquences immédiates des définitions précédentes.

Par exemple, 13 est-il un résidu quadratique de 17 ? Si oui, il doit être possible de résoudre la congruence $x^2 = 13$ (mod. 17) ; en essayant 1, 2, 3,..., nous trouvons que $x = 8, 25, 42, 59...$ sont des solutions ($8^2 = 64 = 3 \times 17 + 13, 25^2 = 625 = 36 \times 17 + 13$ etc.) ; donc 13 est un résidu quadratique de 17. Mais la congruence $x^2 \equiv 5$ (mod. 17) n'a pas de solution ; donc 5 est un non-résidu quadratique de 17.

Il est maintenant naturel de se demander quels sont les résidus et les non-résidus quadratiques d'un nombre donné m. Notamment, étant donné m dans $x^2 = r$ (mod. m), quels sont les nombres r qui peuvent apparaître et les nombres r qui ne peuvent pas apparaître lorsque x passe par toutes les valeurs 1, 2, 3,... ?

Sans trop de difficulté on peut montrer qu'il suffit de répondre à cette question lorsque r et m sont des nombres premiers. Ainsi, nous posons de nouveau le problème : si p est un nombre premier donné, quels sont les nombres premiers q qui résolvent la congruence $x^2 \equiv q$ (mod. p) : c'est trop demander dans l'état actuel de l'arithmétique ; cependant, la situation n'est pas désespérée.

Il existe une remarquable réciprocité entre la paire de congruences : $x^2 \equiv q$ (mod. p), $x^2 \equiv p$ (mod. q) dans lesquelles p et q sont premiers ; on peut résoudre les deux congruences, ou bien toutes les deux sont insolubles, à moins que p et q divisés par 4 donnent pour reste 3, auquel cas une des congruences peut se résoudre et l'autre, non : telle est la loi de réciprocité quadratique.

Elle n'était pas aisée à démontrer, et Euler et Lagrange y avaient échoué. Gauss en donna la première démonstration à dix-neuf ans. Comme cette réciprocité a une importance capitale en arithmétique supérieure et dans bien des parties de l'algèbre, Gauss l'a retournée dans son esprit pendant plusieurs années, cherchant à en trouver la racine ; il a fini par en donner six démonstrations distinctes ; l'une d'elles dépend de la construction de polygones réguliers avec la règle et le compas.

Voici un exemple numérique : prenons d'abord $p = 5, q = 13$; puisque 5 et 13, divisés par 4, donnent comme reste 1, les deux congruences $x^2 \equiv 13$ (mod. 5) et $x^2 \equiv 5$ (mod. 13) doivent pouvoir se résoudre toutes les deux, ou bien aucune. C'est ce dernier cas qui se produit pour cette paire. Prenons ensuite $p = 13,\ q = 17$ qui, tous les deux, divisés par 4, donnent comme reste 1 ; nous avons $x^2 \equiv 17$ (mod.13) et $x^2 \equiv 13$ (mod. 17) : toutes les deux (ou ni l'une ni l'autre) doivent pouvoir se résoudre ; ici c'est le premier cas qui a lieu la première congruence a pour solutions $x = 2, 15, 28...$, la seconde $x = 8, 25, 42...$ Il reste à essayer seulement le cas où p et q donnent tous les deux 3 comme reste quand on les divise par 4 : prenons $p = 11,\ q = 19$ alors, d'après la loi, c'est une seule des deux congruences $x^2 \equiv 19$ (mod. 11) et $x^2 \equiv 11$ (mod. 19) qui doit pouvoir se résoudre en effet, la première n'a pas de solution, la seconde a 7, 26, 45...

La simple découverte de cette loi a été un événement notable. Le fait qu'elle a été trouvée par un jeune homme de dix-neuf ans prouvera à quiconque essaiera d'en faire la démonstration que Gauss était plus que simplement calé en mathématiques.

Lorsque Gauss quitta le Collège en octobre 1795, à dix-huit ans, pour entrer à l'Université de Goettingen, il ne savait pas encore quelle voie il suivrait définitivement, les mathématiques ou la philologie. Il avait déjà, à dix-huit ans, découvert la méthode des "moindres carrés", qui aujourd'hui est indispensable en géodésie, dans la réduction des observations, et en général dans tous les cas où il faut déduire d'un grand nombre d'opérations de mesure la valeur "la plus probable" de quelque chose. (On obtient la valeur la plus probable en faisant minimum la somme des carrés des "résidus" - en gros, des écarts par rapport à la valeur exacte supposée) ¡.Gauss partage l'honneur de cette découverte avec Legendre, qui a publié la méthode, de son côté, en 1806. Ce travail est le début de l'intérêt que Gauss a porté à la théorie des erreurs d'observation ; aujourd'hui, la loi de Gauss, de la distribution normale des erreurs et sa courbe en forme de cloche, sont familières à tous ceux qui font de la statistique, depuis ceux qui font les "tests" d'intelligence jusqu'aux manipulateurs sans scrupules du marché.

Le 30 mars 1796 marque un tournant dans la carrière de Gauss ; ce jour-là, exactement un mois avant ses vingt ans, Gauss décida définitivement en faveur des mathématiques ; l'étude des langues resta son dada durant toute sa vie ; mais à partir de ce jour mémorable il abandonna complètement la philologie.

Comme on l'a déjà dit au chapitre de Fermat, le polygone régulier de 17 côtés fut le dé dont la chute heureuse incita Gauss à franchir son Rubicon ; le même jour, il commença à tenir son journal scientifique (*Notizenjournal*) ; c'est un des documents les plus précieux de l'histoire des mathématiques ; la première inscription y consigne sa grande découverte.

Ce journal ne fut mis en circulation qu'en 1898, quarante-trois ans après la mort de Gauss, lorsque la Société Royale de Goettingen le reçut d'un petit-fils de Gauss pour l'examiner. Il comprend dix-neuf petites pages in-octavo et contient 146 énoncés extrêmement brefs de découvertes ou résultats de calculs ; le dernier est daté du 9 juillet 1814. On a publié un fac-similé de ce journal en 1917 dans le volume X (1re partie) de la collection des œuvres de Gauss, accompagné d'une analyse détaillée de son contenu par plusieurs mathématiciens compétents. On ne trouve certes pas dans ces notes toutes les découvertes que fit Gauss dans la période féconde de 1796 à 1814 ; mais beaucoup de celles qui s'y trouvent suffisent à établir la suprématie de Gauss, dans tous les domaines (les fonctions elliptiques par exemple), où certains de ses contemporains refusaient de croire qu'il les avait précédés. (Rappelons que Gauss est né en 1777.)

Les découvertes ensevelies pendant de nombreuses années dans ce journal, auraient suffi à établir une demi douzaine de grandes réputations, si elles avaient été publiées rapidement : certaines ne virent jamais le jour du vivant de Gauss, et lui-même, dans aucune de ses publications, n'a jamais prétendu qu'il avait devancé les autres quand ils finissaient par le rattraper. Mais on en possède maintenant la preuve écrite ; Gauss a réellement devancé certains mathématiciens qui ont mis en doute la parole de ses amis ; et ces anticipations n'étaient pas quelconques ; il en est qui sont devenues domaines majeurs des mathématiques du XIXe siècle.

Quelques notes indiquent que ce journal était strictement privé. Ainsi, à la date du 10 juillet 1796, on lit : EYRHKA ! num $= \Delta + \Delta + \Delta$. C'est l'écho du cri de triomphe d'Archimède "Eureka" et cela signifie que tout nombre entier positif est la somme de trois nombres triangulaires, tels que les nombres de la suite 0, 1, 3, 6, 10, 15... où chaque nombre (en dehors de zéro) est de la forme $\frac{1}{2}n(n+1)$, n étant un nombre entier positif quelconque ; autrement dit, tout nombre de la forme $8n+3$ est une somme de trois carrés impairs : $3 = 1^2+1^2+1^2; 11 = 1^2+1^2+3^2, 19 = 1^2+3^2+3^2$, etc. Il n'est pas facile de démontrer cela d'un trait de plume.

La note datée du 11 octobre 1796 est moins intelligible "Vicimus GEGAN". Quel est le dragon dompté cette fois par Gauss ? Ou encore, quel géant a-t-il vaincu le 8 avril 1799 quand il insère dans un élégant rectangle "REV.GALEN ?'.' Bien que le sens de ces deux notes soit à jamais perdu, les 144 qui restent sont pour la plupart assez claires. L'une en particulier est de première importance, comme nous le verrons à propos d'Abel et de Jacobi ; l'inscription, qui est du 19 mars 1797, montre que Gauss avait déjà découvert la double périodicité de certaines fonctions elliptiques ; il n'avait pas alors tout à fait vingt ans. Une autre note prouve qu'il avait reconnu la double périodicité dans le cas général. Cette découverte, s'il l'avait publiée, aurait suffi à le rendre célèbre ; mais il ne l'a jamais publiée.

Pourquoi Gauss a-t-il ainsi gardé par devers lui ses grandes découvertes ? Si nous en croyons ses propres dires, que nous relaterons tout à l'heure, cela est plus aisé à expliquer que son génie ; W. W. R. Ball en donne une version plus fantaisiste dans son histoire bien connue des mathématiques ; d'après cet historien, Gauss avait soumis son premier chef-d'œuvre, *Disquisitiones Arithmeticae* (Recherches d'Arithmétique), à l'Académie française des Sciences, et l'avait vu refuser dédaigneusement ; cette humiliation imméritée aurait affecté Gauss si profondément qu'il aurait dès lors résolu de ne publier que ce qui était de toute évidence au-dessus de la critique au double point de vue du fond et de la forme. Il n'y a rien de vrai dans cette légende diffamatoire pour l'Académie ; cela a été prouvé une fois pour toutes en 1935, lorsque des recherches approfondies dans les archives ont permis de prouver que les *Disquisitiones* n'ont jamais été soumises à l'Académie, et encore moins refusées par elle.

Parlant de lui, Gauss a déclaré qu'il n'entreprenait ses travaux scientifiques que pour obéir aux suggestions les plus profondes de sa nature, et que de savoir s'ils seraient jamais publiés pour l'instruction d'autrui était pour lui une considération tout à fait secondaire. Un autre aveu fait à l'un de ses amis explique à la fois la tenue de son journal et le retard de sa publication ; d'après lui, une telle foule d'idées se pressait dans son cerveau, avant l'âge de vingt ans, qu'il ne pouvait les contrôler et n'avait le temps que d'en enregistrer une petite fraction. Le journal ne contient qu'un court énoncé final du résultat de profondes recherches dont certaines l'avaient absorbé pendant des semaines. Admirant avec un enthousiasme juvénile les enchaînements à toute épreuve des démonstrations synthétiques dans lesquelles Archimède et Newton avaient enserré leurs inspirations, Gauss avait résolu de suivre leur grand exemple et de ne laisser derrière lui que des travaux bien finis, rigoureusement parfaits, auxquels on ne pourrait rien ajouter ni rien retrancher sans défigurer toute l'œuvre : à son avis, celle-ci doit se tenir d'elle-même, complète, simple et convaincante, sans qu'il reste aucune trace du travail accompli pour la mettre sur pied ; une cathédrale n'est pas une cathédrale, disait-il, tant que la dernière pièce d'échafaudage n'a pas disparu. Avec cet idéal devant les yeux, Gauss préférait polir un seul chef-d'œuvre plusieurs fois plutôt que de publier les grandes lignes de ses multiples découvertes comme il aurait pu le faire aisément. Il avait adopté comme sceau un arbre avec de rares fruits, accompagné de la devise *Pauca, sed matura* (peu, mais mûrs).

Sans doute, cette recherche de la perfection donnait des fruits d'une belle maturité, mais pas toujours d'une digestion facile. Comme toutes les traces des pas pour parvenir au but avaient été effacées, ce n'était pas chose aisée pour les successeurs de Gauss de découvrir le chemin qu'il avait suivi. Pour certains de ses travaux, il a donc fallu attendre des interprètes supérieurement doués eux-mêmes avant que les mathématiciens en général puissent les comprendre, voir leur portée pour des problèmes encore non résolus et aller de l'avant. Ses contemporains avaient beau le prier de se relâcher de son impassible perfection, pour faire progresser plus vite les mathématiques, Gauss n'y a jamais consenti ; ce n'est que longtemps après sa mort que l'on a su dans quelle mesure il avait prévu et devancé les mathématiques modernes dès avant 1800 ; s'il avait divulgué tout ce qu'il savait, les mathématiques auraient sans doute gagné un demi-siècle au moins : Abel et Jacobi seraient partis du point où Gauss avait laissé le travail, au lieu de dépenser beaucoup de leurs plus beaux efforts à découvrir de nouveau des choses que Gauss savait déjà avant qu'ils fussent nés, et les créateurs de la géométrie non-euclidienne auraient pu appliquer leur génie à d'autres objets. Gauss se qualifiait lui-même de "tout mathématicien" : il se faisait ainsi une injustice ; mais il ne faut pas oublier qu'à son époque, le mot "mathématicien" comprenait aussi ce que nous appellerions de nos jours un physicien mathématicien. Effectivement sa deuxième devise :

> "Nature, tu es ma déesse ; à tes lois
> Mes services sont liés..." [2]

résume sa vie entièrement consacrée aux mathématiques et aux sciences physiques de son temps. Par "tout mathématicien", il faut entendre qu'il ne laissait pas ses talents magnifiques s'éparpiller dans tous les champs où il aurait pu moissonner abondamment, comme il blâmait Leibniz de l'avoir fait ; non ! il se contentait de cultiver le plus grand de ses dons jusqu'à la perfection. Les trois années (octobre 1795-septembre 1798) passées à l'Université de Goettingen ont été les plus fécondes de la vie de Gauss. Grâce à la générosité du duc Ferdinand, le jeune homme n'avait pas à se préoccuper de moyens d'existence ; il était tout à son travail, ne se faisant que peu d'amis : un de ceux-ci, Wolfgang Bolyai, "l'esprit le plus rare que j'aie jamais connu", disait-il, devint son ami pour la vie. L'évolution de cette amitié et son importance dans l'histoire de la géométrie non-euclidienne est trop longue pour trouver sa place ici : le fils de Wolfgang, Jean Bolyai, a suivi en fait la même route que Gauss avait parcourue pour arriver à la création de la géométrie non-euclidienne, sans se douter que le vieil ami de son père l'eût devancé. Depuis 1795, Gauss, mettant en ordre les idées qu'il avait mûries depuis sa dix-septième année, méditait une grande étude sur la théorie des nombres ; elle prit maintenant forme définitive et en 1798 les *Disquisitiones Arithmeticae* étaient pratiquement terminées.

Pour se rendre compte par lui-même de tout ce qui avait déjà été fait en mathématiques supérieures et pour être certain de donner à ses prédécesseurs le crédit mérité, Gauss alla, en septembre 1798, à l'Université de Helmstedt, qui possédait une bonne bibliothèque scientifique. Sa renommée l'y avait précédé ; il fut cordialement accueilli par le bibliothécaire, en même temps professeur de mathématiques, Johann Friedrich Pfaff (1765-1825) chez qui il habita. Gauss et Pfaff devinrent de chauds amis ; la famille Pfaff vit d'ailleurs fort peu son hôte, car son chef, jugeant de son devoir de faire prendre un peu d'exercice à son jeune ami, plongé toute la journée dans ses études, allait se promener avec lui tous les soirs, en devisant de mathématiques. Comme Gauss était non seulement modeste, mais encore fort réservé sur ses propres travaux, Pfaff n'a probablement pas connu tout ce dont son ami était capable ; quant à Gauss, il admirait profondément le professeur (il était le mathématicien le plus connu en Allemagne), non seulement pour son excellence en mathématiques, mais pour la simplicité et la franchise de son caractère ; durant toute sa vie, Gauss n'a eu de l'aversion et du mépris que pour un type d'homme, celui qui prétend savoir et ne reconnaît pas ses erreurs lorsqu'il a tort.

Gauss passa l'automne de 1798 (il avait vingt et un ans) à Brunswick, faisant quelques voyages à Helmstedt et mettant la dernière main aux *Disquisitiones* ; il en avait espéré la prochaine publication, mais en raison de difficultés provenant de l'éditeur de Leipzig, le livre resta sous presse jusqu'en septembre 1801. En reconnaissance de tout ce que Ferdinand avait fait pour lui : Gauss lui dédia son œuvre : "Serenissimo Principi ac Domino Carolo Guillelmo Ferdinando."

Si jamais quelque mécène a mérité l'hommage de son protégé, c'est bien le duc Ferdinand. Comme le jeune génie, ayant quitté Goettingen, était fort inquiet de son avenir (il avait en vain cherché des élèves pour gagner sa vie), le duc vint à son aide, lui paya les frais d'impression de sa thèse de doctorat (1799, Université de Helmstedt) et lui servit une modeste pension qui lui permit de continuer ses travaux scientifiques sans être harcelé par la pauvreté. "Votre bonté", écrit Gauss dans sa préface, "m'a libéré de toutes autres responsabilités et m'a permis de me consacrer exclusivement à cette œuvre."

Avant de dire un mot des *Disquisitiones*, jetons un coup d'œil sur la thèse qui valut à Gauss son doctorat in absentia à l'Université de Helmstedt en 1799 : *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse* (Une nouvelle démonstration que toute fonction rationnelle entière à une variable peut être décomposée en facteurs réels du premier ou second degré). Il n'y a qu'une chose fausse dans cet énoncé ; les deux premiers mots semblent prouver que Gauss aurait simplement ajouté une preuve nouvelle à d'autres déjà connues ; il aurait dû omettre "nova", car il s'agit là de la première démonstration (nous en reparlerons plus loin) ; certains avant lui ont publié ce qu'ils considéraient comme des preuves de ce théorème habituellement qualifié de théorème fondamental de l'algèbre, mais aucun n'en avait donné de démonstration véritable. Intransigeant en matière de rigueur mathématique et logique sans aucune restriction, Gauss exigeait une démonstration et c'est lui qui donna la première. Un autre énoncé équivalent du problème dit que toute équation algébrique à une inconnue a une racine, assertion que les débutants admettent souvent comme acquise sans avoir la moindre idée de ce qu'elle signifie.

Si quelque étourdi griffonne un méli-mélo de symboles mathématiques, il ne s'ensuit pas que ceux-ci signifient quelque chose simplement parce qu'un œil inexpert les prend pour des mathématiques supérieures : l'assertion que toute équation algébrique a une racine est aussi discutable, tant que nous n'ajoutons pas de quelle sorte de racine il s'agit. Évidemment, nous sentons vaguement qu'un nombre et non pas une demi-livre de beurre satisfera à l'équation.

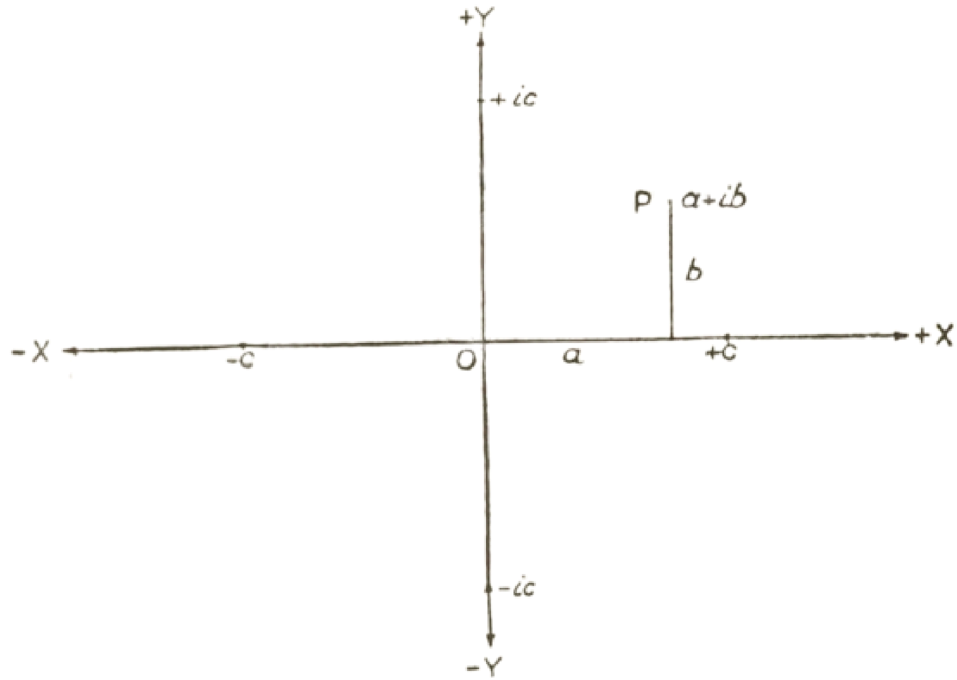
Gauss a rendu précis ce sentiment en démontrant que toutes les racines d'une équation algébrique quelconque sont des "nombres" de la forme $a + bi$, où a et b sont des nombres réels, c'est-à-dire des nombres qui correspondent aux distances, positives, nulles ou négatives, mesurées à partir d'un point fixe O sur une droite donnée, comme sur l'axe des x dans la géométrie cartésienne, et i est la racine carrée de -1. Ce nouveau type de nombre, $a + bi$, est appelé complexe.

Incidemment, Gauss a été un des premiers à donner un exposé cohérent des nombres complexes et à les interpréter comme définissant les points d'un plan, ainsi qu'on le fait aujourd'hui dans les manuels élémentaires d'algèbre.

Les coordonnées cartésiennes de P sont (a, b) ; le point P est aussi défini par $a + bi$; ainsi donc, à chaque point du plan correspond précisément un nombre complexe ; les nombres correspondant aux points de XOX' sont "réels", ceux correspondant aux points de YOY' sont des "imaginaires purs" (ils sont tous du type ic, où c est un nombre réel).

Le mot "imaginaire" est la grande calamité de l'algèbre, mais il est trop ancré dans le langage pour qu'on puisse l'en déraciner. On n'aurait jamais dû l'employer. Les traités d'algèbre élémentaire interprètent les nombres imaginaires au moyen de rotations. Ainsi, si nous interprétons la multiplication $\mathrm{i} \times c$, où c est réel, comme une rotation d'un angle droit, autour de O, du segment Oc, Oc vient sur OY ; une autre multiplication par i, savoir : $\mathrm{i} \times \mathrm{i} \times \mathrm{c}$, fait tourner Oc d'un autre angle droit, finalement Oc a tourné de deux angles droits, en sorte que $+Oc$ devient $-Oc$. Comme l'opération, multiplier par ii revient au même que multiplier par -1, et la multiplication par i a le même effet qu'une rotation de 90° ; ces interprétations se tiennent comme nous venons de le voir et nous pouvons écrire $\mathrm{ii} = -1$ dans les opérations, $-1 = \mathrm{i}^2$ en sorte que la rotation d'un angle droit est symbolisée par $\sqrt{-1}$.

Tout ceci, bien entendu, ne prouve rien, et n'a d'ailleurs pas l'intention de prouver quelque chose. Il n'y a rien à prouver ; nous assignons aux symboles et aux opérations d'algèbre des significations quelconques qui conduisent à quelque chose d'ordonné. Bien que l'interprétation par le moyen d'une rotation ne prouve rien, elle montre qu'il n'y a pas lieu de se plonger dans un ahurissement mystique à propos de ce qu'on a bien mal nommé des "imaginaires". Pour de plus amples détails, nous renvoyons le lecteur à presque tous les manuels d'algèbre élémentaire.



Gauss considérait le théorème que toute équation algébrique a une racine, dans le sens que nous venons d'expliquer, comme si important qu'il en a donné quatre démonstrations distinctes, la dernière à l'âge de soixante-dix ans. Aujourd'hui certains voudraient reporter le théorème du domaine de l'algèbre, qui se limite aux processus pouvant s'effectuer par un nombre fini d'échelons, à celui de l'analyse. Même, Gauss présumait que la courbe d'un polynôme est une courbe continue et que si le polynôme est de degré impair la courbe doit couper l'axe au moins une fois ; ceci est évident pour tout débutant en algèbre ; mais aujourd'hui ce n'est pas évident sans démonstration, et les tentatives de le démontrer conduisent à des difficultés liées aux notions de continuité et d'infini. Les racines d'une équation aussi simple que $x^2 - 2 = 0$ ne peuvent pas se calculer exactement au moyen d'un nombre déterminé d'échelons ; nous en dirons davantage à ce sujet quand nous étudierons Kronecker. Arrivons maintenant aux "*Disquisitiones Arithmeticae*."

Cet ouvrage a été le premier des chefs-d'œuvre de Gauss, et certains le considèrent comme le plus grand ; c'était son adieu aux mathématiques pures, en tant que l'intéressant exclusivement. Une fois cette œuvre publiée, en 1801 (Gauss avait vingt-quatre ans), il étendit son activité à l'astronomie, la géodésie, l'électromagnétisme, à la fois dans leurs aspects mathématique et pratique. Mais l'arithmétique était son premier amour, et plus tard il lui est arrivé d'exprimer parfois le regret de n'avoir jamais trouvé le temps d'écrire le second volume qu'il avait déjà dans la tête. Ce livre comprend sept sections ; il devait en avoir une huitième ; mais elle a été supprimée pour réduire les frais d'impression.

La première phrase de la préface décrit le but général de l'ouvrage. "Les recherches contenues dans ce volume appartiennent à cette partie des mathématiques qui traite des nombres entiers ainsi que des fractions, les nombres irrationnels étant toujours exclus."

Les trois premières sections traitent de la théorie des congruences et en particulier discutent à fond la congruence binôme $x^n = A$ (mod. p), où les nombres entiers donnés n et A sont arbitraires et

p premier ; l'entier inconnu est x. Cette belle théorie arithmétique a beaucoup de ressemblance avec la théorie algébrique correspondante de l'équation binôme $x^n = A$; mais dans ses parties particulièrement arithmétiques, elle est incomparablement plus riche et plus difficile que l'algèbre, qui ne présente aucune analogie avec l'arithmétique.

Dans la quatrième section, Gauss développe la théorie de résidus quadratiques ; c'est là qu'on trouve publiée pour la première fois la démonstration de la loi de réciprocité quadratique : cette démonstration est une frappante application de l'induction mathématique ; elle est un échantillon de cette ingénieuse logique, aussi solide qu'il se puisse trouver.

La cinquième section commence par la théorie des formes quadratiques binaires considérées au point de vue arithmétique et de l'étude des formes quadratiques ternaires, qui se trouvent être nécessaires pour compléter la théorie binaire. La loi de réciprocité quadratique joue un rôle fondamental dans cette étude difficile. Pour les premières formes ci-dessus, le problème général est d'étudier la solution, en nombres entiers x et y, de l'équation indéterminée

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$$

où a, b, c, m sont des entiers quelconques ;

Pour les deuxièmes formes, il s'agit de trouver en nombres entiers x, y, z, dans $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = m$ où a, b, c, d, e, f, m sont des entiers quelconques. Une question d'aspect aisé, mais en réalité difficile dans ce domaine est d'imposer à a, c, f, m, les restrictions nécessaires et suffisantes qui assurent l'existence d'une solution en nombres entiers x, y, z, de l'équation indéterminée $ax^2 + cy^2 + fz^2 = m$.

La sixième section applique la théorie précédente à divers cas spéciaux, par exemple à la solution, en nombres entiers, de $mx^2 + ny^2 = A$, où m, n, A sont des entiers quelconques. Dans la septième et dernière section, que beaucoup considèrent comme le couronnement de l'œuvre, Gauss applique les théories précédentes, en particulier celle des congruences binômes, à une admirable discussion de l'équation algébrique $x^n = 1$, où n est un entier donné, tissant ainsi en un groupement parfait l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie. L'équation $x^n = 1$ est la mise sous forme algébrique du problème de géométrie consistant à construire un polygone régulier de n côtés, ou à diviser la circonférence en n parties égales (voir à ce sujet tout manuel secondaire d'algèbre ou de trigonométrie) ; la congruence arithmétique $x^m \equiv 1 \pmod{p}$, où m et p sont des nombres entiers donnés et p un nombre premier, est la trame qui court à travers l'algèbre et la géométrie et qui donne au groupement sa claire signification. Cette œuvre d'art parfaite est accessible à tout étudiant qui possède l'algèbre usuelle, mais les *Disquisitiones* ne sont pas à recommander aux débutants ; il est vrai que la présentation concise de Gauss a été remaniée par des auteurs postérieurs qui lui ont donné une forme plus aisément assimilable.

Fermat, Euler, Lagrange, Legendre et d'autres avaient déjà trouvé autrement bien des parties de tout ceci ; mais Gauss a traité l'ensemble de son point de vue individuel, y ajoutant beaucoup du sien propre, et a déduit les résultats isolés de ses prédécesseurs de ses formules et de ses solutions générales. Par exemple, le beau résultat obtenu par Fermat, que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est une somme de deux carrés et ne peut l'être que d'une seule manière, résultat que Fermat a démontré par sa méthode difficile de la "descente indéfinie", découle tout naturellement de la discussion générale de Gauss des formes quadratiques binaires.

"Les *Disquisitiones Arithmeticae* sont passées dans l'histoire", a dit Gauss dans sa vieillesse, et il avait raison ; la publication de cette œuvre donnait à l'arithmétique supérieure une orientation nouvelle, et la théorie des nombres, qui aux XVIe et XVe siècles avait été un magma de résultats isolés spéciaux, prenait de la cohérence et s'élevait à la dignité d'une discipline mathématique de pair avec l'algèbre, l'analyse, et la géométrie.

On a appelé cette œuvre un "livre à sept sceaux". Sa lecture est ardue, même pour des mathématiciens consommés, mais les trésors qu'il renferme (et cache parfois) dans ses démonstrations concises et synthétiques sont maintenant à la portée de ceux qui veulent les cueillir, surtout grâce aux travaux de l'ami et disciple de Gauss, Pierre Gustave Lejeune Dirichlet (1805-1859) qui le premier rompit les sept sceaux.

Certains juges compétents ont tout de suite reconnu qu'il s'agissait d'un chef-d'œuvre. Legendre [3] a peut-être au début été porté à penser que Gauss ne lui avait pas rendu pleine justice ; cependant, dans sa préface à la deuxième édition de son propre traité sur la théorie des nombres (1808), qui a été en grande partie dépassé par les *Disquisitiones*, il parle de Gauss avec enthousiasme. Lagrange, lui aussi, l'a comblé de louanges : écrivant à Gauss le 31 mai 1804, il lui dit : "Vos *Disquisitiones* vous ont élevé du coup au rang des premiers mathématiciens, et j'estime que leur dernière section renferme les plus belles découvertes analytiques qui aient été faites depuis longtemps... Croyez, monsieur, que personne n'applaudit à vos succès plus sincèrement que moi."

La perfection classique du style des *Disquisitiones* fait qu'elles sont parfois lentes à assimiler ; lorsque des jeunes bien doués commencèrent à étudier à fond cette œuvre, ils ne purent pas s'en procurer d'exemplaires, en raison de la faillite d'un libraire. Eisenstein lui-même, le disciple favori de Gauss, n'en a jamais possédé un. Dirichlet a été plus heureux ; il emportait le livre dans tous ses voyages, et le mettait sous son oreiller quand il dormait ; avant de se coucher, il se battait avec certain paragraphe épineux dans l'espoir, souvent réalisé d'ailleurs, que dans la nuit il se réveillerait, pour trouver qu'une nouvelle lecture immédiate le rendait alors parfaitement clair. C'est à Dirichlet que l'on doit ce merveilleux théorème, que nous avons mentionné à propos de Fermat toute progression arithmétique

$$a \quad a+b \quad a+2b \quad a+3b...$$

où a et b sont des nombres entiers sans commun diviseur supérieur à 1, contient une infinité de nombres premiers ; ce fut démontré par l'analyse, et c'est là un miracle, car ce théorème concerne les nombres entiers, alors que l'analyse traite du continu, du non-entier.

Dirichlet a fait bien plus en mathématiques que ce développement des *Disquisitiones*, mais la place nous manque pour étudier sa vie ; nous regrettons aussi de n'en pas avoir pour étudier Eisenstein, un des brillants jeunes du début du XIXe siècle mort trop tôt, et dont Gauss, paraît-il, aurait dit (ce qui est incompréhensible pour la plupart des mathématiciens) : "Il n'y a eu que trois mathématiciens

[3] Adrien Marie Legendre (1753-1833) ; la place nous manque pour donner l'exposé de sa vie ; beaucoup de ses meilleurs travaux ont été absorbés ou démarqués par de plus jeunes mathématiciens.

qui ont fait époque, Archimède, Newton et Eisenstein". Il est impossible de vérifier si Gauss a vraiment tenu ce propos ; mais s'il l'a dit, n'oublions pas qu'il n'était pas homme à parler légèrement.

Avant de quitter ce domaine de l'activité de Gauss, nous pouvons nous demander pourquoi il ne s'est jamais attaqué au dernier théorème de Fermat ; il nous a donné la réponse lui-même. En 1816, l'Académie de Paris proposa précisément la démonstration, ou la réfutation, de ce théorème comme thème de son concours pour la période 1816-18. Olbers, écrivant de Brême à Gauss, le 7 mars 1816, essaie de l'engager à concourir : "Il me paraît bon, mon cher Gauss, que vous vous y attaquiez." Mais le cher Gauss résista au tentateur ; dans sa réponse, deux semaines plus tard, il donne son opinion sur le dernier théorème de Fermat : "Je vous suis très obligé de vos nouvelles concernant le prix de Paris ; mais j'avoue que le théorème de Fermat, comme proposition isolée, présente fort peu d'intérêt pour moi, parce que je pourrais aisément énoncer une multitude de pareilles propositions, que nul ne pourrait ni prouver ni réfuter." Gauss continue en disant que la question l'a poussé à revenir sur certaines de ses anciennes idées en vue d'une grande extension de l'arithmétique supérieure. Ceci vise sans doute la théorie des nombres algébriques (dont nous parlerons plus loin), que Kummer, Dedekind et Kronecker devaient établir chacun de leur côté. La théorie à laquelle pense Gauss est une de ces choses, déclare-t-il, où il est impossible de prévoir le progrès que l'on peut réaliser vers un but éloigné difficilement perceptible dans l'obscurité ; pour réussir dans une recherche aussi difficile, il faudrait qu'une étoile porte-bonheur se levât à l'horizon, et pour le moment, ajoute-t-il, ses nombreuses occupations, par ailleurs, l'empêchent de se livrer à des méditations de cet ordre, comme il le faisait "à l'époque heureuse des années 1796-98 où je façonnais les principaux points des *Disquisitiones Arithmeticae.* Et encore suis-je convaincu que si j'ai autant de chance que j'ose l'espérer et si je réussis à faire quelques-uns des pas essentiels dans cette théorie, le théorème de Fermat apparaibas essentiels comme un des corollaires les moins intéressants".

Tous les mathématiciens regrettent probablement aujourd'hui que Gauss ait été détourné de sa marche dans l'obscurité par "un couple de ces mottes de boue que nous appelons planètes" (ce sont ses propres expressions), qui ont brillé inopinément dans le ciel nocturne et l'ont écarté de sa route. Des mathématiciens de moindre envergure que Gauss, Laplace par exemple, auraient certes pu faire tout ce que Gauss a fait dans le calcul des orbites de Cérès et de Pallas, même si le problème était de ceux que Newton classait parmi les plus difficiles de l'astronomie mathématique. Mais le brillant succès de Gauss en ces matières le classa immédiatement premier mathématicien d'Europe et lui valut une situation confortable qui lui permit dès lors de travailler dans une tranquillité d'esprit relative ; peut-être, après tout, ces misérables mottes de boue ont elles été ses étoiles porte-bonheur.

La seconde grande période de la carrière de Gauss débuta le premier jour du XIXe siècle, qui est aussi marqué d'une boule blanche dans l'histoire de la philosophie et de l'astronomie. Depuis que Sir William Herschel (1738-1822) avait, en 1781, découvert la planète Uranus, ce qui portait le nombre des planètes alors connues au nombre philosophiquement satisfaisant de sept, les astronomes s'étaient mis activement à chercher dans le ciel d'autres membres de la famille solaire qui, d'après la loi de Bode, devaient exister entre les orbites de Mars et de Jupiter. Ces recherches furent vaines jusqu'à ce que Giuseppe Piazzi (1746-1826), de Palerme, le jour de l'ouverture du XIXe siècle, observât un astre que l'on prit d'abord pour une petite comète se rapprochant du soleil, mais que l'on reconnut ensuite comme une nouvelle planète, baptisée plus tard Cérès, la première de l'essaim des petites planètes connues aujourd'hui.

Par un des verdicts les plus ironiques que l'on ait connus au cours du long procès de l'expérience contre la spéculation, la découverte de Cérès coïncidait avec la publication d'une attaque sarcastique du fameux philosophe Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) contre la présomption des astronomes, à la recherche d'une huitième planète. S'ils prêtaient quelque attention à la philosophie, déclarait Hegel, ils verraient immédiatement qu'il ne peut y avoir que sept planètes, pas une de plus, pas une de moins. De pareilles recherches étaient donc une perte de temps stupide ; sans doute, ce léger lapsus de Hegel a été expliqué tant bien que mal par ses disciples, mais ils n'ont cependant pas supprimé les centaines de petites planètes qui se rient de son anathème olympien.

Il n'est pas sans intérêt de noter au passage ce que Gauss pensait des philosophes qui se mêlent de questions scientifiques auxquelles ils n'ont rien compris ; ceci vise en particulier les philosophes qui grignotent les fondations des mathématiques sans avoir au préalable aiguisé leur gros bec sur quelque dur édifice mathématique. Inversement, ceci explique pourquoi Bertrand A. W. Russell (1872), Alfred North Whitehead (1861), David Hilbert (1862), de notre temps, ont apporté des contributions importantes à la philosophie des mathématiques : ce sont des mathématiciens.

Écrivant à son ami Schumacher le 1er novembre 1844, Gauss déclare : "Vous voyez la même sorte de chose (l'incompétence mathématique) chez les philosophes contemporains Schelling, Hegel, Nees von Essenbeck, et leurs successeurs ; ne vous font-ils pas dresser les cheveux sur la tête avec leurs définitions ? Lisez dans l'histoire de la philosophie ancienne ce que les grands hommes de cette époque, Platon et d'autres (j'en excepte Aristote) donnaient en manière d'explications. Et même avec Kant lui-même, ce n'est souvent pas beaucoup mieux ; à mon avis, sa distinction entre les propositions analytiques et synthétiques est une des choses qui tombent dans la banalité ou bien sont fausses." Lorsqu'il écrivait ces lignes, en 1844, Gauss était déjà en pleine possession de la géométrie non-euclidienne, qui par elle-même était une réfutation suffisante de ce que dit Kant sur "l'espace" et la géométrie, et il lui était permis de se montrer indûment dédaigneux.

Il ne faut pas conclure de cet exemple isolé concernant les technicités purement mathématiques que Gauss n'appréciait pas la philosophie ; tous les progrès philosophiques avaient pour lui beaucoup d'attrait, bien qu'il désapprouvât souvent les moyens par lesquels ils avaient été obtenus. "Il y a des problèmes", dit-il un jour, "à la solution desquels j'attacherais une importance infiniment plus grande qu'à ceux des mathématiques, par exemple concernant l'éthique, ou nos relations avec Dieu, ou encore notre destinée et notre avenir ; mais leur solution nous dépasse entièrement et se trouve complètement en dehors du domaine de la science."

Cérès a été un malheur pour les mathématiques. Pour comprendre comment Gauss a pu s'y appliquer avec une ardeur aussi exclusive, il faut nous rappeler que la figure géante de Newton, disparu depuis plus de soixante-dix ans, dominait encore les mathématiques en 1801. Les "grands" mathématiciens de ce temps étaient ceux qui, comme Laplace, s'acharnaient à parachever l'édifice newtonien de la mécanique céleste ; les mathématiques se confondaient encore avec la physique mathématique, telle qu'elle existait alors, et l'astronomie mathématique. La vision des mathématiques comme science autonome, qu'Archimède avait eue au IIIe siècle avant J.-C., avait été effacée par l'éclat de la splendeur de Newton, et ce n'est que Gauss qui, dans sa jeunesse, eut de nouveau l'intuition que les mathématiques constituent une science ayant sa mission propre ; mais cette insignifiante motte de boue, la petite planète Cérès capta son esprit sans égal, alors qu'il était sur ses vingt-quatre ans, et qu'il s'engageait à grands pas dans ces régions encore vierges qui devaient devenir l'empire des mathématiques modernes.

Mais Cérès n'est pas la seule à blâmer ; ce don magnifique du calcul de tête, dont les découvertes empiriques ont donné aux mathématiques les *Disquisitiones Arithmeticae*, joua aussi un rôle fatal dans la tragédie. Il y avait en outre son père et ses amis impatients de voir le jeune Gauss trouver quelque position lucrative ; n'ayant aucune notion de la nature des travaux qui faisaient de lui un reclus silencieux, ils le pensaient légèrement détraqué. Et voici qu'à l'aube du siècle nouveau, l'occasion que Gauss avait manquée jusqu'ici se présentait maintenant à lui. Voici qu'une nouvelle planète avait été découverte, mais dans une position qui rendait son observation extrêmement difficile ; calculer une orbite au moyen des maigres données dont on disposait était une tâche à donner du mal à Laplace lui-même ; Newton avait déclaré que de tels problèmes sont les plus difficiles en astronomie mathématique. Les calculs nécessaires pour déterminer l'orbite de Cérès avec une exactitude suf-fisante pour assurer que celle-ci n'échapperait pas aux télescopes dans sa ronde autour du soleil, décourageraient peut-être bien des machines à calculer de nos jours ; mais pour un jeune homme doué d'une mémoire surhumaine qui le dispensait de se servir d'une table de logarithmes quand il était trop pressé ou qu'il avait la paresse d'aller la chercher, toute cette arithmétique de calculs interminables (*logistica*, mais non *arithmetica*) était un jeu d'enfant.

Pourquoi ne pas s'abandonner à son vice préféré, calculer comme il n'avait jamais calculé auparavant, déterminer cette orbite difficile, pour la plus grande joie et l'admiration sincère des arbitres de l'élégance mathématique, et permettre ainsi, un an plus tard, aux patients astronomes de retrouver Cérès à la place même où la loi de gravitation universelle de Newton décrétait qu'elle devait se trouver, si toutefois la loi était bien une loi de la nature ? Pourquoi n'aurait-il pas fait cela, pourquoi n'aurait-il pas tourné le dos à la vision irréelle d'Archimède et oublié ses découvertes incomparables qui, dans son journal, attendaient leur développement ? Pourquoi, en un mot, ne pas être populaire ? La générosité du Duc, partant toujours d'un si bon cœur avait néanmoins blessé l'orgueil du jeune homme dans ses fibres les plus secrètes ; honneurs, gloire d'être reconnu et accepté comme "grand" mathématicien à la mode du jour avec la suite probable, l'indépendance au point de vue matériel, tout cela était maintenant à sa portée, Gauss, le Dieu des mathématiques de tous les temps, avança la main et cueillit les fruits funestes d'une renommée facile dans sa propre génération.

Pendant vingt ans, les rêves sublimes dont Gauss enfant avait noté les éclairs fugitifs, avec une joie sans mélange, sur son journal, restèrent figés, sinon oubliés. Cérès fut retrouvée à l'endroit précis où les calculs détaillés et merveilleusement ingénieux du jeune Gauss avaient prédit qu'elle devait l'être. Après Cérès, Pallas, Vesta, Junon et d'autres sœurs de la minuscule Cérès furent rapidement dépistées par des télescopes fureteurs en dépit de Hegel ; leurs orbites, elles aussi, se conformèrent aux calculs de Gauss. Des calculs qui auraient demandé trois jours de rude labeur à Euler (c'est un de ces calculs, dit-on, qui le rendit aveugle) étaient maintenant de simples exercices de quelques heures ; Gauss en avait établi la méthode, la routine. Pendant les vingt ans qui suivirent, la majeure partie de son temps fut consacrée aux calculs astronomiques.

Mais même un travail aussi terne ne pouvait stériliser le génie créateur de Gauss. En 1809, il publia son second chef-d'œuvre, *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium* (Théorie du mouvement des corps célestes autour du soleil suivant des sections coniques), dans lequel une étude complète de la détermination des orbites des planètes et des comètes à partir des données expérimentales, comprenant l'analyse difficile des perturbations, établit la loi qui pendant de longues années a régi les calculs de l'astronomie pratique. C'était une œuvre magnifique, mais pas aussi grande que celle que Gauss aurait aisément menée à bien s'il avait pu développer les aperçus qui dormaient négligés dans son journal ; aucune nouvelle découverte essentielle n'a été ajoutée aux mathématiques par la *Theoria motus*.

Après que Cérès eut été retrouvée, la gloire arriva rapidement. Laplace salua d'emblée le jeune mathématicien comme son égal et quelque temps après comme son supérieur. Un jour, comme le baron Alexandre de Humboldt (1769-1859), le fameux explorateur et amateur de sciences, demandait à Laplace quel était le plus grand mathématicien d'Allemagne, Laplace répondit : "Pfaff". - "Que faites-vous de Gauss ?" répliqua Humboldt qui à ce moment appuyait la candidature de Gauss à la direction de l'Observatoire de Goettingen : "Oh", dit Laplace, "Gauss est le plus grand mathématicien du monde.".

La décade qui suivit l'épisode de Cérès apporta à Gauss à la fois beaucoup de bonheur et de souci. Même à ces débuts de sa glorieuse carrière, il n'était pas sans détracteurs ; des hommes éminents qui avaient l'oreille des classes cultivées tournaient en ridicule ce jeune homme de vingt-quatre ans qui perdait son temps à calculer l'orbite d'une minuscule planète ; Cérès pouvait être la déesse des moissons, ces plaisantins estimaient qu'il ne pousserait sur la nouvelle planète aucun grain susceptible d'enrichir le marché de Brunswick le samedi après-midi.

Les mêmes snobs se moquèrent de lui de la même façon lorsque trente ans plus tard il posa les fondements de la théorie mathématique de l'électromagnétisme et inventa le télégraphe électrique. Gauss les laissait à leurs railleries ; il ne leur répliqua jamais publiquement, mais dans l'intimité il exprimait ses regrets que des hommes d'honneur et des prêtres de la science pussent se ridiculiser ainsi par leur petitesse. Pendant ce temps, il poursuivait son œuvre, recevant avec reconnaissance les honneurs que les Sociétés savantes d'Europe lui prodiguaient, sans qu'il les ait jamais recherchés.

Le Duc de Brunswick avait augmenté sa pension de jeune homme, ce qui lui permit de se marier, le 9 octobre 1805, à l'âge de vingt-huit ans ; il épousa Johanna Osthof, de Brunswick. Écrivant à son vieil ami d'université, Wolfgang Bolyai, trois jours après s'être fiancé, Gauss lui exprimait son bonheur : "La vie se présente encore devant moi comme un printemps éternel avec de nouvelles et brillantes couleurs."

Il eut, de son mariage, trois enfants : Joseph, Minna et Louis ; on dit que le premier avait hérité de son père le don du mental. Sa femme mourut le 11 octobre 1809, après la naissance de Louis, laissant son mari dans la désolation ; son printemps éternel avait cédé la place à l'hiver. Bien qu'il se soit marié de nouveau l'année suivante (4 août 1810), dans l'intérêt de ses jeunes enfants, bien longtemps après, il parlait encore, avec émotion de sa première femme. La seconde, Minna Waldeck, qui avait été l'amie intime de l'autre, lui donna deux fils et une fille.

D'après certains bruits, Gauss ne s'accorda pas très bien avec ses fils, sauf peut être avec Joseph qui ne lui donna, paraît-il, aucun ennui. Deux, dit-on, quittèrent le pays et s'en allèrent aux États-Unis. Comme un de ces fils a laissé, paraît-il, de nombreux descendants en Amérique, dont plusieurs vivent encore, il est impossible d'en dire davantage, sauf que l'un a gagné une grosse fortune à Saint-Louis à l'époque de la navigation commerciale intérieure ; tous les deux ont été, au début, fermiers au Missouri. Gauss a toujours été heureux avec ses filles. Une légende exactement contraire à la précédente (recueillie il y a quarante ans auprès de vieilles personnes dont les souvenirs concernant la famille Gauss peuvent être tenus pour dignes de foi) veut que Gauss ait toujours été bon pour ses fils, mais que certains de ceux-ci, assez indisciplinés, aient causé à leur père des inquiétudes sans fin. Il y a plutôt lieu de croire que la mémoire de son père portait Gauss à traiter ses enfants avec douceur.

En 1808, Gauss perdit son père. Deux ans auparavant il avait subi une perte plus cruelle en la personne de son bienfaiteur, qui périt dans de tragiques circonstances. Le duc Ferdinand de Brunswick n'était pas seulement un protecteur éclairé et un guide bienveillant pour les savants ou apprentis savants ; il était aussi un soldat de premier ordre, qui avait mérité les chaudes félicitations de Frédéric le Grand pour sa bravoure et ses talents militaires au cours de la Guerre de Sept ans (1756-1763).

À l'âge de soixante-dix ans, après avoir rempli, sans succès, une mission à Saint-Pétersbourg en vue d'obtenir pour l'Allemagne l'aide de la Russie, le duc reçut le commandement des forces prussiennes qui allaient tenter un effort désespéré pour arrêter l'armée française sous les ordres de Napoléon ; la bataille d'Austerlitz était déjà de l'histoire et la Prusse se trouvait isolée en face d'un ennemi incontestablement supérieur. Ferdinand fit face aux Français à Auerstædt et à Iéna, subit une défaite désastreuse et fut lui-même très grièvement blessé ; il regagna son foyer.

Le grand Napoléon avait alors son quartier général à Halle ; une députation de Brunswick se rendit auprès de lui pour implorer la générosité de l'Empereur des Français victorieux, en faveur du brave vieillard qu'il venait de battre. Le puissant Empereur consentirait-il à violer un point d'étiquette militaire et à laisser son ennemi vaincu mourir en paix à son foyer ? Le duc, lui assurait-on, n'était plus dangereux ; il était mourant.

Napoléon était dans un de ses mauvais jours et dans un accès de colère, non seulement il refusa, mais il accompagna son refus d'insultes superflues à l'égard de son honorable adversaire, en tournant en dérision les capacités militaires de ce mourant. Il ne restait plus à la députation ainsi humiliée que d'essayer d'épargner à leur noble maître la disgrâce de la mort en prison.

À cette époque, Gauss habitait Brunswick ; sa maison était sur la grande route ; un matin de la fin d'automne, il vit passer hâtivement devant sa porte une voiture d'ambulance : elle emmenait à Altona le duc mourant, en fuite. Ému au delà de toute expression, Gauss voyait ainsi l'homme qui avait été pour lui plus qu'un père, se sauvant pour aller mourir en cachette comme le dernier des criminels. Il ne dit rien sur le moment, et peu de chose ensuite ; mais ses amis remarquèrent que son caractère peu communicatif s'assombrit encore davantage et que son naturel, déjà toujours sérieux, le devint encore plus. Comme Descartes pendant sa jeunesse, Gauss avait horreur de la mort ; le décès d'un ami proche le plongeait dans une terreur angoissante ; il avait en lui trop de vie pour considérer froidement la mort.

Le duc mourut le 10 novembre 1806 à Altona dans la maison paternelle. Une fois son généreux protecteur disparu, il devenait indispensable pour Gauss de trouver quelque moyen d'existence assuré pour entretenir sa famille. Cela ne présentait aucune difficulté, car la renommée du jeune mathématicien s'était répandue dans les coins les plus reculés d'Europe. Saint-Pétersbourg était désireux de l'avoir pour succéder à Euler, qui n'avait jamais été remplacé dignement depuis sa mort en 1783 ; une proposition formelle et flatteuse fut adressée à Gauss en 1807. Alexandre de Humboldt et d'autres amis haut placés, regrettant de voir l'Allemagne perdre le plus grand mathématicien du monde, se remuèrent activement et Gauss fut nommé directeur de l'Observatoire de Goettingen avec le privilège (et le devoir en cas de besoin) de donner des cours de mathématiques aux étudiants de l'Université.

Sans aucun doute, Gauss aurait pu obtenir une chaire de professeur, mais il préféra l'Observatoire, qui lui offrait de plus grandes perspectives de loisirs pour se livrer à des recherches ininterrompues. Il serait exagéré de dire que Gauss haïssait le professorat, mais l'enseignement à des étudiants ordinaires ne l'intéressait pas ; ce n'est que lorsqu'un vrai mathématicien lui rendait visite que Gauss, assis à une table avec ses élèves, donnait libre cours à ses théories et dévoilait le secret de ses méthodes dans ses leçons parfaitement préparées. Mais de pareils stimulants étaient malheureusement rares et la plupart des étudiants qui prenaient à Gauss un temps précieux auraient mieux fait de s'appliquer à autre chose qu'aux mathématiques. Écrivant en 1810 à son ami intime l'astronome et mathématicien Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), Gauss lui dit : "Cet hiver, je fais deux séries de cours à trois étudiants, dont l'un a une préparation médiocre, l'autre plus que médiocre, et le troisième manque totalement et de préparation et de capacité. Ce sont les fardeaux de la profession mathématique."

Le traitement que Gauss recevait de Goettingen, à cette époque, était modeste, mais suffisant pour ses simples besoins et ceux de sa famille.

Le luxe n'avait jamais tenté le prince des mathématiciens, dont la vie avait été consacrée, en toute simplicité, à la science longtemps avant l'âge de vingt ans. Comme l'écrit son ami Sartorius von Waltershausen : "Tel il était dans sa jeunesse, tel il est demeuré dans sa vieillesse jusqu'au jour de sa mort, le Gauss simple et sans affectation : une petite salle d'études, une petite table de travail recouverte de drap vert, un pupitre peint en blanc, un divan étroit et, après ses soixante-dix ans, un fauteuil, une lampe à abat-jour, une chambre à coucher sans feu, une nourriture frugale, une robe de chambre et une calotte de velours, tels étaient tous ses besoins."

En 1807, les vainqueurs d'Iéna et d'Auerstædt levèrent sur les habitants de l'Allemagne de très lourds impôts. Comme professeur et astronome à Goettingen, Gauss fut taxé de 2 000 francs ; il lui était absolument impossible de payer cette somme exorbitante. Peu de temps après, Gauss reçut de son ami et collègue astronome Olbers une lettre contenant le montant de l'impôt et exprimant son indignation de voir un érudit soumis à une aussi mesquine extorsion ; remerciant son généreux ami de sa sympathie, Gauss lui retourna les fonds.

Mais tous les Français n'étaient pas aussi profiteurs que Napoléon ; peu de temps après le renvoi de l'argent à Olbers, Gauss reçut de Laplace un petit mot amical lui disant qu'il avait payé les

2 000 francs pour le plus grand mathématicien du monde, et considérait que c'était un honneur pour lui-même de pouvoir soulager les épaules de son ami de cette charge imméritée. Comme la somme avait été payée par Laplace à Paris, Gauss ne put pas la lui retourner ; néanmoins il refusa d'accepter ce secours ; une aubaine inattendue (et non sollicitée) lui permit de rembourser Laplace avec les intérêts au cours du change ; un de ses admirateurs de Francfort, sachant que Gauss ne voulait pas accepter de secours, lui envoya 1 000 florins en gardant l'anonymat. Ne pouvant trouver le donateur Gauss fut bien forcé d'accepter le don.

La mort de son ami le duc Ferdinand, l'état lamentable de l'Allemagne à cette époque, les embarras d'argent, la perte de sa première femme, tout cela réuni contribua à altérer la santé de Gauss et à lui rendre la vie malheureuse vers ses trente ans ; une prédisposition constitutionnelle à l'hypocondrie, aggravée par un surmenage continuel, n'était pas faite pour arranger les choses. Il ne confiait pas ses malheurs à ses amis, avec lesquels sa correspondance restait toujours sereine ; une fois seulement il fit ses confidences à un manuscrit de mathématique. À l'Observatoire de Goettingen, Gauss reprenait parfois quelqu'une des questions les plus importantes notées dans son journal : dans une note manuscrite sur les fonctions elliptiques, le texte purement scientifique est brusquement interrompu par ces mots écrits finement au crayon : "La mort me serait plus chère qu'une vie pareille." Le travail lui servait de remède à ses maux.

Les années 1811-12 furent plus brillantes ; sa deuxième femme soignait bien ses petits enfants et Gauss commençait à avoir un peu de tranquillité. Ensuite, presque exactement un an après son second mariage, la grande comète de 1811, d'abord observée minutieusement par Gauss au crépuscule du 22 août, se mit à briller d'un éclat inattendu ; c'était là un adversaire de taille, sur lequel Gauss pouvait éprouver les armes qu'il avait forgées pour subjuguer les petites planètes. Ses armes se révélèrent de première trempe. D'un côté les peuples superstitieux de l'Europe d'alors, suivant de leurs yeux terrifiés l'admirable spectacle du cimeterre flamboyant s'avançant vers le Soleil, voulaient voir dans cette lame de feu un avertissement précis du ciel ; le Souverain Maître était furieux contre Napoléon et lassé de son impitoyable tyrannie. De son côté, Gauss avait la satisfaction de voir la comète suivre le trajet qu'il avait calculé pour elle jusqu'à la dernière décimale ; mais il ne fut pas seul à voir ses prédictions se réaliser celles des esprits crédules le furent également quand ils apprirent l'incendie de Moscou et l'anéantissement de la Grande Armée de Napoléon dans les plaines glacées de la Russie.

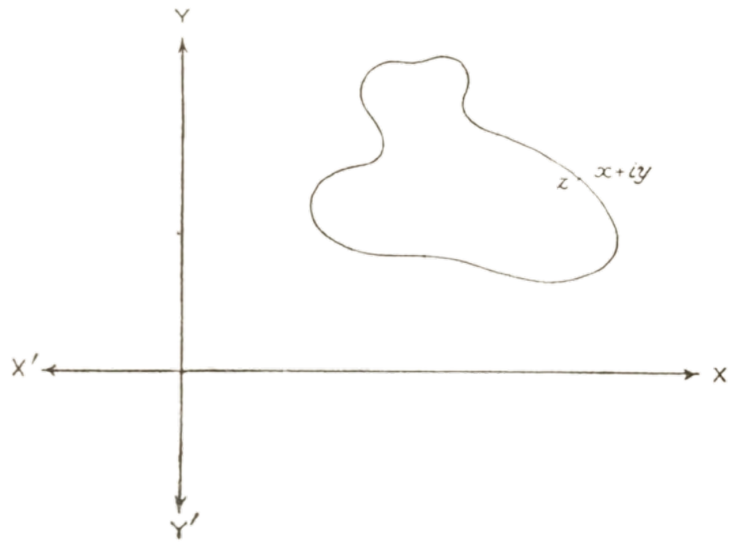
C'est là un des rares exemples où l'explication populaire s'accorde avec les faits et conduit à des conséquences plus importantes que l'explication scientifique. Napoléon lui-même possédait une certaine crédulité, il conciliait ses œuvres guerrières avec la foi en une Providence impénétrable et bienfaisante, et se considérait comme l'Homme du Destin. Il n'est pas impossible que le spectacle céleste d'une innocente comète déployant sa magnifique queue à travers le ciel ait produit une vive impression sur le subconscient d'un homme comme Napoléon et ait brouillé son jugement. Le respect quasi superstitieux de ce grand homme pour les mathématiques et les mathématiciens ne leur est pas d'un grand crédit bien qu'il ait été souvent cité comme une de leurs principales justifications. En dehors d'une appréciation assez fruste de la valeur des mathématiques dans les questions militaires, où leur utilité saute aux yeux des plus bornés, Napoléon n'avait aucune idée de ce que signifiaient les mathématiques, telles que les pratiquaient des maîtres comme ses contemporains Lagrange, Laplace et Gauss. Après une étude rapide des mathématiques élémentaires et banales à l'école, Napoléon se tourna trop tôt vers d'autres objectifs pour confirmer ce qu'il promettait dans ce domaine, où il ne progressa plus jamais. Bien qu'il paraisse incroyable qu'un homme de la capacité avérée de Napoléon ait pu sous-estimer à ce point les difficultés de questions échappant à sa compréhension, jusqu'à prétendre patronner Laplace, il eut néanmoins l'audace plaisante d'assurer à l'auteur de la Mécanique Céleste qu'il lirait son livre dans le premier mois qu'il aurait de libre. Newton et Gauss auraient sans doute été à la hauteur de cette tâche ; Napoléon aurait probablement dans ce mois tourné les pages sans beaucoup se fatiguer.

C'est une satisfaction de constater que Gauss fut trop fier pour aller s'incliner devant le grand Napoléon, et faire appel à la vanité de l'Empereur en lui demandant au nom de son respect notoire pour toutes les choses mathématiques, de lui faire remise des 2 000 francs d'impôt, comme certains amis mal inspirés de Gauss l'avaient engagé à le faire. Napoléon aurait probablement été flatté d'exercer sa clémence. Mais Gauss ne pouvait oublier la mort du duc Ferdinand ; il sentit que pour lui et pour les mathématiques, ce culte de toute sa vie, il valait mieux ne rien devoir à la condescendance de Napoléon.

L'année 1811 aurait pu marquer aussi bien un jalon dans l'histoire des mathématiques, comparable à celui de 1801, l'année de l'apparition des *Disquisitiones Arithmeticae*, si Gauss avait publié la découverte qu'il confia uniquement à Bessel. S'étant complétement assimilé les nombres complexes et leur représentation géométrique comme points du plan de la géométrie analytique, Gauss se proposa de résoudre le problème de ce qu'on appelle aujourd'hui les fonctions analytiques des nombres complexes.

Le nombre complexe $x + \mathrm{i}y$, où i est le symbole de $\sqrt{-1}$, représente le point (x, y) ; pour abréger, nous remplacerons $x + \mathrm{i}y$ par la lettre z. Lorsque x et y prennent, indépendamment l'un de l'autre, des valeurs réelles d'une manière continue déterminée, le point z se déplace sur le plan, évidemment pas au hasard, mais d'une manière déterminée par les valeurs admises pour x et y. Toute expression contenant z telle que z^2 ou $\frac{1}{z}$ etc., qui prend une valeur définie unique lorsqu'on assigne une valeur à z, s'appelle une fonction uniforme de z ; nous désignerons cette fonction par $f(z)$. Ainsi donc, si $f(z)$ est la fonction particulière z^2 de telle sorte que $f(z) = (x+\mathrm{i}y)^2 = x^2 + 2\mathrm{i}xy + \mathrm{i}^2y^2 = x^2 - y^2 + 2\mathrm{i}xy$ (puisque $\mathrm{i}^2 = -1$) il est clair que lorsqu'on assignera une valeur quelconque à z, c'est-à-dire à $x + \mathrm{i}y$, par exemple $x = 2, y = 3$ (en sorte que $z = 2 + 3\mathrm{i}$) une valeur de $f(z)$ se trouvera de ce fait exactement déterminée ; ici, pour $z = 2 + 3\mathrm{i}$ nous aurons $z^2 = -5 + 12\mathrm{i}$. Ce ne sont pas toutes les fonctions uniformes $f(z)$ qui sont étudiées dans la théorie des fonctions d'une variable complexe ; seules les fonctions monogènes sont soumises à une étude approfondie ; nous donnerons la raison de ce choix exclusif quand nous aurons expliqué ce qu'on entend par fonction “monogène ”.

Supposons que z se meuve pour occuper une autre position z' ; la fonction $f(z)$ prend une autre valeur $f(z')$ obtenue en substituant z' à z. Divisons maintenant la différence $f(z') - f(z)$ entre la nouvelle et l'ancienne valeur de la fonction par la différence entre la nouvelle et l'ancienne valeur de la variable $\dfrac{f(z') - f(z)}{z' - z}$; comme on l'a fait quand on a calculé la pente d'une courbe pour trouver la dérivée de la fonction que cette courbe représente ; rapprochons z' de z indéfiniment, de manière que $f(z')$ se rapproche en même temps de $f(z)$; ici, nous voyons apparaître un phénomène remarquable et nouveau.

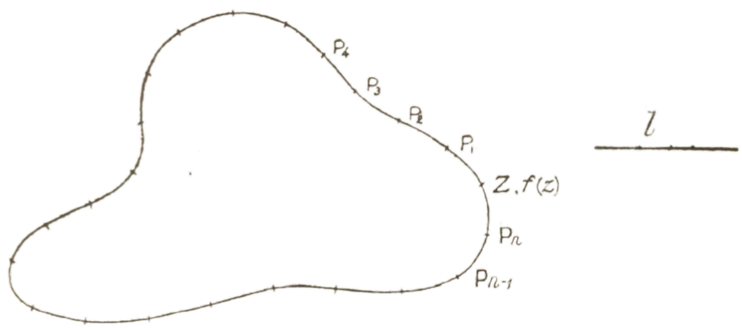


Pour arriver à coïncider avec z, z' peut suivre sur le plan des nombres complexes une infinité de trajets. Nous ne devons pas nous attendre à ce que la valeur limite de $f(z') - f(z)$ lorsque z' coïncide avec z soit la même pour tous les trajets, et en général il n'en est pas ainsi ; mais si $f(z)$ est tel que la valeur limite en question soit la même pour tous les trajets suivis par z' pour venir en coïncidence avec z, on dit alors que $f(z)$ est monogène en z (ou au point représentant z). Uniformité (voir ci-dessus) et monogénisme sont les caractéristiques qui distinguent les fonctions analytiques d'une variable complexe.

On peut se faire une idée de l'importance des fonctions analytiques si l'on réfléchit que les théories du mouvement des fluides (et par conséquent de l'électricité mathématique, et du système de cartographie ne déformant pas les angles) se traitent naturellement par la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe. Séparons une de ces fonctions $f(z)$ en partie réelle "(celle qui ne contient pas "l'unité imaginaire" i) et en partie imaginaire, par exemple $f(z) = U + iV$. Pour la fonction analytique spéciale z^2, nous aurons $U = x^2 - y^2$ et $V = 2xy$. Imaginons une mince couche de fluide s'écoulant sur un plan ; si le mouvement se fait sans turbulence, une ligne de courant s'obtient au moyen de quelque fonction analytique $f(z)$ en traçant la courbe $U = a$, où a est un nombre réel, et de la même façon les lignes équipotentielles s'obtiennent au moyen de $V = b$ (b étant un nombre réel). En faisant varier a, et b, nous obtenons un tableau complet du mouvement pour une aire aussi étendue que nous voulons. Pour des conditions données, par exemple, celles d'un fluide s'écoulant autour d'un obstacle, la partie délicate du problème est de trouver la fonction analytique qu'il faut choisir, et toute la question a été largement étudiée ; on a étudié les fonctions analytiques simples et on a cherché les problèmes de physique auxquels elles conviennent. Il est curieux de constater que beaucoup de ces problèmes qui ont été combinés artificiellement se sont montrés d'une très grande utilité en aérodynamique et autres applications pratiques de la théorie du mouvement des fluides.

La théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe a été un des plus grands triomphes dans le domaine des mathématiques au XIXe siècle. Gauss, dans sa lettre à Bessel, explique ce qui, dans cette vaste théorie, revient au théorème fondamental ; mais il l'a tenu caché, en sorte que d'autres, Cauchy et plus tard Weierstrass, l'ont découvert à nouveau. Comme il s'agit d'un jalon important dans l'histoire de l'analyse mathématique, nous allons en parler brièvement, en omettant tous les raffinements qu'exigerait un exposé exact.

Imaginons la variable complexe z décrivant une courbe fermée de longueur finie, sans aucune boucle ni rebroussement ; nous avons la notion intuitive de ce qu'est la "longueur" d'une portion de cette courbe.



Marquons n points $P_1, P_2, ...P_n$ sur la courbe, de manière que chacune des portions P_1P_2, P_2P_3, $P_3P_4, ...,$ P_nP_1 ne soit pas plus grande qu'une certaine longueur donnée l ; sur chacune de ces portions de courbe choisissons un point qui ne soit pas à l'une ou l'autre des extrémités ; formons la valeur de $f(z)$ pour la valeur de z qui correspond à ce point, et multiplions cette valeur par la longueur de la portion de courbe sur laquelle se trouve le point en question. Faisons de même pour toutes les portions, et faisons la somme des résultats. Enfin, prenons la valeur limite de cette somme lorsque le nombre des portions croît jusqu'à l'infini : ceci nous donne la ligne intégrale de $f(z)$ pour la courbe considérée.

Dans quel cas cette ligne intégrale sera-t-elle nulle ? Pour cela, il suffit que $f(z)$ soit une fonction analytique (uniforme et monogène) en chaque point z de la courbe et à l'intérieur de la courbe.

Tel est le grand théorème que Gauss a communiqué à Bessel, en 1811, et qui avec un autre théorème de nature analogue entre les mains de Cauchy qui l'a découvert une deuxième fois séparément, a fourni comme corollaires plusieurs résultats importants de l'analyse.

Vers sa trentaine, l'astronomie n'absorbait pas la totalité de la prodigieuse énergie de Gauss. L'année 1812, qui a vu la Grande Armée de Napoléon soutenir des combats d'arrière-garde désespérés à travers les plaines glacées de Russie, a assisté également à la publication d'une autre grande œuvre de Gauss, celle de la série hypergéométrique :

$$1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)x^2}{c(c+1)1 \times 2} + \dots$$

les points signifiant que la série se prolonge jusqu'à l'infini selon la loi indiquée ; le terme suivant est

$$\frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)} \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3}.$$

Ce mémoire de Gauss est un autre jalon. Comme on l'a déjà fait remarquer, Gauss a été le premier des rigoristes modernes. Dans ce travail, il a déterminé les conditions qu'il faut imposer aux nombres a, b, c, x, de manière que la série soit convergente (dans le sens qui a été expliqué au début de ce chapitre). La série elle-même est autre chose qu'un simple exercice de manuel que l'on peut étudier pour acquérir de l'habileté en calculs analytiques et oublier ensuite. Elle comprend, comme cas particuliers obtenus en assignant à un ou plusieurs des termes a, b, c, x, des valeurs spéciales, plusieurs des séries les plus importantes en analyse, par exemple, celles qui ont permis de calculer les logarithmes, les fonctions trigonométriques, et maintes fonctions qui reviennent souvent dans l'astronomie newtonienne et la physique mathématique ; le théorème général du binôme est aussi un cas particulier de la série en question. Du travail de Gauss sont sorties de nombreuses applications aux équations différentielles de la physique au XIXe siècle.

Le choix d'une telle recherche, pour y appliquer un sérieux effort, caractérise bien la manière de Gauss. Il n'a jamais publié des choses sans valeur ; lorsqu'il terminait une œuvre, elle n'était pas seulement finie en soi, mais encore bourrée d'idées, de manière que ses successeurs fussent à même d'appliquer ses inventions à des problèmes nouveaux. Bien que le manque de place empêche ici la discussion de quelques exemples de ce caractère fondamental des contributions apportées par Gauss aux mathématiques pures, il y en a un qu'on ne saurait passer sous silence même dans l'esquisse la plus sommaire, c'est son travail sur la loi de la réciprocité biquadratique.

Il était naturel qu'après avoir épuisé la réciprocité quadratique (du second degré), Gauss considérât la question générale des congruences binômes d'un degré quelconque. Si m est un nombre entier non divisible par le nombre premier p, si n est un nombre entier positif donné, et si en outre on peut trouver un nombre entier x tel que $x^n \equiv m$ (mod. p), on dit que m est un résidu $n^{\text{ième}}$ de p ; lorsque $n = 4$, m est un résidu biquadratique de p.

Le cas des congruences binômes quadratiques ($n = 2$) donne l'idée qu'il n'y a pas peu de chose à faire lorsque n dépasse 2. Une des questions que Gauss a dû insérer dans la huitième section, ensuite supprimée, des *Disquisitiones Arithmeticae* (ou peut-être, comme il l'a dit à Sophie Germain, dans le second volume, projeté mais non achevé, de cet ouvrage), était précisément l'étude de ces congruences de degré plus élevé et la recherche des lois correspondantes de réciprocité, notamment les liaisons réciproques (résolubilité ou non résolubilité) des couples

$$x^n \equiv p \text{ (mod. } q) \qquad\qquad x^m \equiv q \text{ (mod. } p)$$

où p et q sont des nombres premiers rationnels ; en particulier, Gauss doit avoir étudié les cas de $n = 3$, $n = 4$.

Avec son mémoire de 1825, Gauss ouvre des terres nouvelles avec toute la hardiesse des grands pionniers. Après plusieurs faux départs qui conduisaient à une complexité prohibitive, Gauss a découvert la voie "naturelle" qui mène au cœur de son problème les nombres entiers rationnels 1, 2, 3... ne sont pas ceux qui s'adaptent à l'énoncé de la loi de réciprocité biquadratique, comme ils le font pour la réciprocité quadratique ; il faut inventer une catégorie de nombres entiers totalement nouvelle ce sont ceux qu'on appelle les nombres entiers complexes de Gauss ; ce sont tous les nombres complexes de la forme $a + bi$, dans laquelle a et b sont des nombres entiers rationnels et i représente $\sqrt{-1}$.

Pour établir la loi de réciprocité biquadratique, il faut au préalable étudier à fond les lois de la divisibilité arithmétique pour les nombres entiers complexes. Gauss l'a fait, inaugurant par-là la théorie des nombres algébriques, à laquelle il pensait sans doute lorsqu'il donna, comme nous l'avons vu, son appréciation sur le dernier théorème de Fermat. Il a aussi trouvé, d'une manière analogue, la véritable voie pour arriver à la réciprocité cubique ($n = 3$). On a retrouvé ce dernier travail dans ses papiers posthumes.

L'importance de ce grand progrès en mathématiques ressortira davantage quand nous parcourrons les carrières de Kummer et de Dedekind. Pour le moment, contentons-nous de dire que le disciple favori de Gauss, Eisenstein, a utilisé la réciprocité cubique, il a en outre découvert une relation surprenante entre la loi de réciprocité biquadratique et certaines parties de la théorie des fonctions elliptiques ; d'ailleurs Gauss est allé assez loin dans cette théorie, mais s'est abstenu de publier ce qu'il avait trouvé.

Les entiers complexes de Gauss sont naturellement une catégorie de tous les nombres complexes, et on pourrait penser que la théorie arithmétique des nombres entiers ne serait qu'un détail quelconque de la théorie algébrique de tous les nombres ; il n'en est pas du tout ainsi. Comparée à la théorie arithmétique, la théorie algébrique est d'une simplicité enfantine. Les nombres rationnels (nombres de la forme $\frac{a}{b}$, où a et b sont des entiers rationnels) en suggèrent peut-être la raison ; nous pouvons toujours diviser un nombre rationnel par un autre nombre rationnel et obtenir un troisième nombre rationnel : $\frac{a}{b}$ divisé par $\frac{c}{d}$ donne le nombre rationnel $\frac{ad}{bc}$; mais un entier rationnel divisé par un autre entier rationnel n'est pas toujours un entier rationnel : 7 divisé par 8 donne $\frac{7}{8}$. Donc, si nous devons nous limiter aux nombres entiers, qui est le cas intéressant pour la théorie des nombres, nous avons les mains liées et les pieds entravés avant de nous mettre en route. C'est une des raisons pour lesquelles l'arithmétique supérieure est plus difficile que l'algèbre, supérieure ou élémentaire.

Il était également donné à Gauss de réaliser des progrès d'une importance aussi grande en géométrie, dans les applications des mathématiques à la géodésie, dans la théorie newtonienne de l'attraction, et en électromagnétisme. Comment un homme a-t-il pu effectuer cette masse colossale de travaux de l'ordre le plus élevé ? Avec sa modestie coutumière Gauss déclarait : "si d'autres avaient seulement réfléchi aux vérités mathématiques aussi profondément et aussi constamment que moi, ils auraient fait les mêmes découvertes." Peut-être. Cette réflexion de Gauss rappelle celle de Newton ; comme on lui demandait comment il avait fait en astronomie des découvertes dépassant toutes celles de ses prédécesseurs, il avait répondu : "En y pensant toujours" ; c'était peut-être facile pour Newton, ce ne l'est pas pour le commun des mortels.

La clef de l'énigme dans le cas de Gauss était le fait que les mathématiques étaient l'objet involontaire de ses constantes préoccupations ; jeune homme, il avait été littéralement "empoigné" par elles ; conversant avec des amis, il lui arrivait souvent de rester subitement silencieux, l'esprit envahi par des pensées qui lui venaient malgré lui, et il devenait alors étranger à tout ce qui l'entourait ; plus tard, il devint davantage maître de ses réflexions, ou plus exactement il ne se laissait plus dominer par elles, et il appliquait alors toute son énergie à résoudre telle difficulté jusqu'à ce qu'il y fût parvenu ; une fois qu'il avait attaqué un problème, il ne l'abandonnait plus jusqu'à ce qu'il en fût devenu maître, quand bien même plusieurs autres occupaient simultanément le devant de son esprit.

Dans les *Disquisitiones* (page 636) il raconte que depuis quatre ans il s'est rarement passé une semaine où il n'ait pas consacré quelque temps à chercher si un certain signe devait être "plus" ou "moins" ; finalement la solution lui arrivait dans un éclair. Mais ce serait faire erreur que de croire que cela surgissait dans son cerveau comme une étoile nouvelle sans qu'il lui en ait coûté des heures pour mettre entièrement la question au point. Souvent, après avoir passé des jours ou des semaines sans succès sur quelque recherche, Gauss constatait, après une nuit d'insomnie, que toute obscurité avait disparu et que toute la solution se présentait clairement à son esprit. Cette facilité de concentration cérébrale intense et prolongée était une partie de son secret.

Par cette faculté de s'oublier lui-même, dans l'univers de ses réflexions, Gauss ressemble à la fois à Archimède et à Newton ; à deux autres points de vue il est également à leur mesure : ses dons d'observation précise et son ingéniosité scientifique qui lui permettaient d'imaginer les instruments nécessaires à ses recherches scientifiques. C'est à Gauss que la géométrie doit l'invention de l'héliotrope, appareil ingénieux qui permet de transmettre immédiatement des signaux à très grande distance par réflexion ; pour l'époque, l'héliotrope constituait un grand progrès. Gauss a également perfectionné les appareils d'astronomie dont il se servait. Pour ses recherches fondamentales en électromagnétisme, il a inventé le magnétomètre à deux fils, et l'on peut rappeler, comme exemple final de son ingéniosité en mécanique, qu'il inventa le télégraphe électrique en 1833, et s'en servait pour échanger des messages avec son compagnon de travail Wilhelm Weber (1804-1891). Cette association du génie mathématique avec un talent expérimental de premier ordre est un cas extrêmement rare dans l'histoire de la science.

Mais Gauss se préoccupait fort peu, personnellement, des usages pratiques de ses inventions ; comme Archimède, il préférait les mathématiques à tous les royaumes de la terre et laissait à d'autres le soin de recueillir les fruits palpables de ses travaux.

Weber, lui, son collaborateur en recherches d'électromagnétisme, vit nettement l'importance que pouvait avoir ce chétif petit télégraphe de Goettingen pour l'avenir de la civilisation ; le chemin de fer, rappelons-le, faisait ses premiers pas en 1830, et en 1835 Weber prophétisait : "Quand le globe sera couvert d'un réseau de voies ferrées et de fils télégraphiques, ce réseau rendra des services comparables à ceux du système nerveux dans le corps humain, en partie comme moyens de transport, en partie pour propager les idées et les sensations à la vitesse de l'éclair."

Nous avons déjà noté l'admiration de Gauss pour Newton : connaissant les efforts considérables que lui avaient coûtés certaines de ses propres œuvres, il appréciait à leur juste valeur la longue préparation et la méditation continue que représentait la grande œuvre de Newton. L'histoire de la chute de la pomme le remplissait d'indignation. "Sottise !" s'exclamait-il ; "croyez à la légende, si vous le voulez, mais la vérité, la voici : quelque flatteur stupide a demandé à Newton comment il avait découvert la loi de la gravitation ; voyant qu'il avait affaire à un cerveau enfantin et désirant se débarrasser du fâcheux, Newton lui répondit qu'une pomme lui était tombée sur le nez ; l'homme s'en alla pleinement satisfait et complètement éclairé."

L'histoire de la pomme a eu son écho de nos jours. Comme on importunait Einstein pour savoir ce qui l'avait conduit à sa théorie du champ de gravitation, il répondit qu'il avait demandé à un ouvrier tombé d'un échafaudage, sans se faire de mal, sur un tas de paille, s'il avait senti l'attraction de la force de gravité pendant sa chute ; recevant la réponse qu'aucune force ne l'avait tiré, Einstein vit immédiatement que la gravitation, dans une région suffisamment petite de l'espace-temps, peut se remplacer par une accélération du système de référence de l'observateur (l'ouvrier tombant). En réalité, ce qui a amené la découverte d'Einstein, c'est le dur labeur qu'il a consacré pendant plusieurs années à l'étude du calcul tensoriel de deux mathématiciens italiens, Ricci et Levi-Civita, disciples eux-mêmes de Riemann et de Christoffel, qui à leur tour avaient tiré leur inspiration de l'œuvre géométrique de Gauss.

À propos d'Archimède, pour qui il avait aussi une admiration sans bornes, Gauss déclarait qu'il ne comprenait pas comment ce savant n'avait pas découvert le système décimal de numération ou son équivalent (avec quelque base autre que 10). L'effort d'Archimède, complètement étranger aux théories grecques, pour établir un moyen d'écrire et de manipuler les nombres, bien autrement fécond que le symbolisme grec, avait mis à la disposition d'Archimède, d'après Gauss, la notation décimale avec son principe capital de la valeur de l'emplacement des chiffres ($325 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10 + 5$). Gauss considérait cette inadvertance comme le plus grand malheur dans l'histoire de la science. “À quelles hauteurs la science serait-elle maintenant parvenue si Archimède avait fait cette découverte !” disait-il, en pensant à ces masses de calculs arithmétiques et astronomiques qu'il avait exécutés et qui auraient été impossibles, même à lui, sans la notation décimale. Appréciant pleinement l'importance pour toute la science des méthodes perfectionnées de calcul, Gauss travaillait comme un nègre à ses propres calculs jusqu'à ce que des pages entières de chiffres fussent réduites à quelques lignes qui pouvaient être saisies d'un coup d'œil ; lui-même, il faisait la plupart de ses calculs mentalement ; les perfectionnements qu'il ne cessait d'y apporter étaient destinés aux personnes moins douées que lui.

Contrairement à ce que nous avons constaté pour Newton dans ses dernières années, Gauss n'a jamais été attiré par les profits des fonctions publiques, et cependant son vif intérêt pour toute matière se rattachant aux sciences de la statistique, des assurances et de “l'arithmétique politique” et la sagacité qu'il y manifestait, auraient fait de lui un bon ministre des finances ; jusqu'à sa dernière maladie, sa science et ses passe-temps simples le satisfaisaient complètement. Lire toutes les littératures d'Europe et les classiques de l'antiquité, s'intéresser à la politique mondiale et la critiquer, acquérir la maîtrise des langues étrangères et se tenir au courant des sciences nouvelles, y compris la botanique et la minéralogie telles étaient ses distractions favorites.

La littérature anglaise l'attirait particulièrement, sauf cependant les tragédies de Shakespeare trop sombres pour sa sensibilité aiguë à l'égard de toutes les formes de souffrance ; il préférait les chefs-d'œuvre plus optimistes. Il lisait avidement les romans de Walter Scott au fur et à mesure qu'ils paraissaient, mais la triste fin de Kenilworth l'assombrit pendant quelques jours et il regretta de l'avoir lu. Une erreur commise par cet auteur favori le plongea dans une gaieté folle : “le disque large de la lune se lève au nord-ouest”, avait écrit Walter Scott, et Gauss se mit pendant des jours à corriger tous les exemplaires qu'il pouvait trouver. Les ouvrages historiques anglais, en particulier *Le déclin et la chute de l'Empire romain*, de Gibbon, et l'*Histoire de l'Angleterre*, de Macaulay, lui procurèrent un grand plaisir.

Pour son jeune contemporain Lord Byron, qui passa comme un météore, Gauss avait presque de l'aversion. La pose perpétuelle de Byron, sa continuelle lassitude du monde, sa misanthropie affectée, et sa beauté romantique avaient séduit les sentimentaux Germains plus complètement même que ses flegmatiques compatriotes ; ceux-ci, du moins les plus âgés du sexe masculin, le tenaient quelque peu pour un sot. Gauss voyait en Byron un histrion et ne l'aimait pas ; pour lui, un homme qui prisait si assidûment la bonne eau-de-vie et les jolies femmes ne pouvait être aussi dégoûté du monde que prétendait l'être ce jeune poète immoral.

Quant à la littérature de son propre pays, les goûts de Gauss étaient un peu exceptionnels, pour un Allemand cultivé comme lui : Jean-Paul était son poète allemand favori ; il n'estimait par contre pas beaucoup ni Gœthe, ni Schiller ; Gœthe, disait-il, ne le contentait pas ; quant à Schiller, avec les doctrines philosophiques duquel il était en complet désaccord, il n'aimait pas sa poésie ; il disait que *Résignation* était un poème impie et corrompu : en marge, il avait écrit, sur son exemplaire, "Méphistophélès".

Il eut dès sa jeunesse et durant toute sa vie une grande facilité pour les langues ; c'était pour lui un passe-temps que de les apprendre ; en avançant en âge, il disait que cette étude aidait à conserver l'esprit souple. À soixante ans, il entreprit d'apprendre le russe sans l'aide de personne et au bout de deux ans il lisait couramment la prose et la poésie russes et entretenait une correspondance scientifique avec ses amis de Saint-Pétersbourg entièrement dans cette langue ; d'après les Russes qui lui rendirent visite à Goettingen, il parlait leur langue parfaitement bien ; la littérature russe, disait-il, lui donnait autant de plaisir que la littérature anglaise. Il essaya d'apprendre le sanscrit, mais n'y prit pas goût.

Son troisième passe-temps, la politique étrangère, l'occupait environ une heure chaque jour ; il se rendait régulièrement à la bibliothèque et se tenait au courant des événements en lisant tous les journaux qu'on y recevait, depuis le *Times* de Londres jusqu'aux feuilles locales de Goettingen. Intellectuellement aristocrate, Gauss était en politique absolument conservateur, sans être pour cela réactionnaire. Son époque était passablement agitée, en Allemagne comme ailleurs ; le règne de la populace et les violences politiques lui inspiraient, selon l'expression de son ami von Waltershausen, "une horreur indescriptible". Le soulèvement de 1848 en France le remplit de consternation.

Issu d'une humble famille, connaissant bien dès l'enfance l'intelligence et la moralité des masses, Gauss n'avait pas oublié ce qu'il avait vu de ses yeux, et il avait une opinion extrêmement piètre de l'intelligence, de la moralité et de la finesse politique du peuple pris en masse comme les démagogues le trouvent et le prennent. La devise "*Mundus vult decepi*" était pour lui une vérité.

Il ne croyait pas à la moralité, à l'intégrité, à l'intelligence innées de l'"homme de la nature" de Rousseau, lorsqu'il devient la foule ou qu'il délibère dans les parlements, sénats, congrès, ou conseils de ministres, et ce sentiment lui était certainement inspiré par sa connaissance profonde, en tant qu'homme de science, de ce que l'"homme de la nature" avait fait des savants en France aux premiers jours de la Révolution. Il est peut-être vrai, comme l'ont déclaré les démagogues, que "la révolution n'a pas besoin de savants", mais une telle déclaration pour un homme du tempérament de Gauss ne pouvait être qu'un défi. Acceptant le défi, Gauss à son tour exprima son mépris profond pour tous les "meneurs du peuple", qui conduisent la foule au tumulte pour leur propre bénéfice. En vieillissant, il considérait la paix et les satisfactions simples comme les seuls biens d'un pays. Il disait qu'il mourrait vite, si la guerre civile éclatait en Allemagne. Il considérait comme une folie incompréhensible la conquête étrangère à la manière du grand Napoléon.

Il ne faut pas voir dans ces sentiments conservateurs la nostalgie d'un réactionnaire qui va proclamant que le monde défie les lois de la mécanique céleste, et vit toujours dans le ciel d'un passé mort et invariable : Gauss avait foi dans les réformes, quand elles sont intelligentes et si ce n'est pas le cerveau qui est en mesure de juger si et quand les réformes sont intelligentes, quel est l'organe du corps humain qui le sera ? Le cerveau de Gauss était assez puissant pour savoir où les ambitions de certains grands hommes d'État de sa génération, essentiellement réformatrices, étaient en train de conduire l'Europe : le spectacle ne lui inspirait pas confiance.

Ses amis d'opinions avancées ont attribué l'esprit conservateur de Gauss à la rigueur avec laquelle il s'attachait à ses travaux ; il peut y avoir là quelque chose de vrai. Dans ses vingt-sept dernières années, il n'a quitté son observatoire qu'une seule fois, pour assister à un congrès scientifique à Berlin et pour faire plaisir à Alexandre de Humbolt qui désirait le mettre en relief. Mais il n'y a pas besoin de parcourir toute la terre pour savoir ce qui s'y passe. L'intelligence, la lecture des journaux (même quand ils mentent) et des rapports du gouvernement (surtout quand ils mentent) valent quelquefois mieux que le tourisme ou les bavardages d'hôtel. Gauss restait chez lui, lisait, n'ajoutait guère foi à nombre des choses qu'il lisait, méditait et parvenait jusqu'à la vérité.

Une autre source de la force de Gauss était sa sérénité scientifique et son manque absolu de toute ambition personnelle : sa seule ambition était le progrès des mathématiques. Lorsqu'il déclarait, sans aucun orgueil, mais comme un fait se rapportant à une question traitée, qu'il avait devancé ses rivaux sur tel sujet, et que ceux-ci en doutaient, Gauss n'exhibait pas son journal pour le prouver, mais s'en tenait à son affirmation pour établir ses propres mérites.

De ceux qui doutaient de la parole de Gauss, Legendre était celui qui parlait le plus fort ; un fait fit de lui l'ennemi de Gauss pour la vie. Dans sa *Theoria motus*, ce dernier s'était référé à sa découverte antérieure de la méthode des moindres carrés ; or, Legendre avait publié la méthode en 1806, avant Gauss ; fort indigné, il écrivit à Gauss en l'accusant pratiquement de malhonnêteté et arguant qu'un savant si riche de découvertes aurait pu avoir au moins la décence de ne pas s'approprier la méthode des moindres carrés que lui, Legendre, considérait comme son enfant à lui. Laplace prit part à la dispute ; mais il ne dit pas s'il ajoutait foi aux dires de Gauss, que Legendre avait été devancé par lui d'au moins dix ans ; il conserva son affabilité habituelle. Gauss, en apparence, dédaigna de poursuivre la querelle ; mais dans une lettre à un ami, il fournit l'évidence qui aurait mis fin de toute façon à la dispute si Gauss n'avait pas été "trop fier pour lutter". "J'ai communiqué toute la question à Olbers en 1802", écrit-il ; et Legendre, s'il en avait douté, aurait pu demander le manuscrit à Olbers.

Cette querelle a eu des conséquences malheureuses pour le développement ultérieur des mathématiques, car Legendre fit partager ses soupçons injustifiés à Jacobi et empêcha ainsi ce jeune mathématicien, qui a si brillamment contribué au développement de la théorie des fonctions elliptiques, de nouer de cordiales relations avec Gauss. Le malentendu était d'autant plus regrettable que Legendre était un homme d'un caractère très droit et scrupuleusement correct mais ce fut son destin d'être dépassé par des mathématiciens plus imaginatifs que lui dans les domaines où il avait dépensé une bonne part de sa longue et laborieuse existence à des besognes que des hommes plus jeunes, Gauss, Abel et Jacobi montrèrent avoir été superflues. À chaque pas de Legendre, il se trouvait que Gauss l'avait déjà devancé ; et lorsque Legendre l'accusait d'indélicatesse, Gauss avait l'impression que c'est lui-même qui restait en plan ; voici comment il se plaint dans une lettre du 30 juillet 1806 à Schumacher : "Il semble que c'est mon destin de me trouver en concurrence avec Legendre dans presque tous mes travaux théoriques ; il en est ainsi en arithmétique supérieure, dans les recherches concernant les fonctions transcendantes en relation avec la rectification [le procédé pour trouver la longueur d'un arc de courbe] de l'ellipse, dans les fondements de la géométrie, et maintenant de nouveau dans cette méthode, celle des moindres carrés... utilisée aussi dans les travaux de Legendre où elle est en fait traitée très élégamment."

La publication détaillée des papiers posthumes et de la plus grande partie de sa correspondance dans ces derniers temps, a réglé une fois pour toutes en faveur de Gauss ces vieilles querelles. Il reste un autre point à propos duquel on l'a critiqué, c'est son manque d'empressement à accueillir avec bienveillance les grands travaux des autres, en particulier des jeunes. Lorsque Cauchy commença à publier ses brillantes découvertes sur la théorie des fonctions d'une variable complexe, Gauss les ignora ; aucun mot de félicitation ou d'encouragement ne parvint du prince des mathématiciens au jeune Français : mais pourquoi serait-il venu ? Gauss, comme nous l'avons vu, était déjà au cœur de la question des années avant que Cauchy ne l'abordât. De même, lorsque les travaux de Hamilton sur les quaternions (que nous verrons dans un chapitre ultérieur) furent présentés à Gauss en 1852, trois ans avant sa mort, il ne dit rien : pourquoi ? c'est que le nœud de la question était couché dans ses notes depuis plus de trente ans ; il garda son calme et ne revendiqua pas la priorité. Comme pour ses anticipations à propos de la théorie des fonctions d'une variable complexe, des fonctions elliptiques, de la géométrie non-euclidienne, Gauss se contentait d'avoir fait le travail.

Les quaternions ne sont autre chose que l'algèbre qui fait pour les rotations dans l'espace à trois dimensions, ce que l'algèbre des nombres complexes fait pour les rotations dans le plan : mais, dans les quaternions, que Gauss appelait "mutations", une des règles fondamentales de l'algèbre disparaît : il n'est plus vrai que $a \times b = b \times a$ et il est impossible de faire une algèbre des rotations dans l'espace à trois dimensions dans laquelle cette règle soit maintenue. Hamilton, un des grands génies mathématiciens du XIXe siècle, raconte, avec son exubérance irlandaise, comment il a lutté pendant quinze ans pour trouver une algèbre qui se tienne tout en remplissant l'exigence voulue, lorsqu'une heureuse inspiration vint lui fournir la clef du mystère : il fallait dans l'algèbre qu'il cherchait que $a \times b$ ne soit pas égal à $b \times a$. Gauss ne nous dit pas combien il a mis de temps pour arriver au but ; il enregistra simplement son succès en quelques pages d'algèbre qui ne laissent aucune porte ouverte à l'imagination mathématicienne.

Si Gauss était un peu froid dans ses appréciations imprimées, il se montrait assez cordial dans sa correspondance et ses relations scientifiques avec ceux qui le consultaient dans un esprit de recherche désintéressée. Une de ses amitiés scientifiques dépasse l'intérêt mathématique, car elle prouve combien Gauss avait les idées larges à l'égard des femmes s'occupant de travaux scientifiques, ce qui est un fait remarquable pour un homme de sa génération ; et pour un Allemand c'était un cas sans précédent.

Il s'agit de Mlle Sophie Germain (1776-1831), qui avait à peine un an de plus que Gauss : ils ne se sont jamais rencontrés et elle est décédée, à Paris, avant que l'Université de Goettingen lui ait conféré le doctorat honoraire que Gauss avait demandé pour elle. Par une curieuse coïncidence, nous verrons la mathématicienne la plus célèbre du XIXe siècle, une autre Sophie, recevoir le doctorat de la même Université libérale plusieurs années après que Berlin le lui eût refusé en raison de son sexe. Il semble que Sophie soit un nom heureusement prédestiné pour les femmes en mathématiques, pourvu qu'elles aient rencontré des professeurs à l'esprit large. Une femme supérieure en mathématiques de notre siècle, Emmy Noether (1882-1935) est sortie aussi de Goettingen [4].

Sophie Germain s'est intéressée à l'acoustique, à la théorie mathématique de l'élasticité, à l'arithmétique supérieure ; elle a, dans tous ces domaines, accompli un travail remarquable. En particulier, sa contribution à l'étude du dernier théorème de Fermat a permis au mathématicien américain Léonard Eugène Dickson (1874) de réaliser dans cette voie un progrès considérable. Enthousiasmée par les *Disquisitiones Arithmeticae*, Sophie communiqua à Gauss, par écrit, quelques-unes de ses propres observations arithmétiques ; craignant que Gauss n'eût quelque prévention contre une femme mathématicienne, elle prit un nom d'homme et Gauss se fit une haute opinion de son correspondant, M. Leblanc, à qui il écrivait en excellent français. Leblanc dut lever le masque lorsque Sophie eut l'occasion rendre service à Gauss à l'époque où les Français occupaient le Hanovre. Dans une lettre du 30 avril 1807, Gauss remercie Sophie Germain de son intervention en sa faveur auprès du général français Pernety et déplore l'état de guerre ; il lui fait des compliments chaleureux pour ses travaux et lui exprime sa propre passion pour la théorie des nombres : voici ce passage, qui montre Gauss sous un de ses aspects cordialement humain :

"Comment vous exprimer ma surprise et mon admiration en voyant mon estimé correspondant M. Leblanc se métamorphoser en cette illustre personnalité [Sophie Germain] qui donne un si brillant exemple de ce que je trouverais difficile à imaginer. Le goût des sciences abstraites en général et surtout de tous les mystères des nombres est extrêmement rare ; ce n'est pas étonnant ; les charmes enchanteurs de cette science sublime ne se révèlent qu'à ceux qui ont le courage de la pénétrer à fond. Mais lorsqu'une personne du sexe féminin qui, d'après nos habitudes et nos préjugés, doit rencontrer infiniment plus de difficultés que les hommes à se familiariser avec ces recherches épineuses, réussit néanmoins à surmonter ces obstacles et à pénétrer jusqu'à ses régions les plus obscures, elle doit sans aucun doute posséder le courage le plus noble, des talents tout à fait extraordinaires et un génie supérieur. Effectivement, rien ne pouvait me démontrer d'une manière aussi flatteuse et si peu équivoque que ces attractions de la science, qui ont enrichi mon existence de tant de joies, ne sont pas des chimères, pas plus que la prédilection dont vous l'avez honorée."

Il poursuit en discutant mathématiques. La suscription de sa lettre est une attention délicate : "Bronsvic, ce 30 avril 1807, jour de ma naissance."

Une lettre de Gauss à son ami Olbers, du 21 juillet 1807, montre que ses éloges à la jeune femme n'étaient pas de pure politesse : "Lagrange s'intéresse chaudement à l'astronomie et à l'arithmétique

[4]Sortie est le véritable terme à employer. Lorsque Mlle Noether dut quitter l'Allemagne parce qu'elle était juive, le "Bryn Mawr College", en Pensylvanie, l'a adoptée : elle possédait, en algèbre, l'esprit le plus fécond du monde. En moins d'une semaine, Goettingen avait perdu l'esprit libéral que Gauss aimait et qu'il s'est efforcé toute sa vie de lui conserver.

supérieure, il considère les deux théorèmes d'essai (pour quels nombres premiers 2 est-il un résidu cubique ou biquadratique), que je lui ai communiqués il y a quelque temps, comme une des choses les plus belles et les plus difficiles à démontrer. Mais Sophie Germain m'en a envoyé les démonstrations ; je n'ai pas encore eu le temps de les approfondir, mais je crois qu'elles sont bonnes ; tout au moins, elle a abordé la question du côté qu'il fallait, peut-être seulement d'une manière un peu plus diffuse qu'il n'était nécessaire..." Les théorèmes auxquels Gauss fait allusion sont ceux qui expriment pour quels nombres premiers impairs p chacune des congruences $x^3 \equiv 2$ (mod. p) et $x^4 \equiv 2$(mod. p) peut être résolue.

Il faudrait un très long livre, peut-être plus long que celui qu'exigerait Newton, pour exposer toutes les contributions remarquables que Gauss a apportées aux mathématiques, pures et appliquées. Nous ne pouvons, ici, que dire un mot des travaux les plus importants que nous n'avons pas encore cités, et nous choisirons ceux qui ont ajouté de nouvelles techniques aux mathématiques ou qui ont solutionné des problèmes en souffrance. En adoptant le classement chronologique sommaire mais commode, adopté par les éditeurs des ouvrages de Gauss, nous grouperons les principaux domaines d'activité de Gauss après 1800 comme il suit : 1800-1820, astronomie ; 1820-1830, géodésie, théorie des surfaces, et représentation conforme ; 1830-1840, physique mathématique, en particulier électromagnétisme, magnétisme terrestre, et théorie de l'attraction selon la loi de Newton ; 1841-1855, géométrie de position, et géométrie associée aux fonctions d'une variable complexe.

Entre 1821 et 1848, Gauss fut le conseil scientifique des gouvernements du Hanovre (dont dépendait Goettingen) et du Danemark pour l'établissement géodésique du cadastre. C'est de lui-même que Gauss avait voulu contribuer à ce travail : sa méthode des moindres carrés et son ingéniosité pour manipuler des masses de données numériques s'y donnaient largement carrière, mais, ce qui est plus important, les problèmes que soulevait le levé précis d'une portion de la surface terrestre en faisaient naître de plus profonds et plus généraux, concernant toutes les surfaces courbes. Ces recherches devaient donner naissance aux mathématiques relativistes ; la question n'était pas nouvelle ; plusieurs prédécesseurs de Gauss, notamment Euler, Lagrange, Monge, avaient étudié la géométrie de certains types de surfaces courbes, mais il appartenait à Gauss d'attaquer le problème dans toute sa généralité ; c'est de ses recherches qu'est née la grande période de la géométrie différentielle.

La géométrie différentielle peut être définie comme l'étude des propriétés des courbes, surfaces, etc., dans le voisinage immédiat d'un point, en sorte qu'on peut négliger dans les distances les puissances de degré supérieur au second. C'est en s'inspirant de ce travail que Riemann rédigea en 1854 son mémoire classique sur les hypothèses qui servent de base à la géométrie, lesquelles à leur tour marquent le début de la deuxième grande période de la géométrie différentielle, utilisée de nos jours dans la physique mathématique, en particulier dans la théorie de la relativité généralisée.

Trois des problèmes que Gauss a étudiés dans son travail sur les surfaces ont donné naissance à des théories générales de première importance mathématique et scientifique la mesure de la courbure, la théorie de la représentation conforme (cartographie), et l'applicabilité des surfaces sur un plan.

La notion, qui n'a rien de mystérieux, d'un espace-temps courbe, simple extension mathématique de l'idée familière et tangible de courbure à un espace défini par quatre coordonnées au lieu de deux, a été, somme toute, un développement naturel du travail de Gauss sur les surfaces courbes. Une de ses définitions montre combien tout cela est rationnel : le problème consiste à trouver un moyen précis de définir comment la courbure d'une surface varie d'un point à un autre de celle-ci, définition qui doit satisfaire à notre sentiment intuitif de ce que signifie la notion de “plus” ou “moins courbe”.

La courbure totale d'une portion de surface limitée par une courbe continue fermée C se définit comme suit : la normale à une surface en un point donné est la droite passant par ce point et perpendiculaire au plan tangent à la surface en ce point. En chaque point de C, il y a une normale à la surface ; imaginons que nous avons mené toutes ces normales ; puis, du centre d'une sphère ayant pour rayon l'unité de longueur, et qui peut être quelconque par rapport à la surface donnée, menons tous les rayons parallèles aux normales à C ; les intersections de ces rayons avec la surface sphérique de rayon un, découperont sur celle-ci une courbe C'. L'aire de cette partie de surface sphérique limitée par C' est appelée la courbure totale de la partie de la surface donnée limitée par la courbe C. Un peu de réflexion montrera que cette définition s'accorde comme il convient avec les notions ordinaires.

Une autre idée fondamentale exploitée par Gauss est celle de la représentation paramétrique.

Pour déterminer un point d'un plan, il faut deux coordonnées ; de même, sur la surface d'une sphère ou d'un sphéroïde comme la Terre, on peut imaginer que les deux coordonnées sont la latitude et la longitude ; ceci donne une idée de ce qu'il faut entendre par une multiplicité à deux dimensions. D'une manière générale, si n nombres sont à la fois nécessaires et suffisants pour déterminer chaque élément particulier d'une classe de choses (points, sons, couleurs, lignes, etc.), on dit que cette classe est une multiplicité à n dimensions. En déterminant ainsi une classe on convient que seules certaines caractéristiques de ses éléments doivent être désignées par des nombres. Par exemple, si nous considérons seulement le ton des sons, nous avons une multiplicité à une dimension parce qu'un seul nombre, la fréquence de la vibration correspondant au son, suffit à déterminer le ton ; si nous ajoutons l'intensité du son, mesurée sur une échelle convenable, les sons sont alors une multiplicité à deux dimensions ; et ainsi de suite. Si maintenant nous considérons une surface comme constituée par des points, nous voyons que c'est une multiplicité (de points) à deux dimensions. En usant de la terminologie géométrique, nous parlerons d'une multiplicité quelconque à deux dimensions comme d'une surface et nous lui appliquerons le raisonnement géométrique, dans l'espoir de découvrir quelque chose d'intéressant.

Les considérations qui précèdent nous conduisent à la représentation paramétrique des surfaces. En géométrie cartésienne, une seule équation entre trois coordonnées représente une surface ; soient x, y, z, ces coordonnées (cartésiennes). Au lieu d'user d'une seule équation reliant x, y, z, pour représenter la surface, prenons-en trois :

$$x = f(u, v) \qquad y = g(u, v) \qquad z = h(u, v)$$

$f(u, v)$, $g(u, v)$, $h(u, v)$ étant des fonctions (expressions) de nouvelles variables u, v, telles que lorsqu'on a éliminé ces variables (c'est-à-dire littéralement qu'on s'est débarrassé d'elles, qu'on les a mises à la porte), on obtient l'équation de la surface en x, y, z ; cette élimination est possible parce qu'on peut se servir de deux des équations pour trouver les deux inconnues u, v, et on porte le résultat dans la troisième. Par exemple, si

$$x = u + v \qquad y = u - v \qquad z = uv,$$

nous avons, par les deux premières équations, $u = 1/2(x + y), v = 1/2(x - y)$, et portant ces valeurs dans la troisième nous avons $4z = x^2 - y^2$. Or, lorsque les variables u, v, parcourront indépendamment l'une de l'autre une suite donnée de nombres, les fonctions f, g, h prendront des valeurs numériques et x, y, z se déplaceront sur la surface déterminée par les trois équations ci-dessus. Les variables u, v, sont les paramètres de la surface, et les trois équations $x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)$, sont ses équations paramétriques. Cette méthode de représentation des surfaces offre de grands avantages, par comparaison avec la méthode cartésienne, lorsqu'on l'applique à l'étude de la courbure et d'autres propriétés des surfaces qui varient rapidement d'un point à un autre.

Notons que la représentation paramétrique est intrinsèque ; elle se réfère à la surface elle-même par ses coordonnées et non pas à un groupe d'axes extrinsèques, ou extérieurs, comme c'est le cas dans la méthode de Descartes. Observons aussi que les deux paramètres u, v, font immédiatement ressortir le caractère à deux dimensions de la surface. La latitude et la longitude terrestres sont des exemples de ces coordonnées intrinsèques, “naturelles” ; ce serait fort gênant d'avoir pour toute notre navigation à nous référer à trois axes perpendiculaires entre eux menés par le centre de la terre, comme cela serait nécessaire pour naviguer d'après le système cartésien.

Un autre avantage de la méthode, c'est qu'on peut la généraliser aisément en l'appliquant à un nombre quelconque de dimensions ; il suffit d'augmenter le nombre des paramètres et de procéder comme ci-dessus. Lorsque nous arriverons à Riemann, nous verrons comment ces simples idées ont conduit tout naturellement à la généralisation de la géométrie métrique de Pythagore et d'Euclide. C'est Gauss qui a posé les fondations de cette généralisation, mais ce n'est que dans notre siècle qu'on en a pleinement apprécié l'importance pour les mathématiques et la physique.

Les recherches géodésiques ont aussi suggéré à Gauss l'application d'une autre méthode féconde en géométrie, celle de la représentation conforme. Avant de dresser une carte, par exemple celle du Groenland, il faut déterminer ce qu'on veut obtenir ; devra-t-on déformer les distances, comme le fait la projection de Mercator, jusqu'à faire prendre au Groenland une importance exagérée en comparaison de l'Amérique du Nord ? Ou bien devra-t-on conserver les distances, de manière que chaque pouce de la carte, mesuré n'importe où le long des lignes de référence (ici, la latitude et la longitude), corresponde à une seule et même distance mesurée sur la surface de la terre ? Mais dans ce dernier cas, l'espèce de carte ainsi obtenue ne rendra pas tel autre trait que nous désirons conserver ; par exemple, si deux routes se coupent sous un certain angle, les lignes de la carte représentant ces routes se couperont sous un angle différent. La représentation cartographique qui conserve les angles intacts est appelée "conforme". Dans cette cartographie, la théorie des fonctions analytiques d'une variable complexe, dont nous avons parlé plus haut, est d'une grande utilité. Toute la question de la représentation conforme est d'un usage courant en physique mathématique et ses applications, par exemple en électrostatique, en hydrodynamique, et dans la science issue de cette dernière, l'aérodynamique, où elle joue un rôle dans la théorie de la lame d'air.

Un autre domaine de la géométrie que Gauss a traité à fond, avec sa précision et son succès habituels, c'est l'applicabilité des surfaces, qui a pour objet de déterminer quelles sont les surfaces qui peuvent s'appliquer sur une surface donnée sans s'étirer ni se déchirer ; ici encore, les méthodes que Gauss a imaginées sont générales et d'une grande utilité.

Gauss a encore exécuté des recherches fondamentales dans d'autres domaines de la science, par exemple dans les théories mathématiques de l'électromagnétisme, y compris le magnétisme terrestre, de la capillarité, de l'attraction des ellipsoïdes (les planètes sont des types particuliers d'ellipsoïdes), régie par la loi de Newton, et de la dioptrique, surtout concernant les systèmes de lentilles ; cette dernière théorie lui a fourni l'occasion d'appliquer la technique purement abstraite des fractions continues qu'il avait développée dans sa jeunesse pour satisfaire sa curiosité de la théorie des nombres.

Gauss n'a pas été seulement, en tout cela, un mathématicien sublime ; c'était un observateur extrêmement précis qui savait user de ses mains et de ses yeux. La plupart des théorèmes qu'il a découverts, surtout en électromagnétisme et dans la théorie de l'attraction, font maintenant partie du stock indispensable à tous ceux qui étudient sérieusement la physique. Pendant plusieurs années, avec l'aide de son ami Weber, Gauss a cherché une théorie satisfaisante de tous les phénomènes électromagnétiques ; ne pouvant y arriver, il abandonna la partie ; s'il avait découvert les équations du champ électromagnétique de Clerk Maxwell (1831-1879), il aurait pu être satisfait.

Pour conclure cette liste fort longue, mais encore bien incomplète, des grandes choses qui ont mérité à Gauss son titre indiscuté de prince des mathématiciens, il nous faut dire un mot d'une question dont il n'a rien publié, à part une mention en passant dans sa thèse de 1799, mais qu'il prévoyait devoir devenir un des sujets les plus intéressants des mathématiques : la géométrie de position. Nous ne pouvons en donner ici la définition technique, qui exige la notion du groupe continu, mais on peut donner une idée du type de problème qu'elle traite, au moyen d'un simple exemple. Faisons un nœud sur une corde ; l'œil distingue aisément un nœud "simple" d'un nœud "compliqué" ; comment arriverons-nous à donner une définition mathématique exacte de la différence entre les deux ? Bien qu'il n'ait rien publié sur cette question, Gauss en a fait l'introduction, qu'on a retrouvée dans ses papiers posthumes. Un autre type de problème relevant de la même théorie est celui qui consiste à déterminer le nombre minimum de coupures qu'il faut faire subir à une surface donnée pour pouvoir l'appliquer sur un plan : pour une surface conique, une coupure suffit ; pour un tore, il en faut deux ; pour une sphère, aucun nombre fini de coupures ne permet d'étendre sa surface sur un plan. Ces exemples pourraient faire croire qu'il s'agit d'un sujet insignifiant ; s'il en était ainsi, Gauss ne lui aurait pas attaché l'extrême importance qu'il a prévue ; et cette prédiction s'est réalisée à notre époque ; aujourd'hui une école très active (où comptent plusieurs Américains, J.-W. Alexander, S. Lefschetz, O. Veblen, entre autres) prouve que la géométrie de position a des ramifications fort étendues à la fois dans la géométrie et dans l'analyse. Combien il nous paraît regrettable que Gauss n'ait pas dérobé une année ou deux à Cérès pour s'attacher à cette vaste théorie qui devait devenir le rêve de sa vieillesse et qui est devenue de nos jours une réalité de notre jeune génération !

Durant ses dernières années, Gauss fut entouré de la considération générale, mais ne fut pas aussi heureux qu'il aurait mérité de l'être. Pour si fécond et si puissant qu'ait été son esprit durant toute son existence, il n'aspirait pas encore au repos lorsque les premiers symptômes de sa dernière maladie se manifestèrent.

Il lui arriva un accident qui aurait pu lui coûter la vie et qui le rendit plus prudent que jamais, lui qui n'aimait pas parler de la mort subite d'un ami. Le 16 juin 1854, il avait, pour la première fois depuis plus de vingt ans, quitté Goettingen pour aller voir une voie ferrée en construction qui devait relier cette ville à Cassel ; il s'était toujours vivement intéressé à la construction et au fonctionnement des chemins de fer, et il voulait en voir un de ses yeux. Les chevaux de sa voiture prirent le mors aux dents ; il fut projeté hors du véhicule ; sans être blessé, il reçut une violente commotion. Rétabli, il eut le plaisir d'assister aux cérémonies d'inauguration de ce chemin de fer, dont le premier train atteignit Goettingen le 31 juillet 1854 : ce fut sa dernière satisfaction.

Au début de l'année suivante, il commença à souffrir de myocardite et d'emphysème, avec des symptômes d'hydropisie ; il continuait néanmoins à travailler quand il le pouvait, bien qu'il eût des crampes dans les mains ; sa belle écriture nette avait disparu ; la dernière lettre qu'il écrivit était adressée à Sir David Brewster et traitait de la découverte du télégraphe électrique.

Il finit ses jours paisiblement, ayant toute sa connaissance, à l'aube du 23 février 1855, à l'âge de soixante dix-huit ans.

Dans le royaume des mathématiques, il ne mourra jamais.